Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 10η: Ακέραιος Προγραμματισμός

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να προσφέρει μια εισαγωγή στον ακέραιο προγραμματισμό.
- ✓ Να παρουσιάσει τις διαφορές του ακέραιου και του γραμμικού προγραμματισμού.
- ✓ Να κατηγοριοποιήσει τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.
- ✓ Να παρουσιάσει την μεθοδολογική προσέγγιση στα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.

Περιεχόμενα ενότητας

- Τι είναι ο ακέραιος προγραμματισμός.

- Κατηγοριοποίηση προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού.

- Μεθοδολογική προσέγγιση του ακέραιου προγραμματισμού.

- Παράδειγμα προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού.

Ενότητα 9η

Ακέραιος προγραμματισμός

Ακέραιος προγραμματισμός

- Τα προβλήματα τους Ακεραίου Γραμμικού Προγραμματισμού (Integer Linear Programming) είναι εκείνα των οποίων μερικές ή/και όλες οι μεταβλητές απόφασης που συμμετέχουν λαμβάνουν ακέραιες-διακριτές τιμές (binary variables*)*.

- Με άλλα λόγια δεν ισχύει η προϋπόθεση της διαιρετότητας.

- Η μόνη διαφορά με το μαθηματικό υπόδειγμα του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ότι προστίθεται περιορισμός για τις ακέραιες μεταβλητές.

- Η διαφοροποίηση του μικτού αφορά την ύπαρξη μερικών από τις μεταβλητές να είναι ακέραιες.

Κατηγοριοποίηση προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού

Τα προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού ανήκουν γενικά σε 3 κατηγορίες:

1. Προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές είναι ακέραιες. Λύνονται ως κλασσικά προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού.
2. Προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές δεν έχουν φυσικό νόημα όπως οι κλασσικές γραμμικές μεταβλητές (π.χ. μονάδες παραγωγής, ώρες εργασία κλπ), αλλά λογικό νόημα (ναι ή όχι που συνήθως συμβολίζονται με τις ακέραιες τιμές 0 ή 1). Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται προβλήματα 0/1.
3. Μερικά προβλήματα 0/1 περιλαμβάνουν ταυτόχρονα τόσο κλασσικές μεταβλητές όσο και μεταβλητές με λογικό νόημα (0 ή 1).

Μεθοδολογική προσέγγιση - Ι

- Σε περιπτώσεις που οι μεταβλητές απόφασης ενός ΠΓΠ είναι φραγμένες παίρνουν δηλαδή περιορισμένο αριθμό ακέραιων τιμών, οι ιδεώδεις μέθοδοι επίλυσης ακέραιων είναι οι μέθοδοι τύπου διακλάδωσης και οριοθέτησης ή κλάδου και φράγματος (branch and bound methods).

- Οι μέθοδοι αυτές στηρίζονται σε μια έμμεση απαρίθμηση των δυνατών ακέραιων λύσεων που επιδέχεται το σύστημα.

- Φυσικά, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι ακέραιου προγραμματισμού για παράδειγμα οι δυο μέθοδοι των τεμνόντων επιπέδων (cutting plane methods-Gass (1985), Garfmkel and Nemhauser (1972), Minoux (1983), Hallin and Lefevre (1986).

Μεθοδολογική προσέγγιση - ΙΙ

Έστω το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$s.t.$$

$$\mathbf{x} \in A = \left\{ \mathbf{x} \in R^m \ / \ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \ \text{ακέραιες} \right\}$$

Μεθοδολογική προσέγγιση - III

Η διαδικασία αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια:

1. Λύνουμε το ΠΓΠ μέσω της μεθόδου Simplex χωρίς περιορισμούς ακεραιότητας.
2. Εάν η λύση του ΠΓΠ ικανοποιεί και τους περιορισμούς ακεραιότητας τότε σταματάμε. Εάν όχι καθορίζουμε μια πρώτη ακέραιη λύση της οποίας και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αποτελεί το αρχικό κάτω φράγμα.
3. Δημιουργούμε δύο υπό-προβλήματα. Θεωρούμε ως βέλτιστη λύση την $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ και η τιμή x_i^* της x_i δεν είναι ακέραιη:

$$1.\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \;\; s.t \;\; \mathbf{x} \in A \wedge x_i \leq \left[x_i^*\right]$$

$$2.\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \;\; s.t \;\; \mathbf{x} \in A \wedge x_i \geq \left[x_i^*\right] + 1$$

Ακέραιο μέρος του x_i^*

Μεθοδολογική προσέγγιση - IV

- Για κάθε υποσύνολο λύσεων, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της βέλτιστης μη ακεραίας λύσης αποτελεί το άνω φράγμα.
- Αντίστοιχα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της καλύτερης ακεραίας λύση αποτελεί το κάτω φράγμα.

