Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 3η: Γραφική Επίλυση και Ανάλυση Ευαισθησίας

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να παρουσιάσει την Γραφική επίλυση ΠΓΠ για την περίπτωση των δύο μεταβλητών απόφασης.
- ✓ Να γίνει ο υπολογισμός των σκιωδών τιμών μέσω της ανάλυσης ευαισθησίας των περιορισμών.
- ✓ Να παρουσιαστούν γραφικά εναλλακτικές μορφές ΠΓΠ.

Περιεχόμενα ενότητας

- Τι είναι η Γραφική επίλυση ως μέθοδος επίλυσης ΠΓΠ.
- Πρόβλημα μεγιστοποίησης: Αποτύπωση υποδείγματος.
- Ανάλυση ευαισθησίας και σκιώδεις τιμές.
- Πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Αποτύπωση υποδείγματος.
- Ειδικές περιπτώσεις ΠΓΠ.

Ενότητα $3^{η}$

Γραφική Επίλυση και ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών

Γραφική Επίλυση

- Στην περίπτωση που το ΠΓΠ περιέχει μόνο δύο μεταβλητές τότε εκτός από την αναλυτική μέθοδο, η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης κατοπινών ενοτήτων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την γραφική μέθοδο ώστε να απεικονίσουμε το πρόβλημα στο καρτεσιανό επίπεδο.

- Ως εκ τούτου, η γραφική επίλυση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα με δύο μεταβλητές απόφασης καθώς περισσότερες μεταβλητές δεν είναι δυνατόν να παρασταθούν γραφικά.

Βήματα Γραφικής Επίλυσης

1. Αγνοώντας τις ανισότητες του συνόλου των περιορισμών, για κάθε μία εξίσωση λύνουμε ως προς μια συγκεκριμένη μεταβλητή ώστε να φέρουμε όλες τις εξισώσεις στην μορφή $y = a \pm bx$
2. Σχεδιάζουμε τις ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο και για κάθε ευθεία-περιορισμό καθορίζουμε την περιοχή που απεικονίζει λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες (ορίζουμε έτσι την εφικτή περιοχή ή το εφικτό χωρίο).
3. Αφού λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων, προσδιορίζουμε το σημείο τομής που αποτελεί το βέλτιστο σημείο.
4. Αντικαθιστούμε το βέλτιστο σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση και υπολογίζουμε την τιμή της.
5. Φέρνουμε την αντικειμενική συνάρτηση στην μορφή $y = a \pm bx$ και την σχεδιάζουμε μαζί με τις ευθείες των περιορισμών.

Αριθμητικό παράδειγμα

- Μια επιχείρηση που δραστηριοποιείται στα πλαίσια ενός βιομηχανικού κλάδου παράγει 2 προϊόντα, το Α και το Β χρησιμοποιώντας 2 διαφορετικούς τύπους μηχανών, τους I και II. Ο τύπος I είναι διαθέσιμος για 20 ώρες την ημέρα ενώ ο τύπος II για 12 ώρες ημερησίως. Για να παραχθεί μια μονάδα προϊόντος Α απαιτούνται 2 ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου I και 1 ώρα του τύπου II. Για το Β οι ώρες λειτουργίας είναι 4 και 3 αντίστοιχα.
- Η τιμή του προϊόντος Α είναι 40€ ανά μονάδα ενώ του προϊόντος Β 100€ ανά μονάδα.
- Αντικειμενικός σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της ενώ μπορεί να πουλήσει όλη την ποσότητα που παράγει.

➢ Να προσδιορίσετε πόσες μονάδες από κάθε προϊόν πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της παραπάνω επιχείρησης.

Αποτύπωση μαθηματικού υποδείγματος

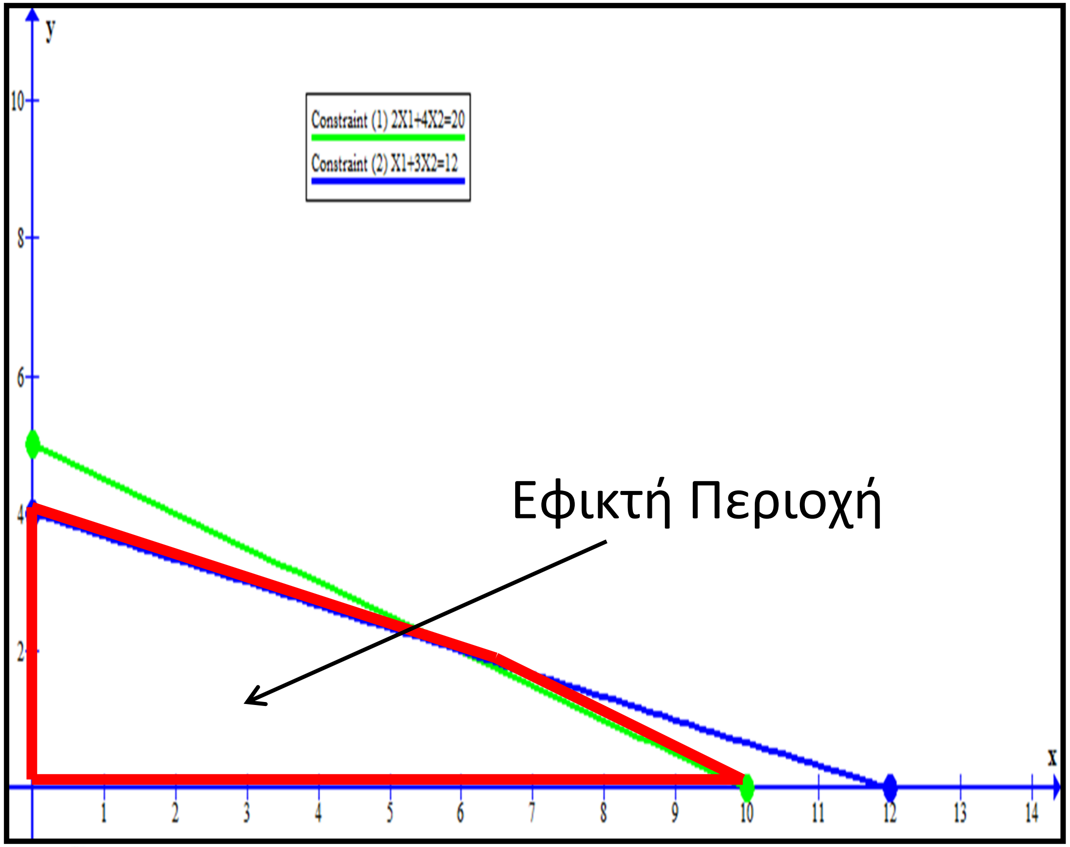
- Αρχικά, θα πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος:
  - x_1 η ποσότητα του προϊόντος A
  - x_2 η ποσότητα του προϊόντος B
- Έπειτα να σχηματίσουμε τους περιορισμούς διαθεσιμότητας των πόρων του προβλήματος μαζί με τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας:

$2x_1 + 4x_2 \leq 20$	**Περιορισμός μηχανής τύπου I**
$x_1 + 3x_2 \leq 12$	**Περιορισμός μηχανής τύπου II**
$x_1, x_2 \geq 0$	**Περιορισμοί μη-αρνητικότητας**

- Τέλος, σχηματίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος μεγιστοποίησης: $\max\limits_{x_1, x_2} \Pi = 40x_1 + 100x_2$

Γραφική απεικόνιση των περιορισμών

Περιορισμοί και εφικτή περιοχή



- Αντιμετωπίζοντας τους περιορισμούς ως ισότητες, τους φέρνουμε στην μορφή $y = a - bx$ και έχουμε:

$$x_2 = 5 - 1/2\, x_1$$

$$x_2 = 4 - 1/3\, x_1$$

- Έπειτα, εισάγοντας τους περιορισμούς στο Graph**,** υπολογίζουμε την εφικτή περιοχή όπως φαίνεται στο διπλανό γράφημα.

Υπολογισμός βέλτιστου σημείου

– Σκοπός είναι να εντοπίσουμε τα σημεία που ικανοποιούν ταυτόχρονα τους περιορισμούς και βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση στην προκειμένη περίπτωση).

– Λύνουμε ταυτόχρονα το σύστημα των περιορισμών και προσδιορίζουμε το βέλτιστο σημείο, δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+4x_2 &= 20 \\ x_1+3x_2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 24-6x_2+4x_2 &= 20 \\ x_1 &= 12-3x_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x_2 &= 4 \\ x_1 &= 12-3x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

