Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 9η: Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να παρουσιάσει στον αναγνώστη την διατύπωση ενός προβλήματος μεταφοράς.

- ✓ Να παρουσιάσει στον αναγνώστη τις διαφορετικές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος της μεταφοράς.

- ✓ Να υπογραμμίσει τις διαφορές στους αλγόριθμους υπολογισμού της κάθε μεθόδου ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να τις αναγνωρίσει.

Περιεχόμενα ενότητας

- Περιγραφή του προβλήματος της μεταφοράς.

- Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της μεταφοράς.

- Μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος της μεταφοράς:
  - ✓ Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας
  - ✓ Μέθοδος Ελαχίστου Κόστους
  - ✓ Μέθοδος Vogel
  - ✓ Μέθοδος Αναθεωρημένης Εκχώρησης (MO.DI)

Ενότητα 10η

Το πρόβλημα της μεταφοράς

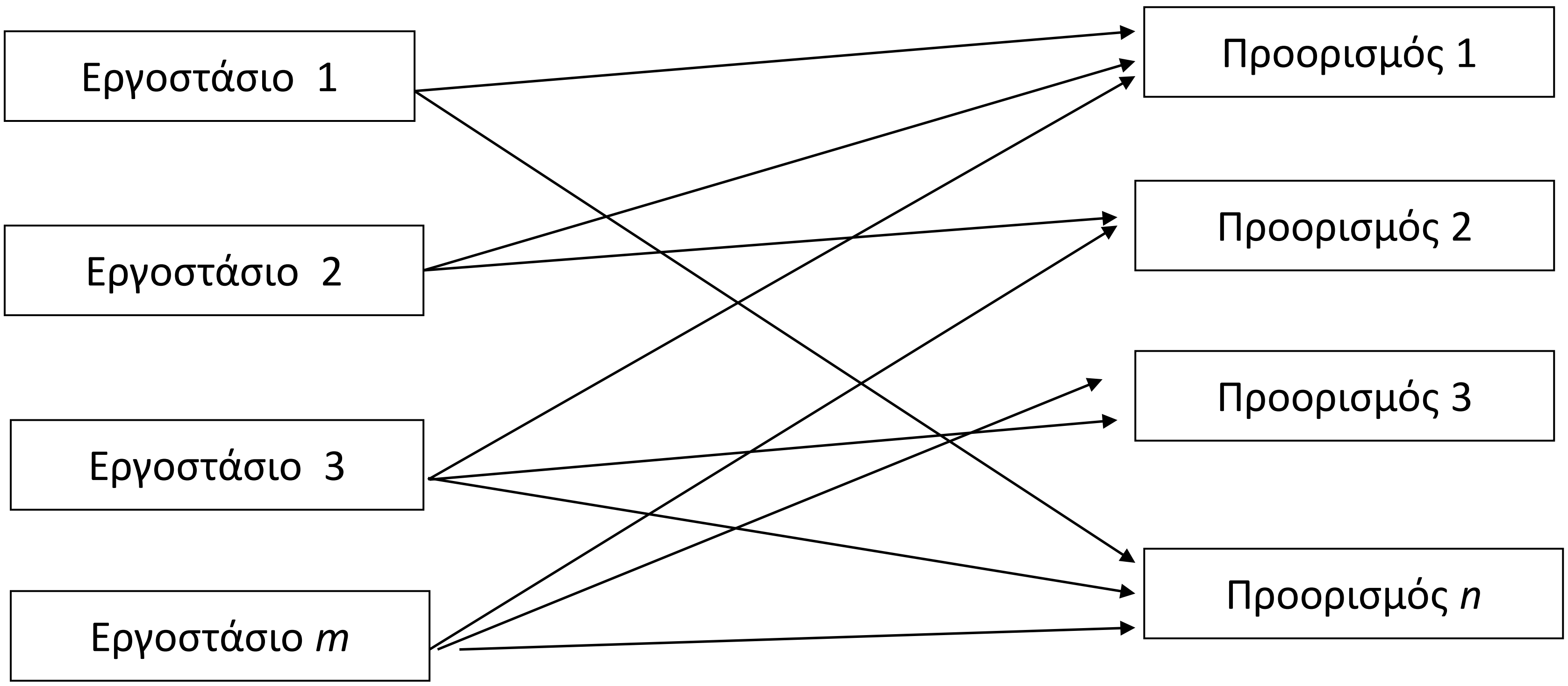
Το πρόβλημα της μεταφοράς - Ι

- Το πρόβλημα της μεταφοράς ασχολείται συνήθως με περιπτώσεις αποστολής προϊόντων προερχόμενες από διαφορετικές πηγές (π.χ. εργοστάσια παραγωγής) σε διάφορους προορισμούς (π.χ. κέντρα διαονμής).

