



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 6^η: Η Μέθοδος M και η Μέθοδος των Δύο
Φάσεων

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να παρουσιάσει στον αναγνώστη την Μέθοδο M και τις τεχνητές μεταβλητές ως μια λύση στην περίπτωση που δεν σχηματίζεται μοναδιαίος πίνακας (βάση) ώστε να ξεκινήσει τις επαναλήψεις ο αλγόριθμος Simplex.
- ✓ Να παρουσιάσει την Μέθοδο των δύο φάσεων καθώς και την χρησιμότητα της.



Περιεχόμενα ενότητας

- Εισαγωγικά στοιχεία: σκιώδεις τιμές και κριτήριο βελτιστότητας.
- Μέθοδος M και παραδείγματα.
- Μέθοδος των δύο φάσεων και παραδείγματα.



Ενότητα 6^η

**Η Μέθοδος Μ και η μέθοδος των δύο
φάσεων**

Εισαγωγικά - I

- Όπως είδαμε και στα προηγούμενα μαθήματα η ποσότητα $\frac{\partial Z}{\partial x_j} = c_j - z_j$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μεταβληθεί η τιμή μιας μη βασικής μεταβλητής.
- ✓ Άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε την αξία του κάθε μη βασικού διανύσματος και να επιλέξουμε εκείνο που θα εισέλθει στην βάση βελτιώνοντας την αντικειμενική συνάρτηση.



Εισαγωγικά - II

- Η σκιώδης τιμή του i -πόρου ορίζεται ως η οριακή αξία του πόρου το ποσό βελτίωσης της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την μεταβολή μιας μονάδας του πόρου.

$$w_i \rightarrow z_i - c_i, \forall x_i$$

- Το κόστος ευκαιρίας της j -οστής μη βασικής μεταβλητής είναι το ποσό ελάττωσης της αντικειμενικής συνάρτησης εάν η ποσότητα αυξηθεί κατά μία μονάδα.



Μέθοδος M - I

- ❖ Η υλοποίηση και εφαρμογή της μεθόδου Simplex σε ΠΓΠ απαιτεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης να είναι σε τυπική μορφή αλλά απαιτεί ταυτόχρονα και τον σχηματισμό μοναδιαίου πίνακα στον πρώτο πίνακα Simplex.
- ❖ Στην περίπτωση που δεν περιέχεται ο μοναδιαίος πίνακας μέσα στον πίνακα **A** χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές (artificial variables) έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας.
- ❖ Αυτό το πρόβλημα εμφανίζεται κυρίως σε ΠΓΠ με περιορισμούς του τύπου " \geq " και " $=$ ".
- ❖ Η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών διευρύνει την εφικτή περιοχή του προβλήματος και συνεπώς μια εφικτή λύση στο αναθεωρημένο πρόβλημα είναι εφικτή λύση και για το αρχικό πρόβλημα αν και μόνο αν οι τιμές όλων των τεχνητών μεταβλητών είναι μηδέν.



Μέθοδος M - II

- Η μέθοδος M εισάγει τις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή για κάθε μεταβλητή το $-M$, όπου M αυθαίρετα πολύ μεγάλος θετικός αριθμός.

- Η λύση του αναθεωρημένου προβλήματος πρέπει να είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$,

όπου x οι λύσεις των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος και όπου 0 οι λύσεις των τεχνητών μεταβλητών οι οποίες πρέπει να είναι 0 .

- ✓ Σημειώστε πως δεν υπάρχει κάποια φυσική ερμηνεία για τις τεχνητές μεταβλητές και συνεπώς ο αλγόριθμος Simplex θα τους δώσει μηδενικές τιμές στο βέλτιστο σημείο.
- ✓ Οι τεχνητές μεταβλητές βοηθούν στο να ξεκινήσει τις επαναλήψεις ο αλγόριθμος Simplex και χρησιμοποιούνται όταν δεν ταυτοποιείται το σύστημα των περιορισμών κατά τον σχηματισμό του πρώτου πίνακα Simplex.



Μια σημείωση για την Μέθοδο M

- Μπορούμε να χειριστούμε τις τεχνητές μεταβλητές με δύο (ισοδύναμους) τρόπους:
 1. Είτε πρόκειται για πρόβλημα max είτε για min , προσθέτεις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση διότι:
 - a) Στην περίπτωση του max , προσθέτουμε μεταβλητές με «πολύ» μεγάλο κόστος \rightarrow μειώνεται η τιμή της Αντικειμενικής Συνάρτησης \rightarrow Η μέθοδος Simplex θα τις μηδενίσει.
 - b) Στην περίπτωση του min , προσθέτουμε μεταβλητές με «πολύ» μεγάλο κόστος \rightarrow αυξάνεται η τιμή της Αντικειμενικής Συνάρτησης \rightarrow Η μέθοδος Simplex θα τις μηδενίσει.
 2. A] Πρόβλημα max \rightarrow προσθέτουμε κάτι «πολύ» μικρό \rightarrow Δεν αλλάζει η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης \rightarrow Η Simplex την μηδενίζει.
B] Πρόβλημα min \rightarrow αφαιρούμε κάτι «πολύ» μικρό \rightarrow Δεν αλλάζει η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης \rightarrow Η Simplex την μηδενίζει.