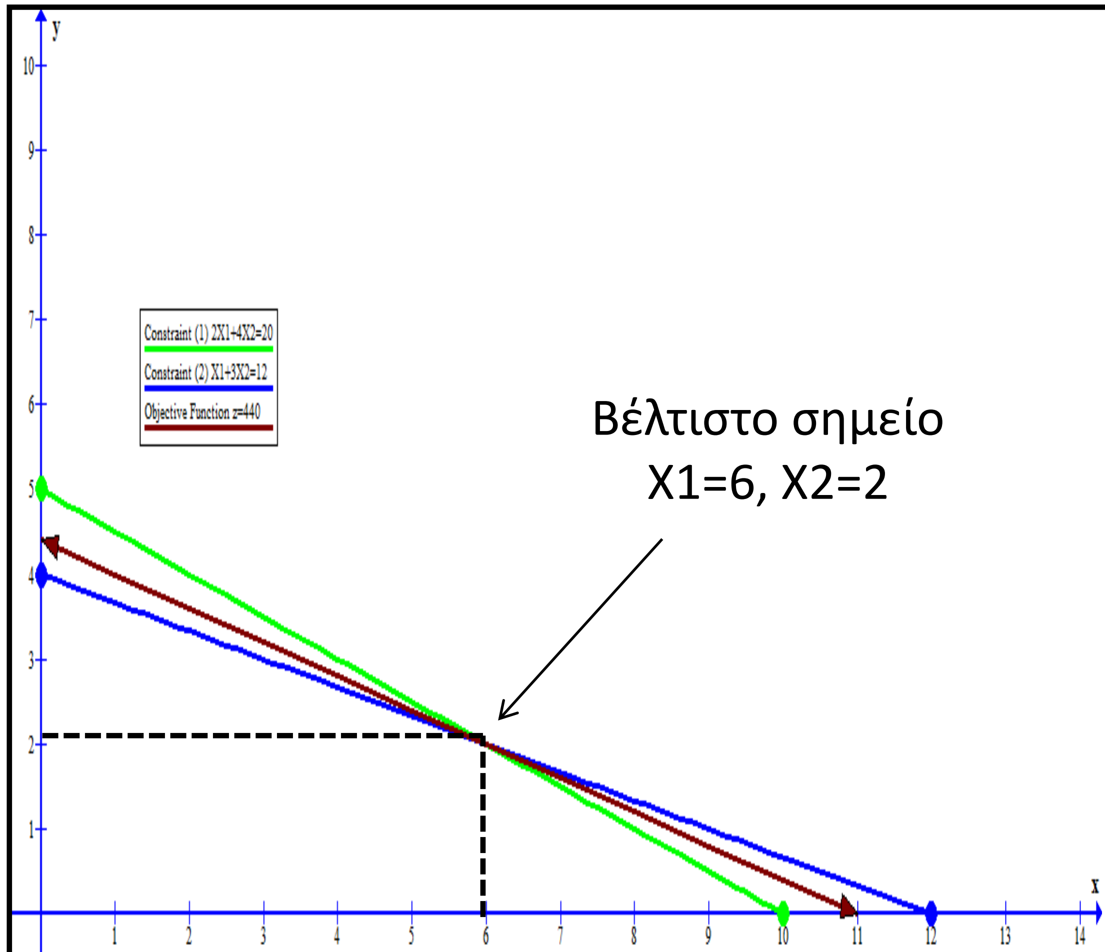
– Αντικαθιστούμε το βέλτιστο σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση και προσδιορίζουμε την μέγιστη τιμή της: $\max\limits_{x_1,x_2} \Pi = 40\cdot 6+100\cdot 2 = 440$

– Φέρνουμε την αντικειμενική συνάρτηση στην μορφή $y=a-bx$, δηλαδή

$x_2 = 440/100-\left(40/100\right)x_1$ και την σχεδιάζουμε στο γράφημα μαζί με τους περιορισμούς.

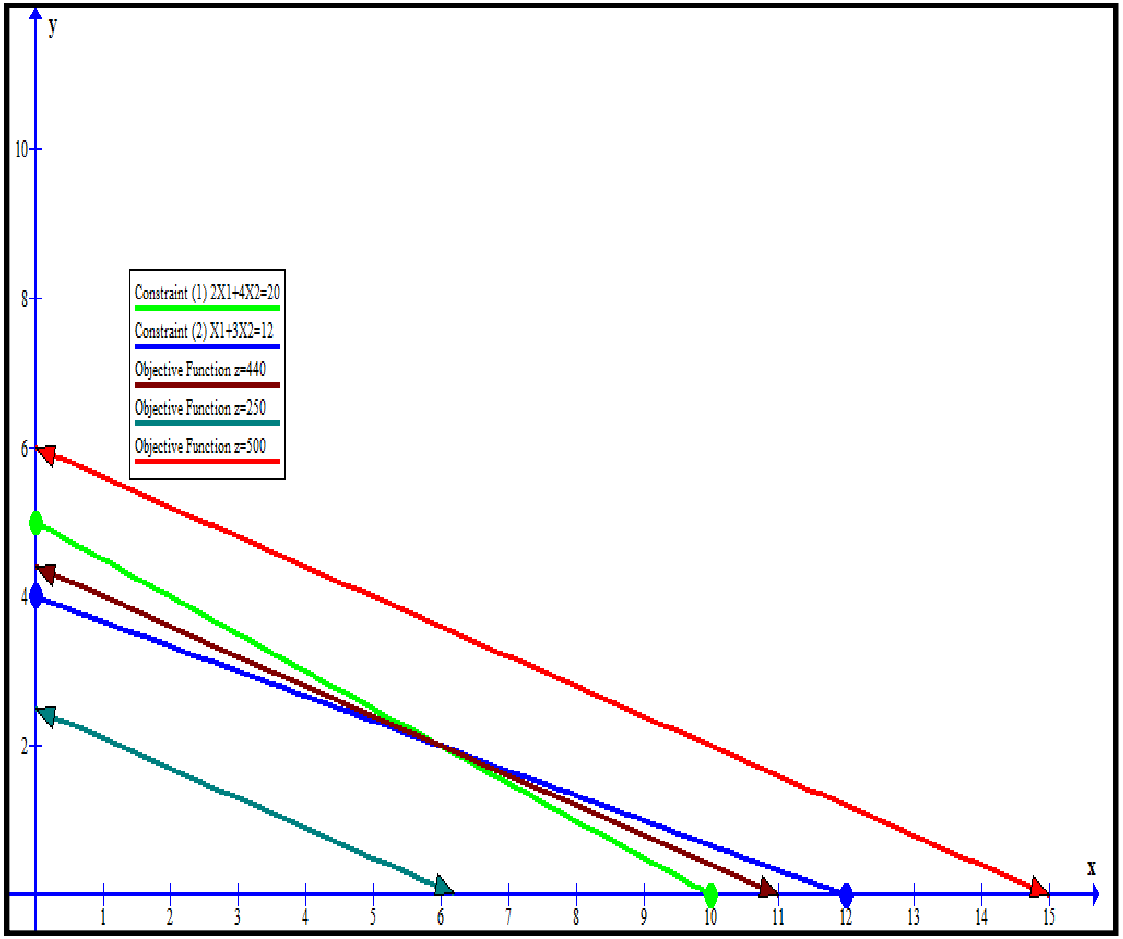
Αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί - Ι

- Παρατηρούμε πως η αντικειμενική συνάρτηση (Α.Σ.) περνάει από το σημείο τομής των περιορισμών (βέλτιστο σημείο).
- Α.Σ. είναι η ευθεία που περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς x_1, x_2 που αντιστοιχούν σε μια σταθερή ποσότητα κέρδους.



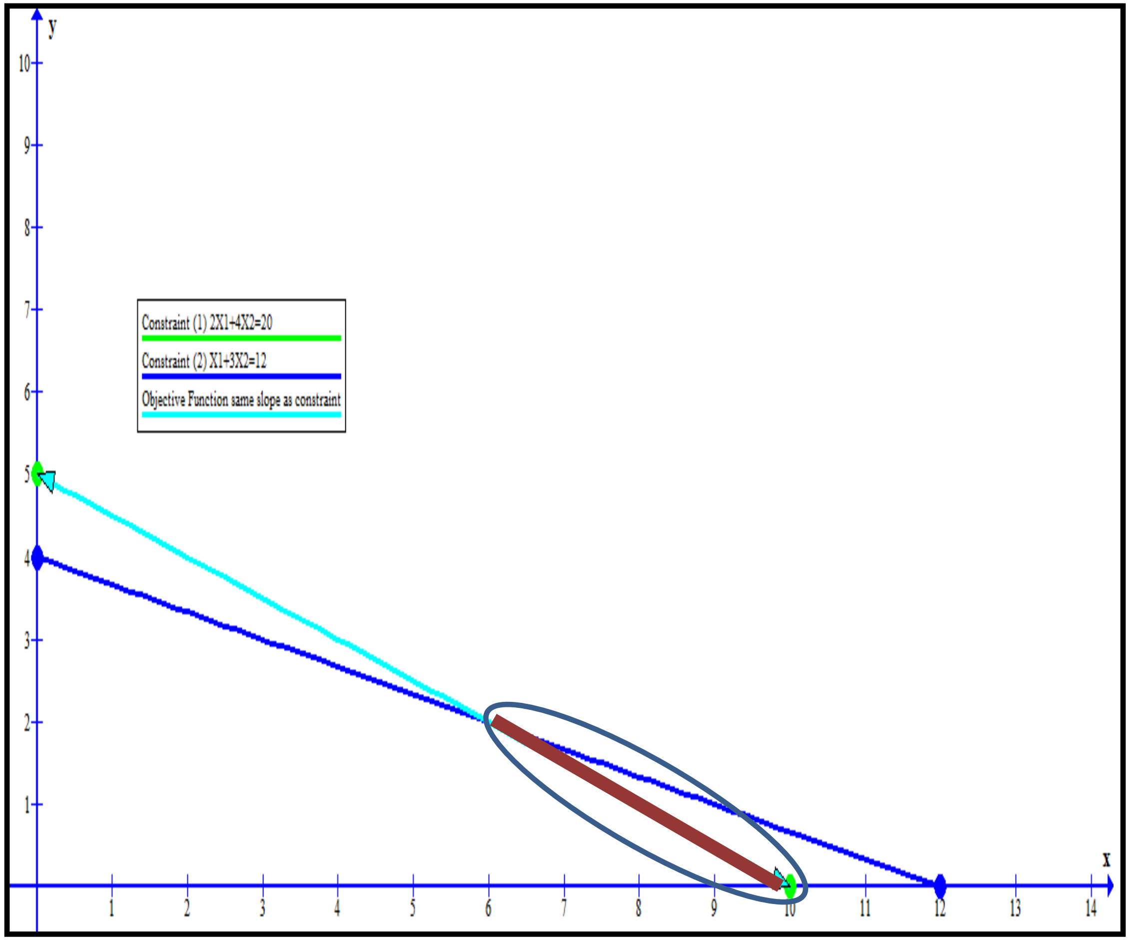
Αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί - ΙΙ

- Παρατηρούμε πως διαφορετικά επίπεδα κέρδους (τιμές) της αντικειμενικής συνάρτησης, **δεδομένου του λόγου των σχετικών τιμών (ίδια κλίση της Α.Σ. ή συντελεστής διεύθυνσης)**, έχουν ως συνέπεια την παράλληλη μετακίνηση της ευθείας της Α.Σ.



Αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί - III

- Παρατηρούμε πως στην περίπτωση που η Α.Σ. έχει ίδια κλίση με κάποιον από τους περιορισμούς τότε επί της καφέ γραμμής βρίσκονται τα εναλλακτικά βέλτιστα για το ΠΓΠ.
- Δηλαδή, έχουμε **άπειρα** εναλλακτικά **βέλτιστα σημεία**!!



Ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών του προβλήματος

Ανάλυση ευαισθησίας και σκιώδεις τιμές

- Είναι απαραίτητη έπειτα από κάθε λύση ΠΓΠ ώστε να διαπιστώσουμε πόσο ευαίσθητη (ή/και αξιόπιστη) είναι η βέλτιστη λύση που προσδιορίσαμε στις τυχόν αλλαγές των παραμέτρων του μαθηματικού υποδείγματος.
- Από την οριακή μεταβολή των διαθέσιμων ποσοτήτων των πόρων του ΠΓΠ (ποσότητες δεξιού μέλους) προκύπτουν οι **Σκιώδεις Τιμές** των περιορισμών που αποτυπώνουν τον αντίκτυπο της οριακής αυτής μεταβολής στην αντικειμενική συνάρτηση.
- Πολύ χρήσιμες ποσότητες για την άσκηση πολιτικής αλλά και για το μάνατζμεντ της επιχείρησης.
- Δεν υπάρχει τρόπος να υπολογιστούν διαφορετικά πέρα από την μεθοδολογία του γραμμικού προγραμματισμού.

Περιπτώσεις

- Στις διαφάνειες που ακολουθούν θα παρουσιαστούν 4 περιπτώσεις μεταβολής των διαθέσιμων ποσοτήτων:

1. Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Ι
2. Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Ι
3. Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου ΙΙ
4. Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου ΙΙ

✓ Μέσω των παραπάνω (οριακών, δηλαδή κατά 1 μονάδα, εδώ ώρα) μεταβολών θα προκύψουν οι σκιώδεις τιμές των περιορισμών.

Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου I - I

- Λύνουμε ταυτόχρονα το νέο σύστημα των περιορισμών και προσδιορίζουμε το νέο βέλτιστο σημείο (αν υπάρχει αλλαγή), δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 21 \\ x_1 + 3x_2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 7.5 \\ x_2 &= 1.5 \end{aligned}$$

- Παρατηρούμε πως έχουμε ένα νέο γωνιακό σημείο που σημαίνει πως η βέλτιστη λύση άλλαξε καθώς και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Παρατηρούμε ότι: $\Delta x_1 = 7.5 - 6 = 1.5$ (αύξηση) και $\Delta x_2 = 1.5 - 2 = -0.5$ (μείωση)
- Το νέο γωνιακό σημείο συνεπάγεται: $40 \cdot (1.5) + 100 \cdot (-0.5) = 10 > 0 \Rightarrow$ Άρα κέρδος
- Η παραπάνω ποσότητα λέγεται σκιώδης τιμή (shadow price) και μας δείχνει την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στην (οριακή) αύξηση του δεύτερου μέλους του **συγκεκριμένου** περιορισμού.

Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου I - II

– Η οικονομική της σημασία είναι η εξής:

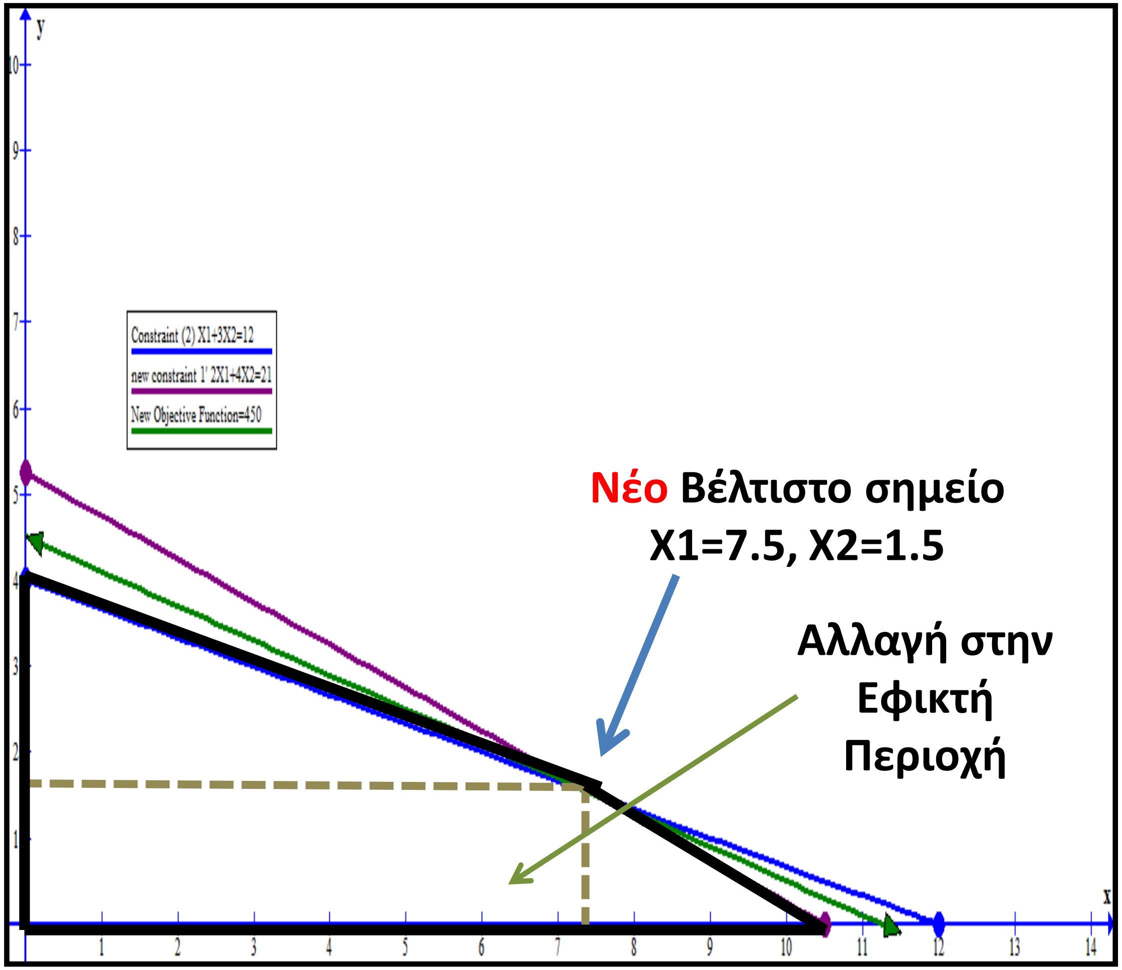
"Αν αυξήσουμε τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου I από 20 σε 21 (δηλαδή οριακά), τότε προκύπτει κέρδος για την επιχείρηση ίσο με 10€ "

– Αυτό επιβεβαιώνεται και αντικαθιστώντας το νέο γωνιακό σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση και υπολογίζοντας την μεταβολή των (μικτών) κερδών:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi = 40\cdot 6+100\cdot 2 = 440 \\ \Pi^{'} = 40\cdot 7.5+100\cdot 1.5 = 450 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 450-440 = 10 > 0 \ (\text{κέρδος})$$

Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου I - III

- Η αύξηση του πρώτου περιορισμού συνοδεύτηκε από αλλαγή του γωνιακού σημείου.
- Αυτό με την σειρά του άλλαξε τόσο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όσο και την εφικτή περιοχή (σε σχέση με την αρχική κατάσταση).
- Οι αλλαγές φαίνονται στο διπλανό γράφημα.



Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Ι - Ι

– Λύνουμε ταυτόχρονα το νέο σύστημα των περιορισμών και προσδιορίζουμε το νέο βέλτιστο σημείο (αν υπάρχει αλλαγή), δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 19 \\ x_1 + 3x_2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4.5 \\ x_2 &= 2.5 \end{aligned}$$

– Παρατηρούμε πως έχουμε ένα νέο γωνιακό σημείο που σημαίνει πως η βέλτιστη λύση άλλαξε καθώς και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

– Παρατηρούμε ότι: $\Delta x_1 = 4.5 - 6 = -1.5$ (μείωση) και $\Delta x_2 = 2.5 - 2 = 0.5$ (αύξηση)

– Το νέο γωνιακό σημείο συνεπάγεται: $40 \cdot (-1.5) + 100 \cdot (0.5) = -10 < 0 \Rightarrow$ Άρα ζημία

– Η παραπάνω ποσότητα λέγεται σκιώδης τιμή (shadow price) και μας δείχνει την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στην (οριακή) μείωση του δεύτερου μέλους του **συγκεκριμένου** περιορισμού.

Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου I - II

– Η οικονομική της σημασία είναι η εξής:

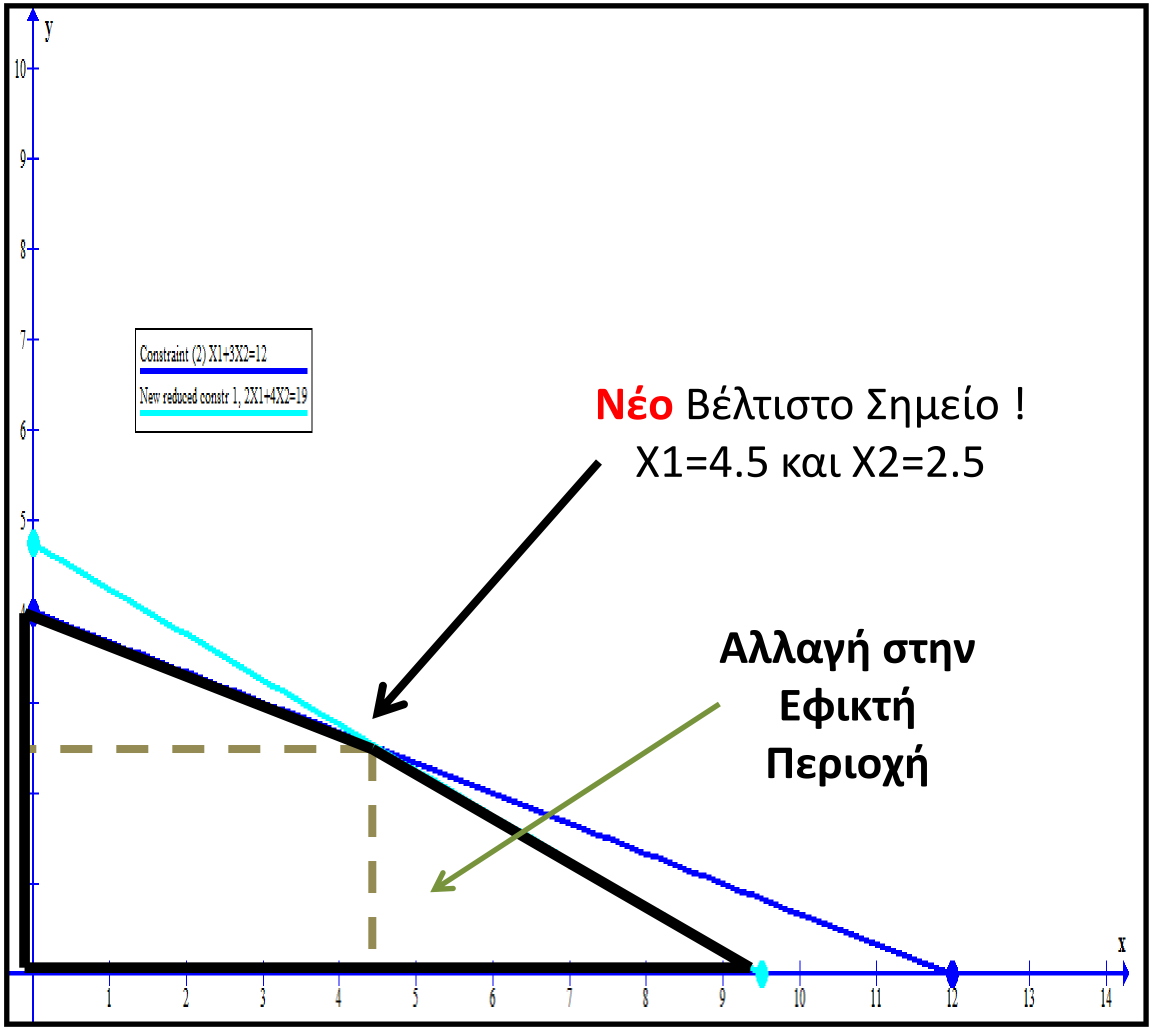
“Αν μειώσουμε τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου I από 20 σε 19 (δηλαδή οριακά), τότε προκύπτει ζημία για την επιχείρηση ίσο με 10€ ”

– Αυτό επιβεβαιώνεται και αντικαθιστώντας το νέο γωνιακό σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση και υπολογίζοντας την μεταβολή των (μικτών) κερδών:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= 40\cdot 6+100\cdot 2=440 \\ \Pi^{'} &= 40\cdot 4.5+100\cdot 2.5=430 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 430-440=-10<0 \ (\text{ζημία})$$

Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου I - III

- Η μείωση του πρώτου περιορισμού συνοδεύτηκε από αλλαγή του γωνιακού σημείου.
- Αυτό με την σειρά του άλλαξε τόσο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όσο και την εφικτή περιοχή (σε σχέση με την αρχική κατάσταση).
- Οι αλλαγές φαίνονται στο διπλανό γράφημα.



Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου ΙΙ - Ι

– Λύνουμε ταυτόχρονα το νέο σύστημα των περιορισμών και προσδιορίζουμε το νέο βέλτιστο σημείο (αν υπάρχει αλλαγή), δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 &= 13 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

– Παρατηρούμε πως έχουμε ένα νέο γωνιακό σημείο που σημαίνει πως η βέλτιστη λύση άλλαξε καθώς και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

– Παρατηρούμε ότι: $\Delta x_1 = 4 - 6 = -2$ (μείωση) και $\Delta x_2 = 3 - 2 = 1$ (αύξηση)

– Το νέο γωνιακό σημείο συνεπάγεται: $40 \cdot (4) + 100 \cdot (3) = 20 > 0 \Rightarrow$ Άρα κέρδος

– Η παραπάνω ποσότητα λέγεται σκιώδης τιμή (shadow price) και μας δείχνει την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στην (οριακή) αύξηση του δεύτερου μέλους του **συγκεκριμένου** περιορισμού.

Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου II - II

– Η οικονομική της σημασία είναι η εξής:

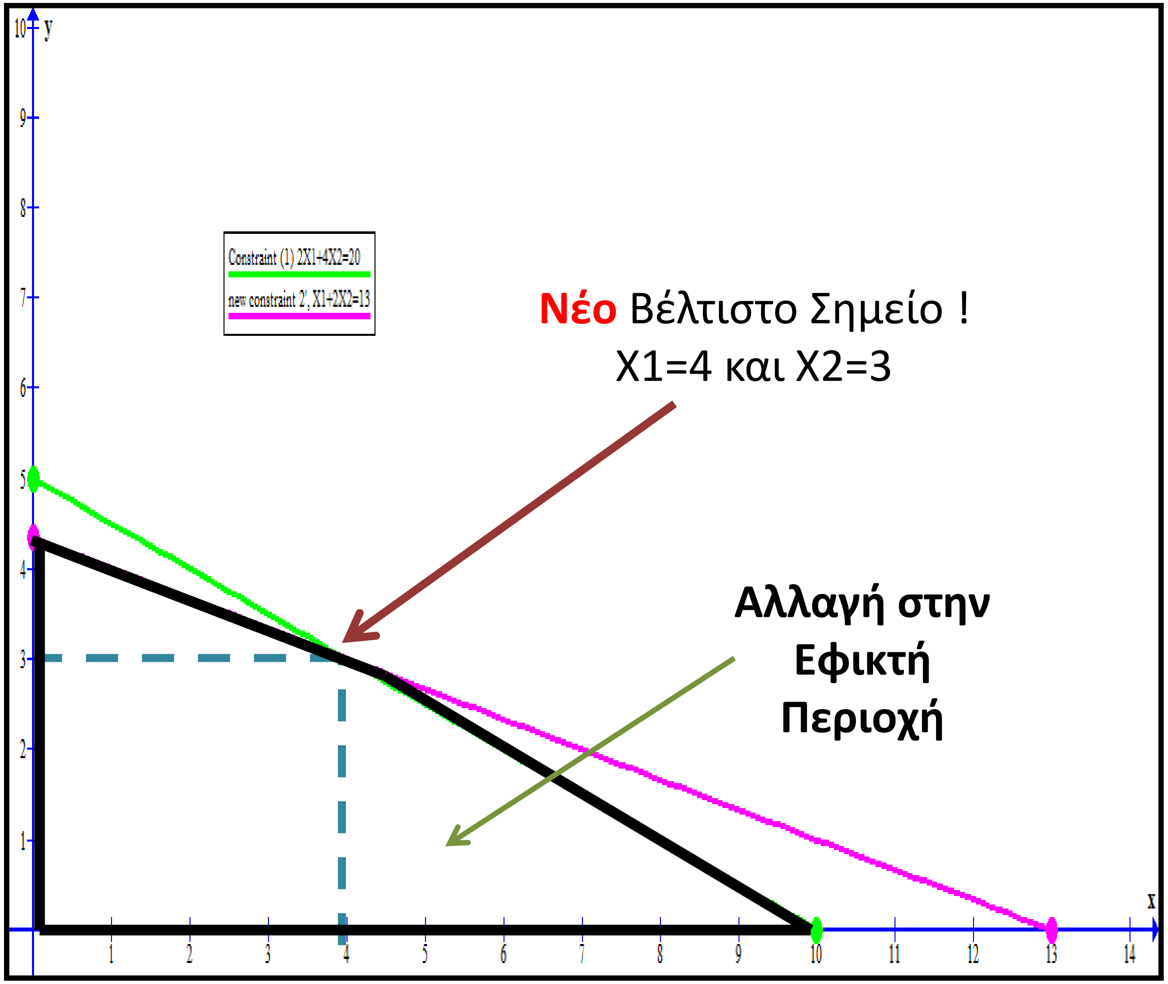
"Αν αυξήσουμε τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου II από 12 σε13 (δηλαδή οριακά), τότε προκύπτει κέρδος για την επιχείρηση ίσο με 20€ "

– Αυτό επιβεβαιώνεται και αντικαθιστώντας το νέο γωνιακό σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση και υπολογίζοντας την μεταβολή των (μικτών) κερδών:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi = 40\cdot 6 + 100\cdot 2 = 440 \\ \Pi^{'} = 40\cdot 4.5 + 100\cdot 3 = 460 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 460 - 440 = 20 > 0 \text{ (κέρδος)}$$

Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου II - III

- Η αύξηση του δεύτερου περιορισμού συνοδεύτηκε από αλλαγή του γωνιακού σημείου.
- Αυτό με την σειρά του άλλαξε τόσο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όσο και την εφικτή περιοχή (σε σχέση με την αρχική κατάσταση).
- Οι αλλαγές φαίνονται στο διπλανό γράφημα.



Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου ΙΙ - Ι

– Λύνουμε ταυτόχρονα το νέο σύστημα των περιορισμών και προσδιορίζουμε το νέο βέλτιστο σημείο (αν υπάρχει αλλαγή), δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 20 \\ x_1 + 3x_2 = 11 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

– Παρατηρούμε πως έχουμε ένα νέο γωνιακό σημείο που σημαίνει πως η βέλτιστη λύση άλλαξε καθώς και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

– Παρατηρούμε ότι: $\Delta x_1 = 8 - 6 = 2$ (αύξηση) και $\Delta x_2 = 1 - 2 = -1$ (μείωση)

– Το νέο γωνιακό σημείο συνεπάγεται: $40 \cdot (2) + 100 \cdot (-1) = -20 < 0 \Rightarrow$ Άρα ζημία

– Η παραπάνω ποσότητα λέγεται **σκιώδης τιμή** (shadow price) και μας δείχνει την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στην (οριακή) μείωση του δεύτερου μέλους του **συγκεκριμένου** περιορισμού.

Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου ΙΙ - ΙΙ

– Η οικονομική της σημασία είναι η εξής:

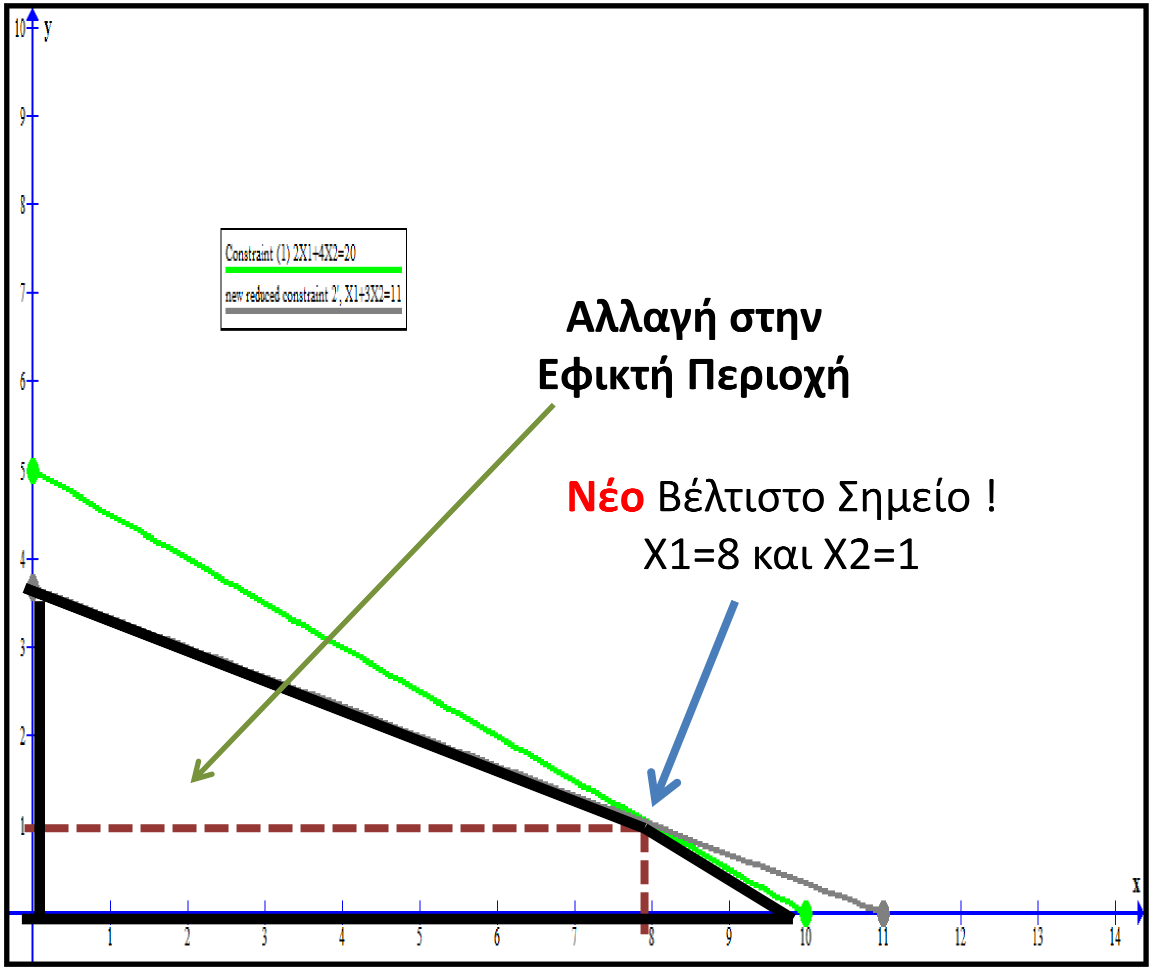
“Αν μειώσουμε τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Ι από 12 σε 11 (δηλαδή οριακά), τότε προκύπτει ζημία για την επιχείρηση ίσο με 20€ ”

– Αυτό επιβεβαιώνεται και αντικαθιστώντας το νέο γωνιακό σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση και υπολογίζοντας την μεταβολή των (μικτών) κερδών:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= 40\cdot 6+100\cdot 2=440 \\ \Pi^{'} &= 40\cdot 8+100\cdot 1=420 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 420-440=-20<0 \text{ (ζημία)}$$

Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου II - III

- Η μείωση του δεύτερου περιορισμού συνοδεύτηκε από αλλαγή του γωνιακού σημείου.
- Αυτό με την σειρά του άλλαξε τόσο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όσο και την εφικτή περιοχή (σε σχέση με την αρχική κατάσταση).
- Οι αλλαγές φαίνονται στο διπλανό γράφημα.



Περιορισμοί διαθεσιμότητας - I

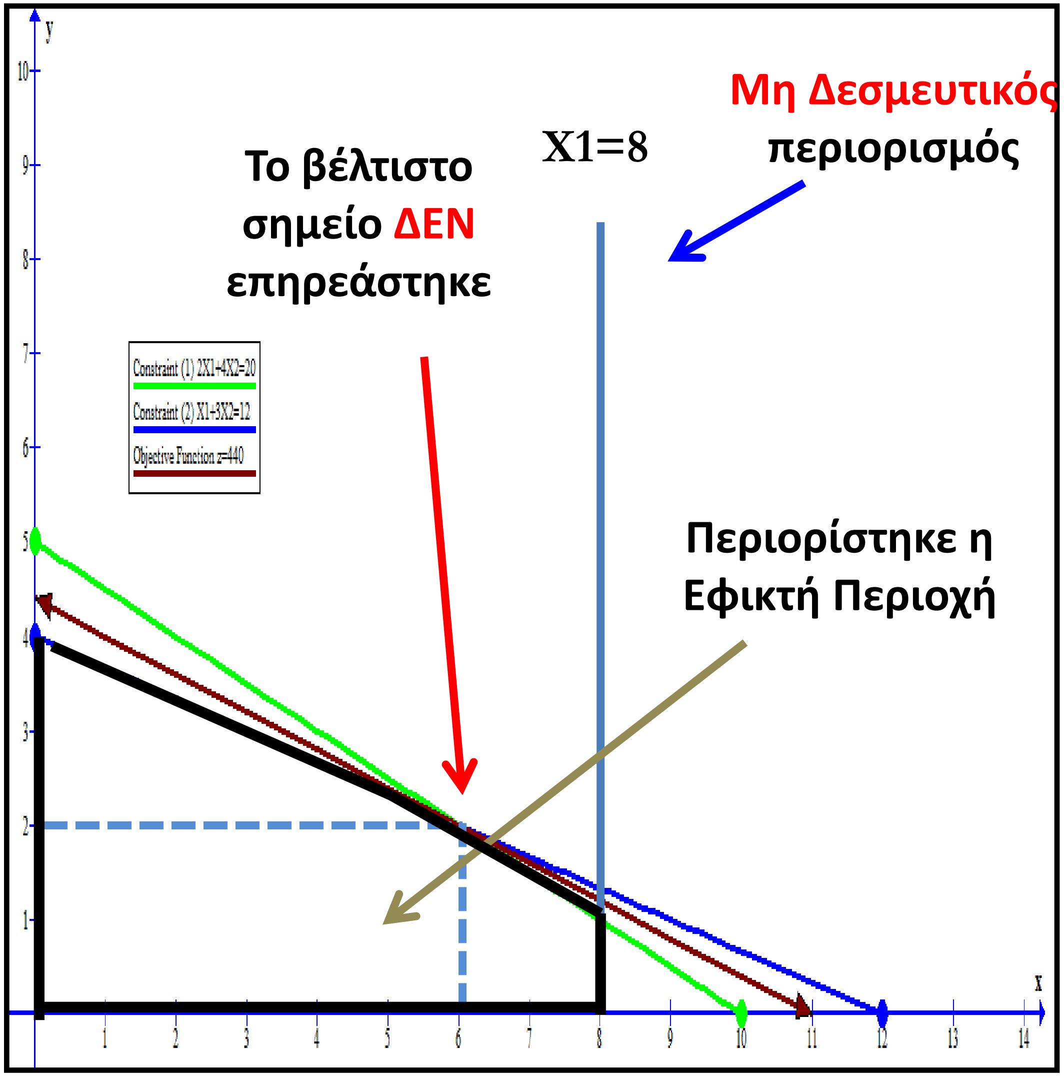
– Ας υποθέσουμε πως η επιχείρηση, έπειτα από ανάλυση της αγοράς, έχει καταλήξει πως η αγορά δεν μπορεί να απορροφήσει παραπάνω από 8 μονάδες του προϊόντος 1.

– Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα διαφοροποιείται ελαφρώς και προστίθεται ένας νέος περιορισμός. Δηλαδή έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 4x_2 \leq 20 \\
&x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
&x_1 \leq 8 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Περιορισμοί διαθεσιμότητας - ΙΙ

- Το γωνιακό σημείο δεν επηρεάζεται.
- Δεν επηρεάζονται η βέλτιστη λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Τέτοιοι περιορισμοί ονομάζονται **Μη-Δεσμευτικοί**.
- Οι αλλαγές φαίνονται στο διπλανό γράφημα.



Παρατηρήσεις για τις σκιώδεις τιμές

- Αναφέρονται στην οριακή μεταβολή του κάθε περιορισμού και πως αυτή επηρεάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Είναι δηλαδή η οριακή χρησιμότητα από την χαλάρωση ή το οριακό κόστος από την ενδυνάμωση ενός περιορισμού.
- Σε εφαρμογές διοίκησης, η σκιώδης τιμή είναι η προθυμία πληρωμής από την πλευρά της επιχείρησης για μια επιπλέον μονάδα ενός περιορισμένου πόρου.
- Σε περίπτωση μεγάλων αλλαγών στα δεύτερα μέλη, δεν είναι βέβαιο πως οι αλλαγές θα είναι ανάλογες με αυτές των σκιωδών τιμών. Η μεταβολή του δεύτερου μέλους κάποιου περιορισμού έχει νόημα για κάποιον πεπερασμένο αριθμό μονάδων, υπάρχει δηλαδή κάποιο όριο όπου μια τέτοια μεταβολή έχει νόημα να γίνει.
- Κάθε σκιώδης τιμή αντιστοιχεί σε μια δυική μεταβλητή.

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

– Ας υποθέσουμε το παρακάτω ΠΓΠ:

$$\min_{x_1, x_2} Z = 24 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2$$

$$s.t.$$

$$120x_1 + 60x_2 \geq 480$$

$$56x_1 + 112x_2 \geq 448$$

$$103x_1 + 120x_2 \geq 720$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

➢ Να λύσετε γραφικά το παραπάνω ΠΓΠ.

Γραφική επίλυση: ελαχιστοποίηση - 1

- Εξαιτίας του περιορισμού μη-αρνητικότητας (τελευταίος περιορισμός του ΠΓΠ) θα εργασθούμε μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (καρτεσιανό επίπεδο) όπως ακριβώς και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης.
- Σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε:

$$x_2 = 8 - 2 \cdot x_1$$

$$x_2 = 4 - \frac{1}{2} \cdot x_1$$

$$x_2 = 6 - \frac{103}{120} \cdot x_1$$

– Οι περιορισμοί φαίνονται στο επόμενο γράφημα.

Γραφική επίλυση: ελαχιστοποίηση - 2

- Εξαιτίας του περιορισμού μη-αρνητικότητας (τελευταίος περιορισμός του ΠΓΠ) θα εργασθούμε μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (καρτεσιανό επίπεδο) όπως ακριβώς και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης.
- Σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε:

$$x_2 = 8 - 2 \cdot x_1$$

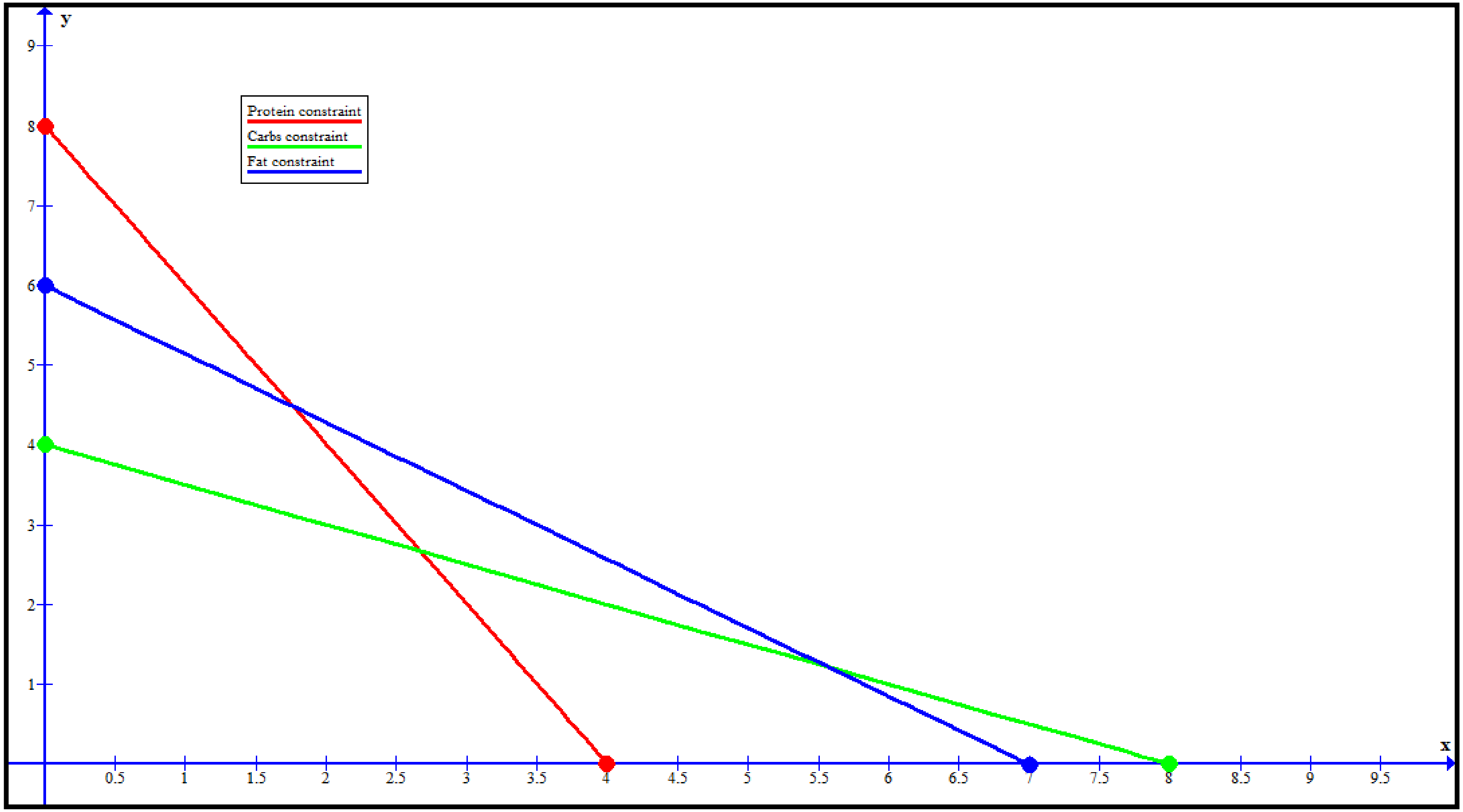
$$x_2 = 4 - \frac{1}{2} \cdot x_1$$

$$x_2 = 6 - \frac{103}{120} \cdot x_1$$

– Οι περιορισμοί φαίνονται στο επόμενο γράφημα.