- Σκοπός του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός ενός πλάνου μεταφοράς (βέλτιστου πλάνου μεταφοράς) που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος μεταφοράς και ικανοποιεί βέβαια τους περιορισμούς ζήτησης και προσφοράς για τον προϊόν.

Το πρόβλημα της μεταφοράς - ΙΙ

- Το πρόβλημα της μεταφοράς ανήκει σε μια ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων, αυτών της Δικτυωτής Ανάλυσης. Με την βοήθεια του παρακάτω σχήματος αυτό γίνεται περισσότερο σαφές.



Το πρόβλημα της μεταφοράς - ΙΙΙ

- Υπάρχουν δηλαδή *m* πηγές $s_i, i = 1, 2, \ldots, m$(προσφερόμενη ποσότητα) και *n* $d_j, i = 1, 2, \ldots, n$ προορισμοί που αντιπροσωπεύονται από κόμβους.

- Το κόστος μεταφοράς από την *i*-πηγή στον *j*-προορισμό συμβολίζεται ως c_{ij} ενώ η ποσότητα ως x_{ij}.

Το πρόβλημα της μεταφοράς - IV

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτει κατά την διαδικασία αυτή παριστάνεται παρακάτω ως εξής:

$$\min c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

Περιορισμοί προσφοράς

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

Περιορισμοί ζήτησης

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

Περιορισμοί μη-αρνητικότητας

Παράδειγμα προβλήματος μεταφοράς

- Μια επιχείρηση προσπαθεί να διαθέσει το προϊόν της σε 12 διαφορετικούς προορισμούς με βάση τρία εργοστάσια παραγωγής (εργοστάσιο 1,2,3)) και 4 κέντρων Διανομής (προορισμός 1,2,3,4).
- Τα εργοστάσια προσφέρουν ποσότητα ίση με 350, 300, 450 μονάδες αντίστοιχα.
- Οι προορισμοί ζητούν ποσότητα ίση με 200, 300, 400, 200 μονάδες αντίστοιχα.
- Τα ανά μονάδα κόστη μεταφοράς είναι:
  - Από το εργοστάσιο 1 είναι 5,5,3 και 9€ στους προορισμούς
  - Από το εργοστάσιο 2 είναι 6,3,4 και 7€ στους προορισμούς
  - Από το εργοστάσιο 3 είναι 5,4,6 και 8€ στους προορισμούς

Αποτύπωση προβλήματος - I

– Θα πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές του προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση οι μεταβλητές του προβλήματος αντιστοιχούν στην ποσότητα μεταφοράς από το κάθε εργοστάσιο στον κάθε προορισμό.

– Θα έχουμε μία μεταβλητή για κάθε μια από τις πιθανές διαδρομές, δηλαδή θα προκύψουν 12 μεταβλητές.

Πιο συγκεκριμένα:

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$	**Είναι η ποσότητα μεταφοράς από το εργοστάσιο 1 στους 4 προορισμούς**
$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$	**Είναι η ποσότητα μεταφοράς από το εργοστάσιο 2 στους 4 προορισμούς**
$x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$	**Είναι η ποσότητα μεταφοράς από το εργοστάσιο 3 στους 4 προορισμούς**

Αποτύπωση προβλήματος - II

– Στην συνέχεια θα πρέπει να διαμορφώσουμε την αντικειμενική συνάρτηση και το σύνολο των περιορισμών:

$$\min_{x_{11},\dots x_{34}} Cost = 5x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 9x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} +$$

$$4x_{23} + 7x_{24} + 5x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34}$$

$$s.t.$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 300 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 450 \end{aligned}\right\} \textbf{Περιορισμοί Εργοστασίων}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 400 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 200 \end{aligned}\right\} \textbf{Περιορισμοί Προορισμών}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n$$

Αποτύπωση προβλήματος - III

– Τέλος, θα πρέπει να σχηματίσουμε τον πίνακα του προβλήματος μεταφοράς βάσει του οποίου θα επιλεγούν οι πιθανές διαδρομές.