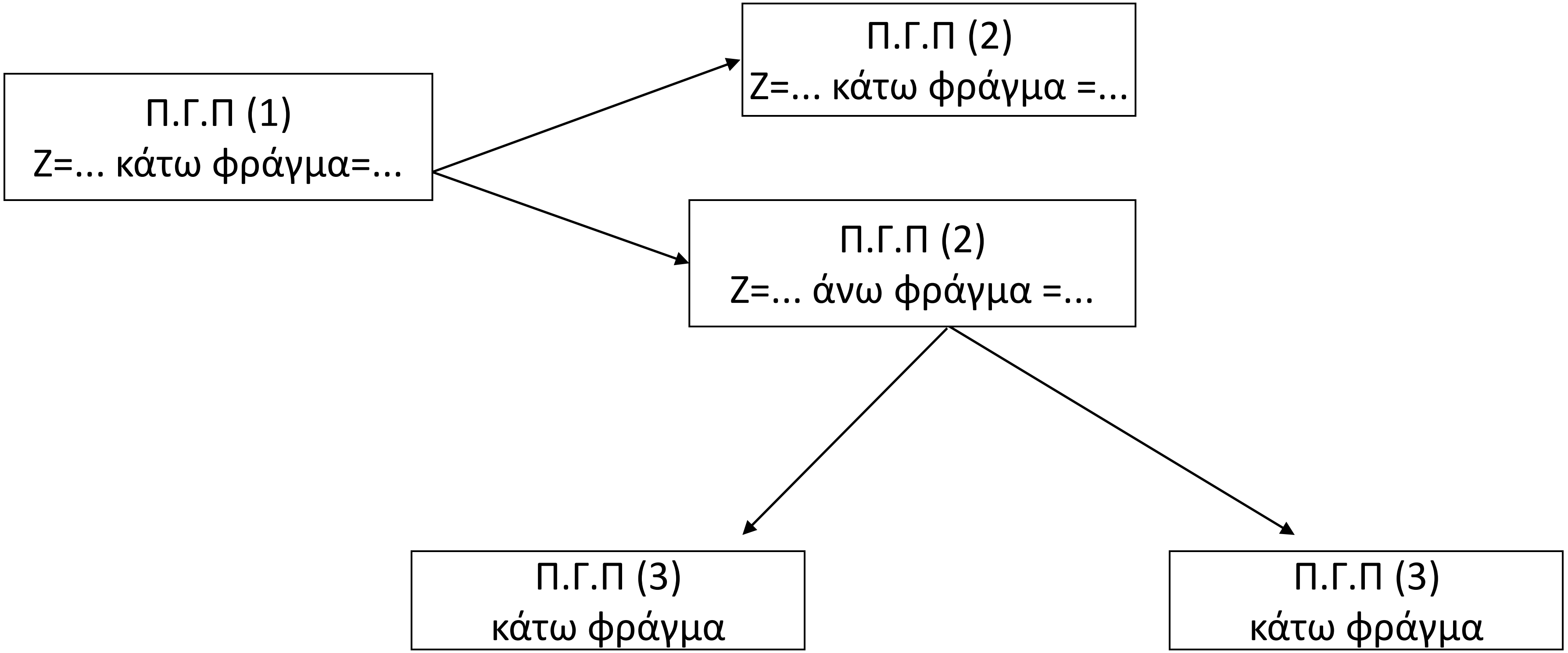
✓ Στην περίπτωση όπου το άνω φράγμα είναι κατώτερο από το ισχύον κάτω φράγμα δεν συνεχίζουμε.

✓ Στην περίπτωση όπου έχουμε λύση με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίσης ή μεγαλύτερης του άνω φράγματος η λύση είναι βέλτιστη.

❖ Εάν όχι προχωράμε, με το καλύτερο άνω φράγμα.

Μεθοδολογική προσέγγιση - V

- Γραφικά, η διαδικασία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Παρατηρήσεις

- Η επιλογή της αρχικής ακέραιης λύσης στο στάδιο 2 δεν είναι υποχρεωτική, είναι όμως πολύ σημαντική για τη διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου, διότι όσο πιο υψηλό είναι το αρχικό κάτω φράγμα τόσο πιο γρήγορα θα συγκλίνει ο αλγόριθμος.

- Σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα, δεν είναι απλή υπόθεση ο καθορισμός μιας καλής αρχικής λύσης.

- Η μεθοδολογία του κάτω και άνω φράγματος υλοποιείται από πληθώρα αλγορίθμων οι οποίοι διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο επιλογής του αρχικού κάτω φράγματος (στάδιο 2) καθώς και την εκάστοτε επιλογή της μεταβλητής στην οποία βασίζεται η διακλάδωση του σταδίου 3.

Παράδειγμα ακεραίου προγραμματισμού

$$\min_{x_1, x_2} Z = 120000x_1 + 150000x_2$$

$$s.t.$$

$$40x_1 + 24x_2 \leq 355$$

$$x_1 \geq 6$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2, ακέραιες \geq 0$$

Τέλος 10ης Ενότητας

Ακέραιος προγραμματισμός

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.