



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 8^η: Ανάλυση Ευαισθησίας των
παραμέτρων του ΠΓΠ

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να παρουσιάσει στον αναγνώστη η χρησιμότητα και η μεθοδολογία της ανάλυσης ευαισθησίας των παραμέτρων του ΠΓΠ.
- ✓ Να προετοιμάσει τον αναγνώστη ώστε να αντιμετωπίζει με ευχέρεια αλλαγές στις παραμέτρους του προβλήματος παρουσιάζοντας τις αλλαγές που συμβαίνουν στον τελικό πίνακα Simplex και ως εκ τούτου στην βέλτιστη λύση.



Περιεχόμενα ενότητας

- Τι είναι η ανάλυση ευαισθησίας και γιατί είναι χρήσιμη.
- Αλλαγές στις παραμέτρους του υποδείγματος και συγκεκριμένα:
 - ✓ Μεταβολή των συντελεστών κέρδους ή κόστους.
 - ✓ Μεταβολή των ποσοτήτων διαθεσιμότητας των πόρων.
 - ✓ Μεταβολή των συντελεστών του συνόλου των περιορισμών.
 - ✓ Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών.
 - ✓ Προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών.



Ενότητα 8^η

**Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων του
ΠΓΠ.**

Τι είναι η ανάλυση ευαισθησίας;

- Αφορά στην μελέτη των μεταβολών που θα προκύψουν στην βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εάν συμβούν κάποιες μεταβολές στις παραμέτρους του μαθηματικού υποδείγματος.
- Ακολουθούν:
 1. Παραμετρική Ανάλυση
 2. Ανάλυση Ευστάθειας



Ποια τα μέρη της ανάλυσης ευαισθησίας;

Θα πρέπει να εξεταστούν χωριστά οι κάτωθι περιπτώσεις:

1. Μεταβολή των συντελεστών κέρδους ή κόστους.
2. Μεταβολή των ποσοτήτων διαθεσιμότητας των πόρων.
3. Μεταβολή των συντελεστών του συνόλου των περιορισμών.
4. Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών.
5. Προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών.



Μερικοί Ορισμοί - I

Ας θεωρήσουμε ένα ΠΓΠ σε κανονική μορφή:

$$\max \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad \mathbf{x}, \mathbf{c} \in M_{nx1}, \mathbf{b} \in M_{mx1}, \mathbf{A} \in M_{m \times n}$$

s.t.

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_\beta^* \\ x_m \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [c_1, \dots, c_m]'$$

Δίνεται η άριστη λύση του $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ x_{m0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]'$ και συμβολίζουμε με

$\mathbf{A}_j = [P_1, P_2, \dots, P_m]$, τον αντίστοιχο βασικό πίνακα. Οι στήλες του τελικού πίνακα είναι Y_0, Y_1, \dots, Y_n



Μερικοί Ορισμοί - II

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εάν οι στήλες του τελικού μας άριστου πίνακα Simplex είναι Y_0, Y_1, \dots, Y_n , τότε:

$$Y_0 = \mathbf{A}_1^{*-1} \mathbf{b} \Leftrightarrow Y_j = \mathbf{A}_1^{*-1} P_j, \text{ και}$$

$$z_0 = \mathbf{c}'_B Y_0 = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_1^{*-1} b, \text{ και}$$

$$z_j - c_j = \mathbf{c}'_B Y_j - c_j = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_1^{*-1} P_j - c_j$$



Τελικός πίνακας Simplex

Ο τελικός πίνακας θα έχει την εξής σύνθεση:

$\mathbf{A}_1^{*-1} \mathbf{b}$	$\mathbf{A}_1^{*-1} \mathbf{A}$
$\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_1^{*-1} \mathbf{b}$	$\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_1^{*-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}'$



