Σύνολο ασκήσεων 8

Βελτιστοποίηση πολυμεταβλητών συναρτήσεων υπό-περιορισμούς ισότητας

Ερώτηση 1 (παράδειγμα)

Η **προϋπόθεση της «Πιστοποίησης Περιορισμού»** (*constraint qualification*) είναι σημαντική διότι αν δεν ισχύει τότε η μέθοδος **Lagrange** μπορεί να μην είναι σε θέση να παράγει λύση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης.

Για παράδειγμα, έστω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{x,y} z = x^2 + y^2$$

μ.τ.π

$$(x-1)^3 - y^2 = 0$$

ή

$$g(x,y) = 0$$

Παρατηρήστε ότι ο περιορισμός

$$g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$

είναι μη-γραμμικός.

Αν **ισχύει** λοιπόν ο περιορισμός, δηλαδή $(x-1)^3 - y^2 = 0$, τότε θα πρέπει να έχουμε $x \geq 1$ αφού για $x < 1$ το $(x-1)^3$ είναι αρνητικός αριθμός στη δύναμη 3 ενώ η y^2 λαμβάνει πάντα θετικές τιμές. Έστω λοιπόν ότι $x = 1$. Τότε ο περιορισμός ικανοποιείται μόνο για $y = 0$ και η τιμή της συνάρτησης που ελαχιστοποιούμε είναι ίση με

$$z = 1^2 + 0^2 = 1$$

Έστω ότι $x > 1$, τότε $y > 0$ και

$$z = x^2 + y^2 > 1$$

Άρα το ελάχιστο της z θα πρέπει να βρίσκεται στο σημείο $x^* = 1, y^* = 0$.

Ισχύει όμως η **προϋπόθεση της «Πιστοποίησης Περιορισμού»** (*constraint qualification*);

Η $n \times m$ Ιακωβιανή μήτρα $g'(x^*)$ (στο συγκεκριμένο πρόβλημα η $g'(x^*)$ είναι 2×1) των πρώτων μερικών παραγώγων του περιορισμού ως προς τις μεταβλητές του προβλήματος υπολογισμένη στο βέλτιστο δίνεται από

$$g'(x^*) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{x=x^*, y=y^*} = \begin{bmatrix} 3(x^*-1)^2 \\ -2y^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Είναι εμφανές ότι ο βαθμός της $g'(x^*)$ είναι 0, άρα η **προϋπόθεση της «Πιστοποίησης Περιορισμού»** (**constraint qualification**) δεν ισχύει.

Αν προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα μέσω της συνάρτησης **Lagrange** έχουμε

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda \left[0 - (x-1)^3 + y^2\right]$$

και οι Σ.Π.Τ δίνονται από τις εξισώσεις

$$(1): \mathcal{L}_x = 0 \Rightarrow 2x - 3\lambda(x-1)^2 = 0$$

$$(2): \mathcal{L}_y = 0 \Rightarrow 2y + 2\lambda y = 0$$

$$(3): \mathcal{L}_\lambda = 0 \Rightarrow (x-1)^3 - y^2 = 0$$

Από την $(2): \lambda = -1$ οπότε από την $(1): 3x^2 - 4x + 6 = 0$, δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα, με τη μέθοδο **Lagrange** δεν μπορούμε να βρούμε το βέλτιστο (ελάχιστο) σημείο $(z^*, x^*, y^*) = (1, 1, 0)$ όταν δεν ισχύει η **προϋπόθεση της «Πιστοποίησης Περιορισμού»** (**constraint qualification**).

Ερώτηση 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = a - bx^2 - cy^2$$

και η εξίσωση του περιορισμού

$$x + dy = M$$

- Λύστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{x,y} f(x,y)$$

$$\text{μ.τ.π}$$

$$x + dy = M$$

  με χρήση της μεθόδου **Lagrange** ώστε να βρείτε το στάσιμο σημείο.

- Παρατηρείτε κάποια «μη-συμβατική» τιμή του πολ/στή **Lagrange**; Εξηγήστε με οικονομικούς όρους τη σημασία της «μη-συμβατικής» συμπεριφοράς αν η συνάρτηση $f(x, y)$ (**λανθασμένα**) εξέφραζε συνάρτηση χρησιμότητας.

- Κάνετε χρήση των **Σ.Δ.Τ** για τοπικό χαρακτηρισμό του στάσιμου σημείου. **Υπόδειξη:** είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Ερώτηση 3

Λύστε το πρόβλημα

$$\max_{x,y} f(x,y) = x + y$$

μ.τ.π

$$x^2 + y^2 = 1$$

με χρήση της μεθόδου **Lagrange** ώστε να βρείτε το στάσιμο σημείο.

Κάνετε χρήση των **Σ.Δ.Τ** για τοπικό χαρακτηρισμό του στάσιμου σημείου.

Ερώτηση 4

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(x,y) = (x+1)(y+1)$$

και ο εισοδηματικός περιορισμός $x + 2y = 30$. Μεγιστοποιείστε τη συνάρτηση χρησιμότητας και χαρακτηρίστε τοπικά το στάσιμο σημείο.

Ερώτηση 5

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)$$

με $x_0, y_0 > 0$ και εισοδηματικό περιορισμό $p_x x + p_y y = M$. Επαναλάβετε την άσκηση 4.

Πως ερμηνεύετε την συγκεκριμένη μορφή συνάρτησης χρησιμότητας; (ελάχιστα επίπεδα διαβίωσης...)