Παράδειγμα 1 - I

- Να λυθεί το παρακάτω ΠΓΠ:

$$\min_{x_1, x_2, x_3} Z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Παράδειγμα 1 - II

- Μια πρώτη απόπειρα μετατροπής του σε τυπική (ή κανονική) μορφή:

$$- \max_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} Y = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



Παράδειγμα 1 - III

- ❖ Ποιος είναι ο πίνακας **A**; Τι παρατηρείτε;
- Προφανώς ο πίνακας **b** δεν μπορεί να αποτελέσει την αρχική βασική λύση και ως εκ τούτου χρειάζεται να εισάγουμε στο πρόβλημα τεχνητές μεταβλητές!

$$- \max_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7} Y = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$



Λύση παραδείγματος 1 - I

❖ Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι ο εξής:

		-2	3	4	0	0	-M	-M		
Βάση									θ	
	0	30	1	1	1	1	0	0	0	30
	-M	60	2	1	3	0	-1	1	0	20
	-M	20	1	-1	2	0	0	0	1	10
	Z	-80M	-2+3M	3	4+5M	0	-M	0	0	



Λύση παραδείγματος 1 - II

❖ Ο τελικός πίνακας Simplex είναι ο εξής:

		-2	3	4	0	0	-M	-M	
Βάση									θ
	0	10/3	1/3	0	0	5/3	1		
	3	40/3	1/3	1	0	2/3	0		
	4	50/3	2/3	0	1	1/3	0		
	Z	320/3							



Παράδειγμα 2

- Να λυθεί το παρακάτω ΠΓΠ:

$$\min_{x_1, x_2, x_3, x_4} Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 30$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- ❖ Είναι σε πρότυπη μορφή;



Λύση παραδείγματος 2 - I

❖ Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι ο εξής:

			2	-3	1	2	-M	-M	
Βάση									θ
	2	8	1	2	1	2	0	0	8
	-M	6	0	1	1	1	1	0	6
	-M	3	0	0	2	-3	0	1	3/2
	Z	16-9M	0	-7+M	-1+3M	-2+2M	0	0	



Λύση παραδείγματος 2 - II

❖ Ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι ο εξής:

		2	-3	1	2	-M	-M		
Βάση								θ	
	2	13/2	1	2	0	7/2	0	0	13/7
	-M	9/2	0	1	0	5/2	1	0	
	1	3/2	0	0	1	-3/2	0	1	-
	Z	29/2-9M/2	0	-7+M	0	-7/2+5M/2	0	0	



Λύση παραδείγματος 2 - III

❖ Ο τελικός πίνακας Simplex είναι ο εξής:

		2	-3	1	2	-M	-M	
Βάση								θ
	2	1/5	1	3/5	0	1	0	
	2	9/5	0	2/5	0	0	1	
	1	21/5	0	3/5	1	0	0	
	Z	41/5	0	-28/5	0			



1. Θεωρητική προσέγγιση μεθόδου M

- Όπως είδαμε η μέθοδος M επιτρέπει την εμφάνιση στην αντικειμενική συνάρτηση ενός ΠΓΠ ενός συντελεστή M ο οποίος αφορά σε έναν αυθαίρετα πολύ μεγάλο αριθμό.
- Εάν τώρα θεωρήσουμε το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών ως $a = (x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$ και \mathbf{A}^* τον επαυξημένο πίνακα που θα προκύψει το ΠΓΠ μπορεί να παρουσιαστεί ως:

$$\max Z = \mathbf{c}' \mathbf{x} - \mathbf{M}' \mathbf{a}$$

$$\mathbf{A}^* \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}$$



2. Θεωρητική προσέγγιση μεθόδου M

- Εάν x μια εφικτή λύση του αρχικού ΠΓΠ τότε η $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ θα είναι εφικτή λύση του νέου ΠΓΠ.
- Θα είναι καλύτερη από κάθε άλλη εφικτή λύση που έχει μια τεχνητή μεταβλητή με θετική τιμή.
- Άρα η εφικτή λύση του ΠΓΠ θα έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με το μηδέν με την μορφή $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$



Μέθοδος των δύο φάσεων - I

- Μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου M ο μη καθορισμός του πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το M, όταν χρησιμοποιούμε ηλεκτρονικό υπολογιστή.
- Επιλεγούμε το M αυθαίρετα μεγάλο το οποίο όμως μπορεί να προκαλέσει προβλήματα ακρίβειας στην υπολογιστική μηχανή (σφάλματα στρογγυλοποίησης).
- Τα προβλήματα αυτά μπορούμε να τα αποφύγουμε με την μέθοδο των 2 φάσεων.



