

Περίγραμμα Διάλεξης 1

1 Ορισμοί, άλγεβρα

1. Ορισμός μήτρας (πίνακα) $n \times k$. Συμβολισμοί, στοιχεία μήτρας $a_{i,j} = (A)_{i,j}$. Παραδείγματα.
2. Βαθμωτό: μήτρα 1×1 ή απλώς ένας αριθμός.
3. Διανύσματα ή μήτρα-στήλη $n \times 1$ ή μήτρα-γραμμή $1 \times k$: ορισμός, παρουσίαση
4. Μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{i} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$
5. Πράξεις με βαθμωτό. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ 5 & b & 0 \\ -20 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & 5\lambda & \lambda \\ 5\lambda & \lambda b & 0 \\ -20\lambda & 0 & \lambda c \end{bmatrix}$$

6. Διάφοροι (σημαντικοί για εμάς) τύποι μητρών

- i. Τετραγωνική $n \times n$ μήτρα
- ii. Συμμετρική μήτρα. Τα στοιχεία της ικανοποιούν την ισότητα $a_{i,j} = a_{j,i}$:
Παράδειγμα με μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τυχαίου διανύσματος.
- iii. Αντισυμμετρική μήτρα. Τα στοιχεία της ικανοποιούν την ισότητα

$$a_{i,j} = -a_{j,i}$$

- iv. Μηδενική μήτρα $0_{n \times k}$ ή $0_{n \times 1}$ ή $0_{1 \times k}$

- v. Διαγώνια μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα με μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τυχαίου διανύσματος ανεξάρτητων μεταβλητών

- vi. Βαθμωτή μήτρα ως παράδειγμα μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων *i.i.d* μεταβλητών.
- vii. **Μοναδιαία** μήτρα \mathbf{I}_n
- viii. Τριγωνική κάτω και άνω μήτρα
- ix. Μήτρα Toeplitz και συμμετρική μήτρα Toeplitz

χ. Σύνθετες μήτρες και διαμέριση

7. Πρόσθεση, αφαίρεση (και «κατάλληλη» διαμέριση)

8. Πολλαπλασιασμός, ιδιότητες. Παραδείγματα.

i. Πολ/σμός που δίνει μηδέν!!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όμως

$$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 52 \\ -13 & -26 \end{bmatrix}$$

ii. Πολ/σμός και σχέση $CD = CE \not\Rightarrow D = E$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii. Πολ/σμός τετραγωνικής με τον εαυτό της: δύναμη τετραγωνικής μήτρας, πολ/σμός διαγώνιας και δύναμη διαγώνιας, πολ/σμός τριγωνικής και δύναμη τριγωνικής. Block-τριγωνική.

9. Ανάστροφος πίνακας. Ιδιότητες

i. Συμμετρία XX' και $X'X$

10. Εσωτερικό γινόμενο, εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, ορθογώνια διανύσματα

11. Μέτρο ή μήκος ή νόρμα διανύσματος

12. Ταυτοδύναμες ή εκθετικά αναλοιώτες μήτρες (παραδείγματα μετά μαζί με την αντιστροφή) και συμμετρικές ταυτοδύναμες μήτρες.

13. Ίχνος, ιδιότητες ίχνους.