Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 4η: Η Μέθοδος Simplex – Θεωρητική Προσέγγιση

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να εισάγει τον ενδιαφερόμενο στην φιλοσοφία της μεθόδου Simplex.
- ✓ Να διαμορφώσει το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο (π.χ. θεωρήματα, ιδιότητες των λύσεων) προκειμένου να κατανοήσει ο ενδιαφερόμενος τον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου.

Περιεχόμενα ενότητας

- Τυπική μορφή ενός ΠΓΠ και μαθηματική απεικόνιση.
- Λύσεις και ιδιότητες λύσεων ενός ΠΓΠ.
- Κριτήρια βελτιστότητας και εφικτότητας.
- Θεωρήματα και θεωρητική προσέγγιση της εύρεσης της βέλτιστης κορυφής μέσω του αλγορίθμου της μεθόδου Simplex.

Ενότητα $4^{η}$

Η Μέθοδος Simplex – Θεωρητική Προσέγγιση

Τυπική μορφή ΠΓΠ - Ι

- <u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>

Ένα ΠΓΠ θα είναι σε τυπική μορφή όταν:

1. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
2. Όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς τους όρους
3. Όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές

Τυπική μορφή ΠΓΠ - ΙΙ

❖ Ελαχιστοποίηση:

Όταν ζητείται ο προσδιορισμός του ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ θέτουμε $g(x) = -f(x)$ και μεγιστοποιούμε την συνάρτηση $g(x)$ (δηλαδή $\min Z = -\max W$)

❖ Αρνητικοί σταθεροί οροί :

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1).

Τυπική μορφή ΠΓΠ - ΙΙΙ

- Ανισώσεις στους περιορισμούς:

Εισάγουμε περιθώριες μεταβλητές ή μεταβλητές απόκλισης που λέγονται slack variables. Όταν ο περιορισμός είναι της μορφής $"\leq"$ τότε προστίθεται μια μεταβλητή (χαλαρή) ενώ στην αντίθετη περίπτωση ($"\geq"$) αφαιρείται μια μεταβλητή (πλεονάζουσα).

- Περιορισμός προσήμου:

Όταν μια μεταβλητή x_j είναι αρνητική θέτουμε $x_j = -x_j^{'}$ ενώ όταν δεν υπόκειται σε κάποιο περιορισμό θέτουμε $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}, x_j^{'} x_j^{''} \geq 0$.

Ενώ ισχύει πως $x_j^{'} = \max\left\{0, x_j\right\}, x_j^{''} = \min\left\{0, x_j\right\}$

Μαθηματική Απεικόνιση - I

❖ Η κανονική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να δοθεί με την ακόλουθη μορφή:

$$\max_{x_1, x_2, \ldots x_n} Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$s.t.$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{1j}x_j + & \ldots & +a_{1n}x_n + & \ldots & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{2j}x_j + & \ldots & +a_{2n}x_n + & \ldots & = b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & = \ldots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{mj}x_j & \ldots & +a_{mn}x_n + & \ldots & = b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Μαθηματική Απεικόνιση - II

❖ Ωστόσο, με την εισαγωγή περιθωρίων μεταβλητών γίνεται:

$$\max_{x_1, x_2, \ldots x_n} Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$s.t.$$

$$\begin{array}{cccccccccl}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{1j}x_j + & \ldots & +a_{1n}x_n + & \ldots & +a_{1n+m}x_{n+m} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{2j}x_j + & \ldots & +a_{2n}x_n + & \ldots & +a_{2n+m}x_{n+m} & = b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{mj}x_j & \ldots & +a_{mn}x_n + & \ldots & +a_{m,n+m}x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Παράδειγμα

- Να βρεθεί η τυπική μορφή του παρακάτω ΠΓΠ:

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$s.t.$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -5$$

$$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \in \Re, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

Λύσεις ΠΓΠ - Ι

- Λύση ενός ΠΓΠ καλείται κάθε διάνυσμα που επαληθεύει την σχέση $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

- Εφικτή (δυνατή) λύση καλείται κάθε λύση που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$
  $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$

- Βάση καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα **A**, ο οποίος αποτελείται από *m* γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του **A**.

Λύσεις ΠΓΠ - ΙΙ

- Βασική εφικτή (δυνατή) λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων ως προς μια βάση, καλείται μία δυνατή λύση η οποία έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές θετικές κι όλες τις μη βασικές μηδέν (όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές).