Μέθοδος των δύο φάσεων - II

- Στην πρώτη φάση, εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές που χρειάζονται ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας.
 - Λύνουμε το βοηθητικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης (με τις τεχνητές μεταβλητές) το οποίο θέλουμε να έχει άριστη λύση μηδέν, δηλαδή, όλες οι τεχνητές να είναι μηδέν.
 - Το σύνολο των άλλων μεταβλητών σε αυτή την περίπτωση αποτελούν βασική εφικτή λύση για το αρχικό πρόβλημα.
 - Αν το βοηθητικό πρόβλημα έχει άριστη λύση θετική, τότε το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση.
- Στην δεύτερη φάση, λύνουμε το αρχικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας σαν αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος την άριστη λύση της 1^{ης} φάσης.



Μέθοδος των δύο φάσεων - III

- Εάν τώρα θεωρήσουμε το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών ως $a = (x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$ και \mathbf{A}^* τον επαυξημένο πίνακα που θα προκύψει το ΠΓΠ ξεκινάμε λύνοντας το:

$$z_1 = \mathbf{1}' \mathbf{a}$$

$$\mathbf{A}^* \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}$$

- Στην δεύτερη φάση, λύνουμε το αρχικό ΠΓΠ χρησιμοποιώντας σαν αρχική λύση την άριστη λύση της προηγούμενης φάσης.



Μέθοδος των δύο φάσεων - IV

Να λυθεί το παράδειγμα 2 με βάση την μέθοδο των δύο φάσεων.
Λύνουμε λοιπόν το ΠΓΠ:

$$z_1 = \min(x_5 + x_6) = -\max(-x_5 - x_6)$$

κάτω από τις νέες συνθήκες και στην δεύτερη φάση το αρχικό μας πρόβλημα



Μέθοδος των δύο φάσεων – Λύση προβλήματος - I

- Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι:

			0	0	0	0	-1	-1	
Βάση									θ
	0	8	1	2	1	2	0	0	8
	-1	6	0	1	1	1	1	0	6
	-1	3	0	0	2	-3	0	1	3/2
	Z	9	0	1	3	-2	0	0	



Μέθοδος των δύο φάσεων – Λύση προβλήματος - II

- Ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι:

			0	0	0	0	-1	-1	
Βάση									θ
	0	13/2	1	2	0	7/2	0		13/7
	-1	9/2	0	1	0	5/2	1		9/5
	0	3/2	0	0	1	-3/2	0		-
	Z	9/2	0	1	0	5/2	0		



Μέθοδος των δύο φάσεων – Λύση προβλήματος - III

- Ο τρίτος πίνακας Simplex είναι:

			0	0	0	0	-1	-1	
Βάση									θ
	0	1/5	1	3/5	0	0	0		13/7
	0	9/5	0	2/5	0	1	1		9/5
	0	21/5	0	3/5	1	0	0		-
	Z	0	0	0	0	0	0		

- Η λύση είναι

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 21/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$



Μέθοδος των δύο φάσεων – Λύση προβλήματος - IV

- Ο τέταρτος πίνακας Simplex είναι:

			2	-3	1	2	-M	-M	
Βάση									θ
	2	1/5	1	3/5	0	0	0		
	2	9/5	0	2/5	0	1	1		
	1	21/5	0	3/5	1	0	0		-
	Z	41/5	0	-28/5	0	0	0		



Παράδειγμα 3

- Να λυθεί το παρακάτω ΠΓΠ:

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Y = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 304$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Σημείωση

- Το αρχείο “[Μέθοδος_M_αναλυτικό_παράδειγμα.pdf](#)” αναπτύσσει αναλυτικά ένα παράδειγμα υπολογισμού της βέλτιστης λύσης χρησιμοποιώντας την Μέθοδο M και προτείνεται να μελετηθεί συμπληρωματικά των διαφανειών της ενότητας αυτής.



Τέλος 6^{ης} Ενότητας

Η Μέθοδος Μ και η μέθοδος των δύο φάσεων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης, 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Η Μέθοδος M και η μέθοδος των δύο φάσεων». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: [σύνδεσμο μαθήματος](#).



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