– Παρατηρούμε πως η προσφορά των πηγών ισούται με την ζήτηση των προορισμών. Τέτοια προβλήματα μεταφοράς λέγονται **ισορροπημένα**.

	Προορισμός 1	**Προορισμός 2**	**Προορισμός 3**	**Προορισμός 4**	**Προσφορά**
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3**	**9**	350
Εργοστάσιο 2	**6**	**3**	**4**	**7**	300
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	200	300	400	200	**1100**

Παρατηρήσεις

- Είναι προφανές από την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της μεταφοράς πως η χρήση της μεθόδου Simplex είναι απαγορευτική.
- Παρατηρώντας την μήτρα συντελεστών του προβλήματος, είναι εμφανές πως οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι είτε μονάδα (1) είτε μηδέν (0).
- Εξαιτίας αυτής της ιδιαιτερότητας στην διατύπωση, αναπτύχθηκαν πιο αποτελεσματικοί αλγόριθμοι λύσης που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια.
- Πρέπει να αναφερθεί πως όλα τα προβλήματα κατά τα οποία η μήτρα συντελεστών έχει αυτή την μορφή μπορούν να αναχθούν σε πρόβλημα μεταφοράς ανεξάρτητα από το περιεχόμενο τους!

Μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς

Μέθοδος βορειοδυτικής (ΒΔ) γωνίας: αλγόριθμος επίλυσης

- Ξεκινάμε πάντα από το βορειοδυτικό (πάνω και αριστερά) κελί του πίνακα και εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση του αντίστοιχου προορισμού ή να εξαντληθεί η προσφορά της πηγής.
- Αν δεν εξαντληθεί η προσφορά της πηγής, συνεχίζουμε στο διπλανό κελί της ίδιας γραμμής (εργοστάσιο i), εκχωρώντας το μέγιστο δυνατό φορτίο προκειμένου να μηδενιστεί η προσφορά.
- Στην συνέχεια μεταβαίνουμε στο ακριβώς από κάτω κελί και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έχοντας πάντα ως γνώμονα το βορειοδυτικό κελί του πίνακα.
- Στα ισορροπημένα προβλήματα μεταφοράς, με την τελευταία εκχώρηση μηδενίζονται ταυτόχρονα τόσο η ζήτηση του προορισμού όσο και η προσφορά της πηγής.

Μέθοδος ΒΔ γωνίας - Ι

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5 (200)**	**5**	**3**	**9**	150 (350-200)
Εργοστάσιο 2	**6**	**3**	**4**	**7**	300
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	200 (200-200=0)	300	400	200	**1100**

Μέθοδος ΒΔ γωνίας - ΙΙ

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5 (200)**	**5 (150)**	**3**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3**	**4**	**7**	300
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	0	150 (300-150)	400	200	**1100**

Μέθοδος ΒΔ γωνίας - III

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5** **(200)**	**5** **(150)**	**3**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3** **(150)**	**4**	**7**	150 (300-150)
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	0	0 (150-150=0)	400	200	**1100**

Μέθοδος ΒΔ γωνίας - IV

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5** **(200)**	**5** **(150)**	**3**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3** **(150)**	**4** **(150)**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	0	0	250 (400-150)	200	**1100**

Μέθοδος ΒΔ γωνίας - V

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5 (200)**	**5 (150)**	**3**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3 (150)**	**4 (150)**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6 (250)**	**8**	150 (450-250)
Ζήτηση	0	0	0 (250-250)	200	**1100**

Μέθοδος ΒΔ γωνίας - VI

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5** **(200)**	**5** **(150)**	**3**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3** **(150)**	**4** **(150)**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6** **(250)**	**8** **(200)**	0 (200-200)
Ζήτηση	0	0	0	0 (200-200)	**1100**

Υπολογισμός κόστους με την μέθοδο ΒΔ γωνίας

Διαδρομή	Κόστος/μονάδα	Μονάδες	Συνολικό Κόστος
x_{11}	5	200	1000
x_{12}	5	150	750
x_{22}	3	150	450
x_{23}	4	150	600
x_{33}	6	250	1500
x_{34}	8	200	1600
Σύνολο			5,900