- Η βασική λύση θα έχει την μορφή:

$$x=\left(0,\ldots,x_{i1},0,\ldots,x_{i2},0,\ldots x_{im},0,\ldots 0\right)$$

Λύσεις ΠΓΠ - ΙΙΙ

- Εκφυλισμένη βασική εφικτή (δυνατή) λύση καλείται μια βασική εφικτή λύση με μια τουλάχιστον από τις βασικές της μεταβλητές ίση με μηδέν.

- Αρίστη λύση καλείται αυτή που βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

Λύσεις ΠΓΠ - IV

Βάση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & . & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές

Μη βασικές μεταβλητές

Ιδιότητες λύσεων - Ι

- Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος.

- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ είναι κυρτό κλειστό σύνολο.

- Κάθε βασική εφικτή λύση ενός ΠΓΠ είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

Ιδιότητες λύσεων - ΙΙ

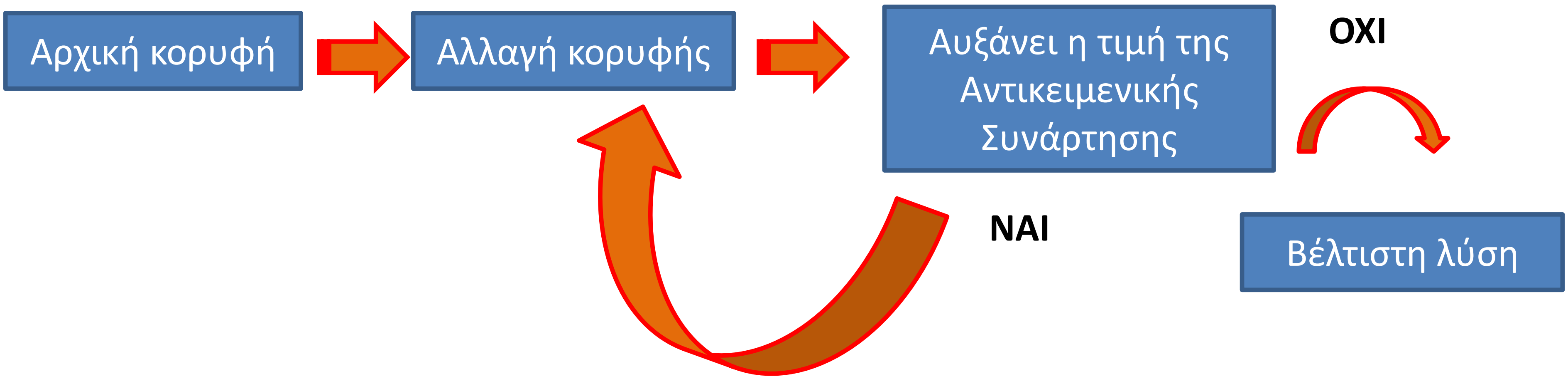
- Αν υπάρχει μια εφικτή λύση σ’ ένα ΠΓΠ, τότε υπάρχει και μια βασική εφικτή λύση αυτού.

- Αν υπάρχει μια βέλτιστη εφικτή λύση σε ένα ΠΓΠ, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σ’ ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική εφικτή λύση.

- Αν υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη εφικτή λύση, που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις.

Φιλοσοφία της Μεθόδου Simplex

- Το παρακάτω διάγραμμα περιγράφει παραστατικά την φιλοσοφία αλλαγής κορυφής που ακολουθείται από τον αλγόριθμο Simplex:



Παράδειγμα - Ι

- Να βρεθούν οι βασικές λύσεις του παρακάτω ΠΓΠ:

$$\max_{x_1, x_2, x_3, x_4} Z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4$$

$$s.t.$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

$$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Παράδειγμα - II

- Το ΠΓΠ είναι σε τυπική μορφή. Θέτουμε 2 μεταβλητές ίσες με 0 και λύνουμε ως προς τις υπόλοιπες:

	Βασικές	Μη βασικές	Βασική λύση
1	x_3, x_4	x_3, x_4	(0,0,1/2,9/2)
2	x_2, x_4	x_1, x_3	(0,1,0,6)
3	x_2, x_3	x_1, x_4	(0,-3,2,0)
4	x_1, x_4	x_2, x_3	(1/2,0,0,9/2)
5	x_1, x_3	x_2, x_4	-
6	x_1, x_2	x_3, x_4	(2,-3,0,0)

Μια δεύτερη λύση - Ι

- Πριν προχωρήσουμε σε μια αναλυτική λύση μέσω της μεθόδου Simplex ας προσεγγίσουμε το ΠΓΠ με βάση τους πίνακες:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n+m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & \dots & a_{m,n+m} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Μια δεύτερη λύση - II