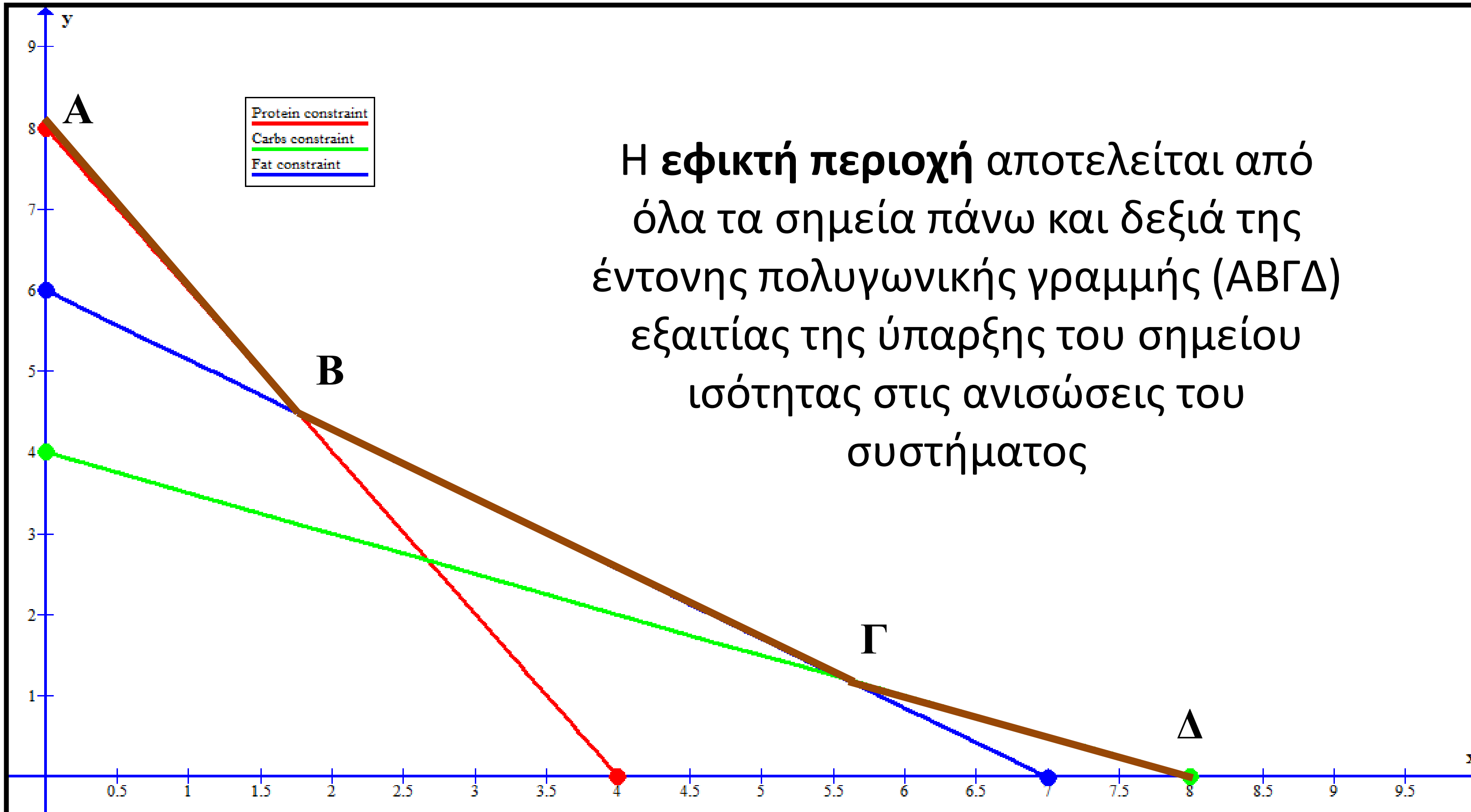
Γραφική επίλυση: ελαχιστοποίηση - 3

- Οι περιορισμοί του προβλήματος φαίνονται στο παρακάτω γράφημα:



Γραφική επίλυση: ελαχιστοποίηση - 4

- Η εφικτή του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



Γραφική επίλυση: ελαχιστοποίηση - 5

- Για την εύρεση των συντεταγμένων αυτών λύνεται το σύστημα των ευθειών που η τομή τους είναι το σημείο Γ και το σημείο τομής του θα προσδιορίσει τον συνδυασμό ποσοτήτων που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση. Δηλαδή:

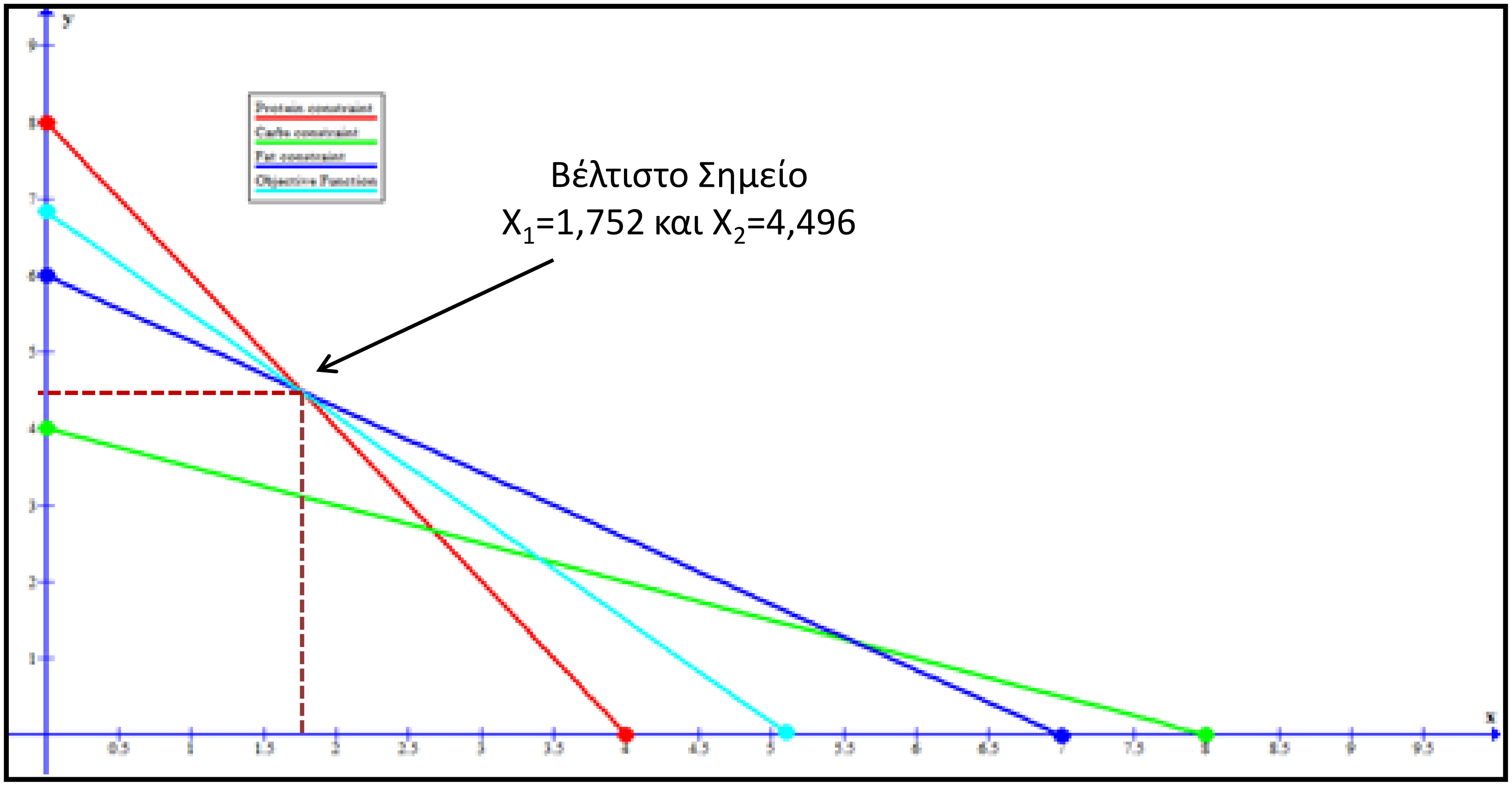
$$\left.\begin{array}{l} 120\cdot x_1 + 60\cdot x_2 = 480 \\ 103\cdot x_1 + 120\cdot x_2 = 720 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cdots\cdots\} \Rightarrow x_1 = 1.752, x_2 = 4.496$$

- Ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι:

$$\min_{x_1,x_2} Z = 24\cdot 1.752 + 18\cdot 4.496 = 122.98$$

Γραφική επίλυση: ελαχιστοποίηση - 6

- Οι περιορισμοί του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση και το βέλτιστο σημείο, φαίνονται στο παρακάτω γράφημα:



Ειδικές περιπτώσεις ΠΓΠ (γραφικά)