Παρατηρήσεις για την μέθοδο ΒΔ γωνίας

- Είναι η απλούστερη υπολογιστικά μέθοδος.
- Δεν λαμβάνει υπόψη της το ανά μονάδα κόστος μεταφοράς και ως εκ τούτου το κόστος μεταφοράς είναι το υψηλότερο συγκριτικά με τις υπόλοιπες μεθόδους.
- Ο αριθμός ανεξάρτητων διαδρομών είναι m+n-1=6. Δηλαδή, εξαιτίας της υπόθεσης περί ισότητας προσφοράς και ζήτησης, αν ξέρουμε την ποσότητα μιας πηγής ή προορισμού, μπορούμε να την υπολογίσουμε εξ' υπολοίπου.
- Στην περίπτωση που η ζήτηση (προσφορά) υπερβαίνει την προσφορά (ζήτηση), προσθέτουμε έναν (μια) επιπλέον προορισμό (πηγή) που απορροφά την ζήτηση (προσφορά) με μηδενικά συνήθως κόστη, κάτι τέτοιο όμως θα προσδιορίζεται από το εκάστοτε πρόβλημα.

Μέθοδος ελαχίστου κόστους: αλγόριθμος επίλυσης

Τα βήματα για την συγκεκριμένη μέθοδο είναι τα εξής:

- Ξεκινάμε από την διαδρομή με τον μικρότερο συντελεστή κόστους και στην διαδρομή αυτή εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο ώστε να εξαντληθεί η ποσότητα της πηγής ή να ικανοποιηθεί η ζήτηση του προορισμού.
- Διαγράφουμε την πηγή προέλευσης ή τον προορισμό (ανάλογα).
- Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα έως ότου εξαντληθούν οι ποσότητες από τις πηγές προέλευσης και ικανοποιηθεί η ζήτηση των προορισμών.
- Σε περίπτωση ισότητας κόστους μεταφοράς, διαλέγουμε στην τύχη.

Μέθοδος ελαχίστου κόστους - I

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3** **(350)**	**9**	0 (350-350)
Εργοστάσιο 2	**6**	**3**	**4**	**7**	300
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	200	300	50 (400-350)	200	**1100**

Μέθοδος ελαχίστου κόστους - ΙΙ

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3** **(350)**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3** **(300)**	**4**	**7**	0 (300-300)
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450
Ζήτηση	200	0 (300-300)	50 (400-350)	200	**1100**

Μέθοδος ελαχίστου κόστους - III

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3 (350)**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3 (300)**	**4**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5 (200)**	**4**	**6**	**8**	250 (450-200)
Ζήτηση	0 (200-200)	0	50	200	**1100**

Μέθοδος ελαχίστου κόστους - IV

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3** **(350)**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3** **(300)**	**4**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5** **(200)**	**4**	**6** **(50)**	**8**	200 (250-50)
Ζήτηση	0	0	0 (50-50)	200	**1100**

Μέθοδος ελαχίστου κόστους - V

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3 (350)**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3 (300)**	**4**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5 (200)**	**4**	**6 (50)**	**8 (200)**	0 (200-200)
Ζήτηση	0	0	0	0 (200-200)	**1100**

Υπολογισμός κόστους με την μέθοδο ελαχίστου κόστους

Διαδρομή	Κόστος/μονάδα	Μονάδες	Συνολικό Κόστος
x_{13}	3	350	1050
x_{22}	3	300	900
x_{31}	5	200	1000
x_{33}	6	50	300
x_{34}	8	200	1600
Σύνολο			4,850

Παρατηρήσεις για την μέθοδο ελαχίστου κόστους

- Το κόστος που υπολογίζει η μέθοδος είναι μικρότερο σχετικά με την μέθοδο ΒΔ γωνίας εξαιτίας του γεγονότος πως η επιλογή έγινε με βάση το κόστος μεταφοράς.
- Η μέθοδος δεν εγγυάται την βέλτιστη λύση. Υπάρχει περίπτωση να προκύψει λύση με λιγότερες από m+n-1 διαδρομές όταν σε κάποια εκχώρηση εξαντλείται η προσφορά και ικανοποιείται η ζήτηση ταυτόχρονα (όπως στην περίπτωση του παραδείγματος).
- Μειονέκτημα της μεθόδου είναι η μυωπική επιλογή των διαδρομών καθώς δεν εξετάζει το κόστος ευκαιρίας από την επόμενη επιλογή, δηλαδή αγνοεί το τι θα συμβεί μετά από μια κίνηση.