- Να λυθεί το παρακάτω ΠΓΠ:

$$\max_{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6} Z = 25x_1 + 20x_2 + 16x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$s.t.$$

$$x_1 + x_4 = 7$$

$$1.5x_2 + x_2 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + x_6 \leq 6$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, .., 6$$

Μια δεύτερη λύση - III

- ✓ Ο πίνακας **A** δίνεται ως εξής:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}^{*}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 1\\ 2 & 1 & 0.5\end{bmatrix}$$

- Με την ορίζουσα να είναι $\det\left(\mathbf{A}^{*}\right)=-0.25$. Ο αντίστροφος του **A*** δίνεται ως εξής:

$$\mathbf{A}^{-1*}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -8 & -2 & 4\\ 12 & 4 & -6\end{bmatrix}$$

- ✓ Άρα οι λύσεις είναι $\mathbf{x}_B=\mathbf{A}^{-1*}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}7\\ 24\\ 24\end{bmatrix}, z=\mathbf{c}_B^{'}\mathbf{x}_B=\begin{bmatrix}25 & 16 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 24\\ 24\end{bmatrix}=1039$

Βελτιστότητα - Ι

- Ο Dantzig (1963) επινόησε την βελτίωση της λύσης σε ένα ΠΓΠ βγάζοντας μια στήλη από τις βασικές μεταβλητές $x^*_{N,j}$ και αντικαθιστώντας την με μία από τις μη βασικές $x^*_{B,j}$.

- Απόδειξε επίσης την πρόταση κατά την όποια εάν ένα μη βασικό διάνυσμα αντικαταστήσει ένα βασικό διάνυσμα στην βάση **A** τότε το νέο σύνολο διανυσμάτων αποτελεί επίσης βάση.

Βελτιστότητα - ΙΙ

- Ορίζουμε την εξής ποσότητα: $c_j^* = z_j - c_j = c_B^{'} \boldsymbol{A}^{-1} x_{N,j}^* - c_j$

που εκφράζει το πόσο αυξάνει η αντικειμενική συνάρτηση εάν εισέλθει στην βάση η αντίστοιχη μεταβλητή $x_{N,j}^*$.

- Με βάση λοιπόν τα παραπάνω θα πρέπει να αναζητήσουμε μεταβλητής εκτός βάσης για την οποία η παραπάνω ποσότητα θα πρέπει να είναι αρνητική.

Εφικτότητα

- Η εφικτότητα συνδέεται με την νέα λύση που ικανοποιεί την σχέση $x \geq 0$

- Το κριτήριο $\tau^k = \min\left(x_i^k / u_{ij}^k , u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ x_i^k / u_{rj}^k , u_{rj}^k > 0 \right\}$ καλείται κριτήριο εφικτότητας και προσδιορίζει την τιμή της η οποία θα μηδενίζει την βασική μεταβλητή και θα δίνει ενδεχομένως μια μη μηδενική τιμή στην μη βασική μεταβλητή.

Θεωρήματα

1. Ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων σε ένα ΠΓΠ είναι πεπερασμένος $\binom{n}{m}$.

2. Το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι κυρτό. Ένα σύνολο ***C*** καλείται κυρτό εάν $\forall\, x_1, x_2 \in \boldsymbol{C}\ \exists\, x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \boldsymbol{C}, \lambda \in [0,1]$

3. Κάθε βασική δυνατή λύση είναι μια κορυφή του υπερ-πολύεδρου και αντίστροφα.

4. Εάν υπάρχει μια δυνατή λύση υπάρχει και μια βασική δυνατή λύση.

Θεωρήματα (συνέχεια)

5. Εάν έχουμε μια βέλτιστη εφικτή λύση τότε η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την βέλτιστη τιμή της σε ένα ακραίο σημείο του συνόλου των εφικτών λύσεων.

6. Εάν ένα ΠΓΠ έχει ένα μη κενό σύνολο εφικτών λύσεων τότε το σύνολο περιέχει τουλάχιστον μια βασική λύση.

7. Εάν σε ένα ΠΓΠ υπάρχει ένα μη κενό σύνολο λύσεων το οποίο είναι και φραγμένο τότε έχει άριστη λύση.