Μεταβολή συντελεστών κέρδους ή κόστους

- Στην περίπτωση της μεταβολής των συντελεστών κέρδους ή κόστους c_j στον τελικό μας πίνακα επηρεάζεται μόνο η τελευταία του γραμμή, δηλαδή το κριτήριο βελτιστότητας.
- Συνεπώς θα πρέπει να κοιτάξουμε εάν θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα νέο διάνυσμα $c_j^* = [c_1^* \ c_2^* \ \dots \ c_n^*]$ το πώς επηρεάζεται η διαφορά $c_j - z_j$.
- Εάν η διαφορά παραμένει αρνητική τότε η λύση μας παραμένει άριστη ενώ εάν η διαφορά δεν είναι αρνητική θα πρέπει να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο της μεθόδου Simplex.



Παράδειγμα - I

- Να υπολογιστεί η άριστη λύση του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εάν $\mathbf{c}^* = [-3 \quad 8 \quad 2]$

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = -x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Μεταβολή των ποσοτήτων διαθεσιμότητας των πόρων

- Εάν σκεφτούμε τώρα την μέθοδο Simplex θα καταλάβουμε ότι η μεταβολή του διανύσματος των σταθερών όρων επιφέρει μεταβολές στην πρώτη στήλη του κάθε πίνακα.
- Στην θεωρία μας λοιπόν και στο ΠΓΠ αντικαθιστούμε την πρώτη στήλη όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ με } \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$



Μεταβολή των συντελεστών των περιορισμών

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο περιπτώσεις:

1. Οι μεταβολές δεν αφορούν τις βασικές στήλες της άριστης λύσης του ΠΓΠ.
2. Οι μεταβολές αφορούν και τις βασικές στήλες της άριστης λύσης του ΠΓΠ.



Παράδειγμα - II

- Να υπολογιστεί η άριστη λύση του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εάν οι δύο πρώτοι περιορισμοί αλλάξουν ως ακολούθως:

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = -x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών

- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε νέα μεταβλητή που εισέρχεται ή αφαιρείται υπήρχε στο αρχικό ΠΓΠ.
- Άρα για τις μη βασικές μεταβλητές θα πρέπει να διαγράψουμε την αντίστοιχη στήλη του τελικού πίνακα.
- Ενώ για τις βασικές πρέπει να βγάλουμε από την βάση τις αντίστοιχες στήλες και μετά να τις διαγράψουμε.



Παράδειγμα - III

Να υπολογίσετε την άριστη λύση του παρακάτω ΠΓΠ

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = -x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

εάν προστεθούν οι μεταβλητές,

x_8, x_9 , με $c_8 = 2, c_9 = -3$ και

$$\tilde{x}_8 = [4 \ -2 \ 0 \ -3]^\prime, \tilde{x}_9 = [0 \ 5 \ 3 \ 0]^\prime$$



Προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών

- Ελέγχουμε εάν η βέλτιστη λύση επαληθεύει τον νέο περιορισμό.
 - Εάν ναι ο περιορισμός είναι ανενεργός
 - Εάν όχι θα προκύψει μια νέα λύση.
- ❖ Για να την υπολογίσουμε θα πρέπει:
 1. Να χρησιμοποιήσουμε το δυικό πρόβλημα και άρα ο περιορισμός να γίνει μεταβλητή.
 2. Να εισάγουμε τον νέο περιορισμό με την μορφή εξίσωσης στο βέλτιστο πίνακα του πρωτεύοντος προβλήματος και να δημιουργήσουμε μια μη βασική εφικτή λύση και μετά να εφαρμόσουμε τον δυικό αλγόριθμο Simplex.



Παράδειγμα - IV

Να υπολογίσετε την άριστη λύση του παρακάτω ΠΓΠ

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = -x_1 - x_2 + x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

εάν δεν χρειάζεται ο πρώτος περιορισμός και προστεθεί ο εξής περιορισμός: $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4$



Τέλος 8^{ης} Ενότητας

**Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων του
ΠΓΠ.**

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης, 2015.
«Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων του ΠΓΠ». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: [σύνδεσμο μαθήματος](#).



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