Μέθοδος Vogel (Vogel's Approximation Method, V.A.M)

- Είναι μια επιπλέον μέθοδος προσδιορισμού της αρχικής εφικτής λύσης σε προβλήματα μεταφοράς.
- Η συγκεκριμένη μέθοδος αν και πιο πολύπλοκη παρέχει κατά κανόνα καλύτερες λύσεις ακόμη και την βέλτιστη λύση.
- Λαμβάνει υπόψη το κόστος των διαδρομών αλλά όχι το απόλυτο κόστος κάθε διαδρομής.
- Περιλαμβάνει για κάθε πηγή και κάθε προορισμό την αύξηση κόστους που θα προέκυπτε εάν αντί της οικονομικής επιλογής επιλέγαμε την δεύτερη πιο οικονομική (λαμβάνει υπόψη της δηλαδή το κόστος ευκαιρίας της αμέσως επόμενης επιλογής).

Μέθοδος Vogel αλγόριθμος επίλυσης

- Για κάθε πηγή προέλευσης όπως και για κάθε προορισμό υπολογίζουμε έναν δείκτη ποινής (η διαφορά μεταξύ του μικρότερου και του αμέσως μικρότερου κόστους των διαδρομών κάθε γραμμής και στήλης).
- Το μέγιστο δυνατό φορτίο εκχωρείται στην διαδρομή με την μεγαλύτερη ποινή και το ελάχιστο κόστος μεταφοράς (δηλαδή το μικρότερο κόστος).
- Μετά από κάθε εκχώρηση, επανυπολογίζουμε για κάθε γραμμή και στήλη την διαφορά ανάμεσα στο μεγαλύτερο και το μικρότερο κόστος μεταφοράς, δηλαδή την ποινή και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία.
- Προφανώς, η στήλη ή η γραμμή που μηδενίστηκε δεν λαμβάνεται υπόψη στους υπολογισμούς.

Μέθοδος Vogel- I

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3**	**9**	350	5-3=2
Εργοστάσιο 2	**6**	**3**	**4**	**7**	300	4-3=1
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450	5-4=1
Ζήτηση	200	300	400	200		
Ποινή	6-5=1	4-3=1	4-3=1	8-7=1		

Μέθοδος Vogel- II

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3** (350)	**9**	0 (350-350)	5-3=2
Εργοστάσιο 2	**6**	**3**	**4**	**7**	300	4-3=1
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450	5-4=1
Ζήτηση	200	300	50 (400-350)	200		
Ποινή	6-5=1	4-3=1	6-4=2	8-7=1		

Μέθοδος Vogel- III

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	5	5	3 (350)	9	0 (350-350)	5-3=2
Εργοστάσιο 2	6	3	4 (50)	7	250 (300-50)	7-6=1
Εργοστάσιο 3	5	4	6	8	450	5-4=1
Ζήτηση	200	300	0 (50-50)	200		
Ποινή	6-5=1	4-3=1	6-4=2	8-7=1		

Μέθοδος Vogel- IV

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3 (350)**	**9**	0 (350-350)	5-3=2
Εργοστάσιο 2	**6**	**3 (250)**	**4 (50)**	**7**	0 (250-50)	7-6=1
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6**	**8**	450	5-4=1
Ζήτηση	200	50 (300-250)	0 (50-50)	200		
Ποινή	5	4	6-4=2	8		

Μέθοδος Vogel- V

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	5	5	3 (350)	9	0 (350-350)	5-3=2
Εργοστάσιο 2	6	3 (250)	4 (50)	7	0 (250-50)	7-6=1
Εργοστάσιο 3	5	4	6	8 (200)	50 (250-200)	5
Ζήτηση	200	50	0 (50-50)	0 (200-200)		
Ποινή	5	4	6-4=2	8		