Θεωρητική Προσέγγισή: εύρεση *k*-κορυφής - Ι

- ✓ Ξεκινούμε από μια κορυφή και μεταβαίνουμε σε επόμενες.
- ✓ Έπειτα από *k*-επαναλήψεις θα έχουμε υπολογίσει τις συντεταγμένες της x^k κορυφής στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει τιμή $\tilde{z}^k = (\tilde{c}_k)^t x^k$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \cdots \\ x_m^k \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow a_i = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_m^k, a_{m+1}^k, \dots, a_j^k, \dots a_{n+m}^k) \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^k a_i^k = b^k$$

Θεωρητική Προσέγγισή: εύρεση *k*-κορυφής - ΙΙ

- Κάθε βασική λύση πρέπει να περιλαμβάνει *m* βασικές μεταβλητές και συνεπώς μια νέα βασική λύση μπορεί να κατασκευασθεί θέτοντας στην βασική εφικτή λύση μιας από τις *m* βασικές μεταβλητές ίση με το μηδέν και αντικαθιστώντας την με κάποια από τις μη βασικές μεταβλητές.
- Προφανώς θα πρέπει να απαιτήσουμε η προκύπτουσα βασική λύση να είναι εφικτή αλλά και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με την νέα λύση να είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα.

Θεωρητική Προσέγγιση: εύρεση *k*-κορυφής - III

Ας εναλλάξουμε τώρα την θέση μιας βασικής μεταβλητής με μια μη βασική εισάγοντας στην βάση την μεταβλητή:

$$x_j^k \rightarrow a_j^k \rightarrow (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k) \; \gamma.\alpha \rightarrow a_j^k = \sum_{i=1}^{m} a_i^k u_{ij}^k$$

Εάν $$u_j^k = \begin{bmatrix} u_{1j}^k \\ \ldots \\ u_{ij}^k \\ \ldots \\ u_{mj}^k \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_j^k = \sum_{i=1}^{m} a_i^k u_{ij}^k = \left[a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k \right] \begin{bmatrix} u_{1j}^k \\ \ldots \\ u_{ij}^k \\ \ldots \\ u_{mj}^k \end{bmatrix} = B^k u_j^k$$

Θεωρητική Προσέγγισή: εύρεση *k*-κορυφής - IV

- Επιλέγουμε $\tau^k B^k u_j^k = \tau^k a_j^k$ και αφαιρώντας έχουμε:

$$B^k\left(x_B^k - \tau^k u_j^k\right) + \tau^k a_j^k = b^k \Leftrightarrow$$

$$\left(x_1^k - \tau^k u_{1j}^k\right)a_1^k + \left(x_2^k - \tau^k u_{2j}^k\right)a_2^k + \ldots.. + \left(x_m^k - \tau^k u_{mj}^k\right)a_m^k + \tau^k a_j^k = b^k$$

Θεωρητική Προσέγγιση: εύρεση *k*-κορυφής - V

- Η λύση αυτή είναι μη βασική καθώς περιλαμβάνει *m+1* μεταβλητές δηλαδή τις τρέχουσες *m* και την εισερχόμενη μεταβλητή.
- Θα πρέπει να βρούμε τ^k τέτοιο ώστε μια από τις τρέχουσες βασικές μεταβλητές να λαμβάνει μηδενική τιμή στην νέα λύση.
- Επιπλέον για να είναι και εφικτή η συγκεκριμένη λύση θα πρέπει $x_m^k - \tau^k u_{mj}^k \geq 0.$

$$\tau^k = \min\left({x_i^k}/{u_{ij}^k}, u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ {x_i^k}/{u_{rj}^k}, u_{rj}^k > 0 \right\} \longleftarrow$$ **Κριτήριο Εφικτότητας**

Θεωρητική Προσέγγιση: εύρεση *k*-κορυφής - VI

- Η βέλτιστη (άριστη) λύση του ΠΓΠ δίνεται ως εξής:

$$z^k = (\boldsymbol{c})^t x^k \Leftrightarrow \left[\left(c_B^K\right)^t \middle| \left(c_E^K\right)^t \right] \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \left(c_B^K\right)^t x_B^k = c_B^K \left(\boldsymbol{B}_k\right)^{-1} b^k \longrightarrow a_{ij}$$

$$\downarrow$$

$$z^{k+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i^k \left(x_i^k + \tau^k u_{ij}^k \right) + c_j^k \tau^k = \sum_{i=1}^{m} c_i^k x_i^k + \sum_{i=1}^{m} \tau^k c_i^k x_i^k + b^k c_j^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^k - \tau^k \left[\left(c_B^k\right)^t u_{ij}^k - c_j^k \right] \Leftrightarrow$$

$$z^{k+1} = z^k - \tau^k \left[s_j^k - c_j^k \right] \longleftarrow$$ **Κριτήριο Αριστότητας**

Τέλος 4ης Ενότητας

Η Μέθοδος Simplex – Θεωρητική Προσέγγιση

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης, 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Η Μέθοδος Simplex – Θεωρητική Προσέγγιση». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.