Μέθοδος Vogel- VI

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3** **(350)**	**9**	0 (350-350)	5-3=2
Εργοστάσιο 2	**6**	**3** **(250)**	**4** **(50)**	**7**	0 (250-50)	7-6=1
Εργοστάσιο 3	**5**	**4** **(50)**	**6**	**8** **(200)**	200 (400-200)	5
Ζήτηση	200	0 (50-50)	0 (50-50)	0 (200-200)		
Ποινή	5	4	6-4=2	8		

Μέθοδος Vogel- VII

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά	Ποινή
Εργοστάσιο 1	**5**	**5**	**3 (350)**	**9**	0 (350-350)	5-3=2
Εργοστάσιο 2	**6**	**3 (250)**	**4 (50)**	**7**	0 (250-50)	7-6=1
Εργοστάσιο 3	**5 (200)**	**4 (50)**	**6**	**8 (200)**	0 (200-200)	5
Ζήτηση	0 (200-200)	0 (50-50)	0 (50-50)	0 (200-200)		
Ποινή	5	4	6-4=2	8		

Υπολογισμός κόστους με την μέθοδο Vogel

Διαδρομή	Κόστος/μονάδα	Μονάδες	Συνολικό Κόστος
x_{13}	3	350	1050
x_{23}	3	250	750
x_{22}	4	50	200
x_{34}	5	200	1000
x_{32}	4	50	200
x_{31}	8	200	1600
Σύνολο			4,800

Μέθοδος αναθεωρημένης εκχώρησης (MOdified DIstribution)- I

Η μεθοδολογία της MODI δίνεται στα παρακάτω βήματα:

1. Ορίζουμε τις μεταβλητές:

$$R_i \ : \text{μεταβλητή για την i σειρά (προέλευση)}$$

$$K_j \ : \text{μεταβλητή για την j σειρά (προορισμού)}$$

$$C_{ij} \ : \text{κόστος αντίστοιχης διαδρομής}$$

2. Έχουμε ένα σύστημα *m+n-1* εξισώσεων με *m+n* αγνώστους καθώς

$$R_i + K_j = C_{ij}$$

Μέθοδος αναθεωρημένης εκχώρησης (MOdified DIstribution)-II

3. Υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών της πηγής προέλευσης και του προορισμού θέτοντας και λύνοντας ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές.

4. Υπολογίζουμε το δείκτη βελτίωσης ως $\Delta \mathrm{B} = C_{ij} - \left(R_i + K_j \right)$ για κάθε μη χρησιμοποιηθέντα διαδρομή.

5. Επιλέγουμε την διαδρομή με το μικρότερο αρνητικό δείκτη.

Παράδειγμα βάσει της μεθόδου ΒΔ γωνίας - Ι

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	Προορισμός 4	Προσφορά
Εργοστάσιο 1	**5 (200)**	**5 (150)**	**3**	**9**	0
Εργοστάσιο 2	**6**	**3 (150)**	**4 (150)**	**7**	0
Εργοστάσιο 3	**5**	**4**	**6 (250)**	**8 (200)**	0 (200-200)
Ζήτηση	0	0	0	0 (200-200)	**1100**

Παράδειγμα βάσει της μεθόδου ΒΔ γωνίας - ΙΙ

Διαδρομή	Εξίσωση
x_{11}	$R_1 + K_1 = 5$
x_{12}	$R_1 + K_2 = 5$
x_{22}	$R_2 + K_2 = 3$
x_{23}	$R_2 + K_3 = 4$
x_{33}	$R_3 + K_3 = 6$
x_{34}	$R_3 + K_4 = 6$

Θέτοντας $R_1 = 0$ έχουμε:

$K_1 = 5$

$K_2 = 5$

$R_2 = -2$

$K_3 = 6$

$R_3 = 0$

$K_4 = 8$

Μετά υπολογίζουμε τον δείκτη βελτίωσης

Παράδειγμα βάσει της μεθόδου ΒΔ γωνίας - III

Διαδρομή	$\Delta B = C_{ij} - \left(R_i + K_j\right)$
x_{11}	3-0-6=-3
x_{12}	9-0-8=1
x_{22}	6-(-2)-5=3
x_{23}	7-(-2)-8=1
x_{33}	5-0-5=0
x_{34}	4-0-5=-1

Τέλος $9^{ης}$ Ενότητας

Το πρόβλημα της μεταφοράς

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης, 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Το πρόβλημα της μεταφοράς». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.