Φραγμένο ΠΓΠ

$$\max_{x_1, x_2} \Pi = -x_1 + 2 \cdot x_2$$

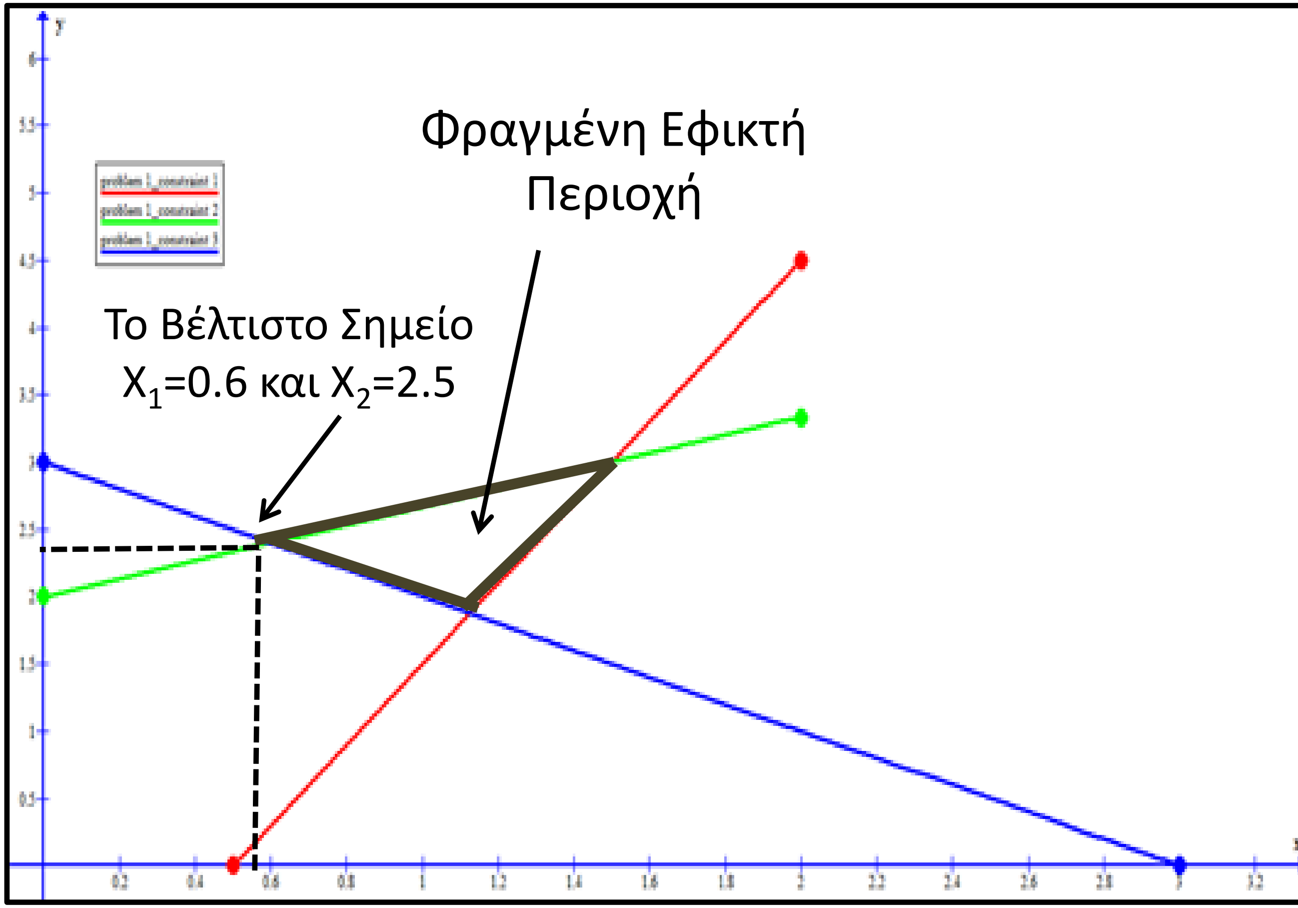
$$s.t.$$

$$6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 3$$

$$-2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Μη Φραγμένο ΠΓΠ

- Το ΠΓΠ είναι:

$$\max_{x_1,x_2} \Pi = 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2$$

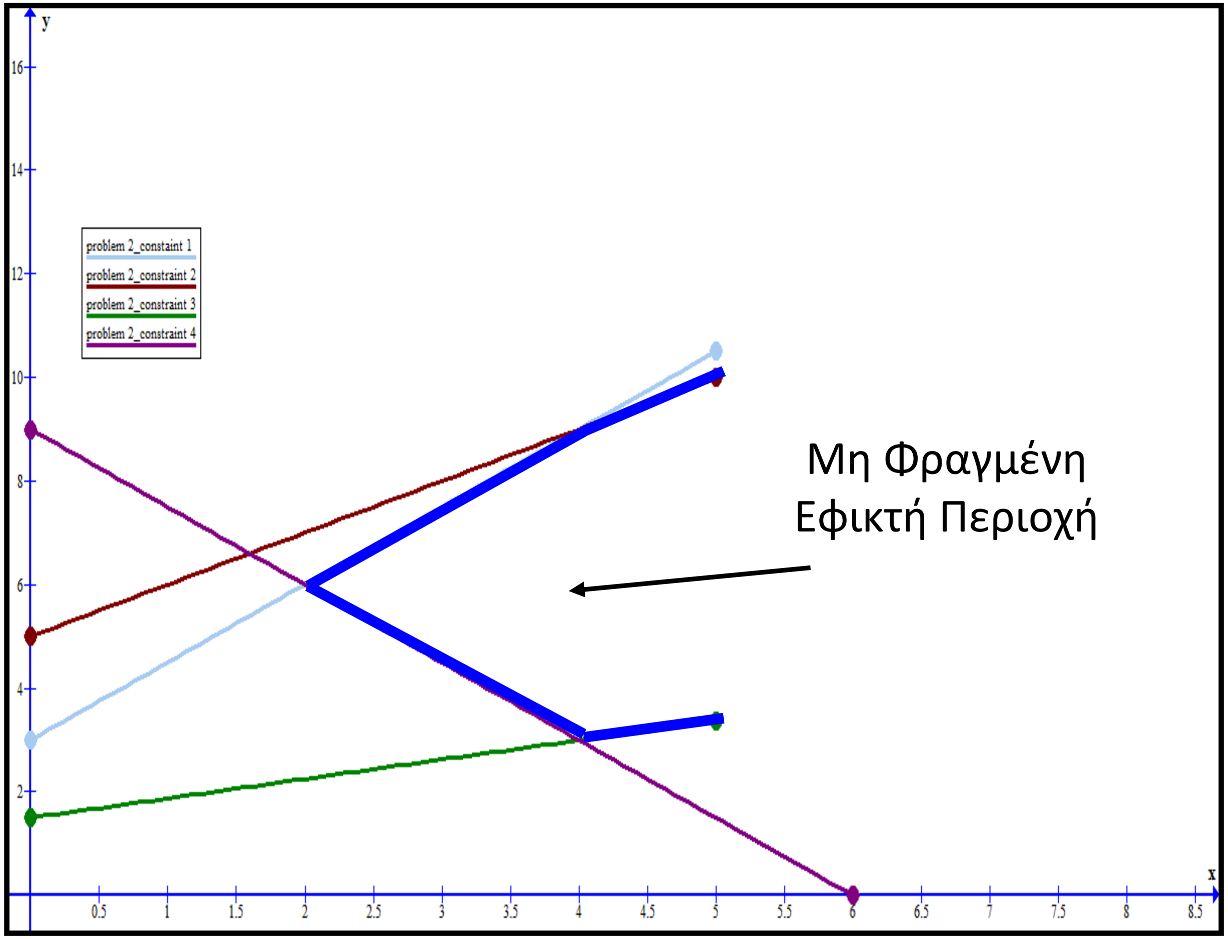
$$s.t. -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-3\cdot x_1 + 8\cdot x_2 \geq 12$$

$$3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Αμοιβαίως αποκλειόμενοι περιορισμοί

- Το ΠΓΠ είναι:

$$\max_{x_1, x_2} \Pi = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$$

$$s.t.$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ή μόνο } x_2 \geq 0$$

Εκφυλισμένη Βέλτιστη Λύση: Πλεονάζον Περιορισμός

- Το ΠΓΠ είναι:

$$\max_{x_1, x_2} \Pi = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$s.t.$$

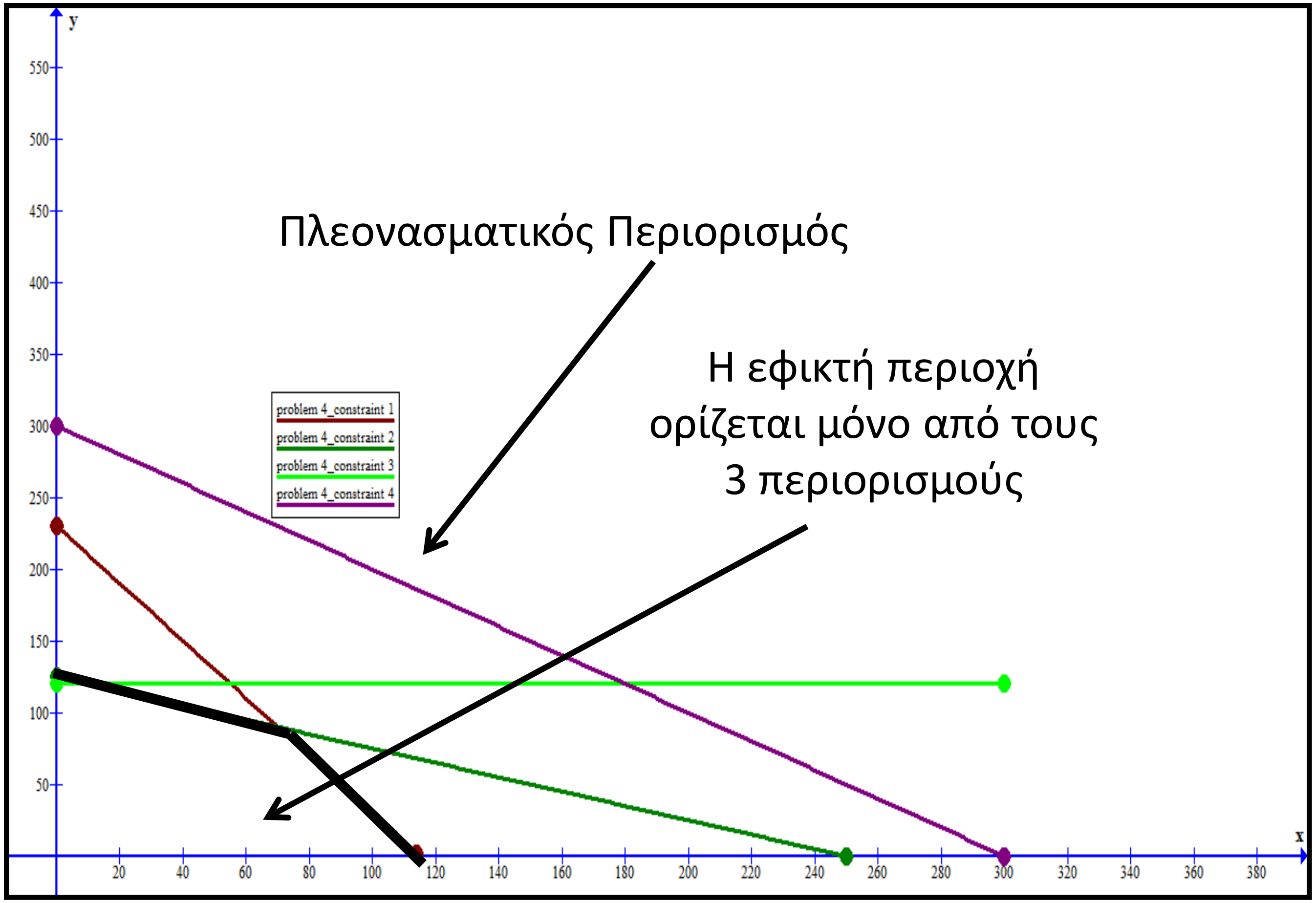
$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 230$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 250$$

$$x_2 \leq 120$$

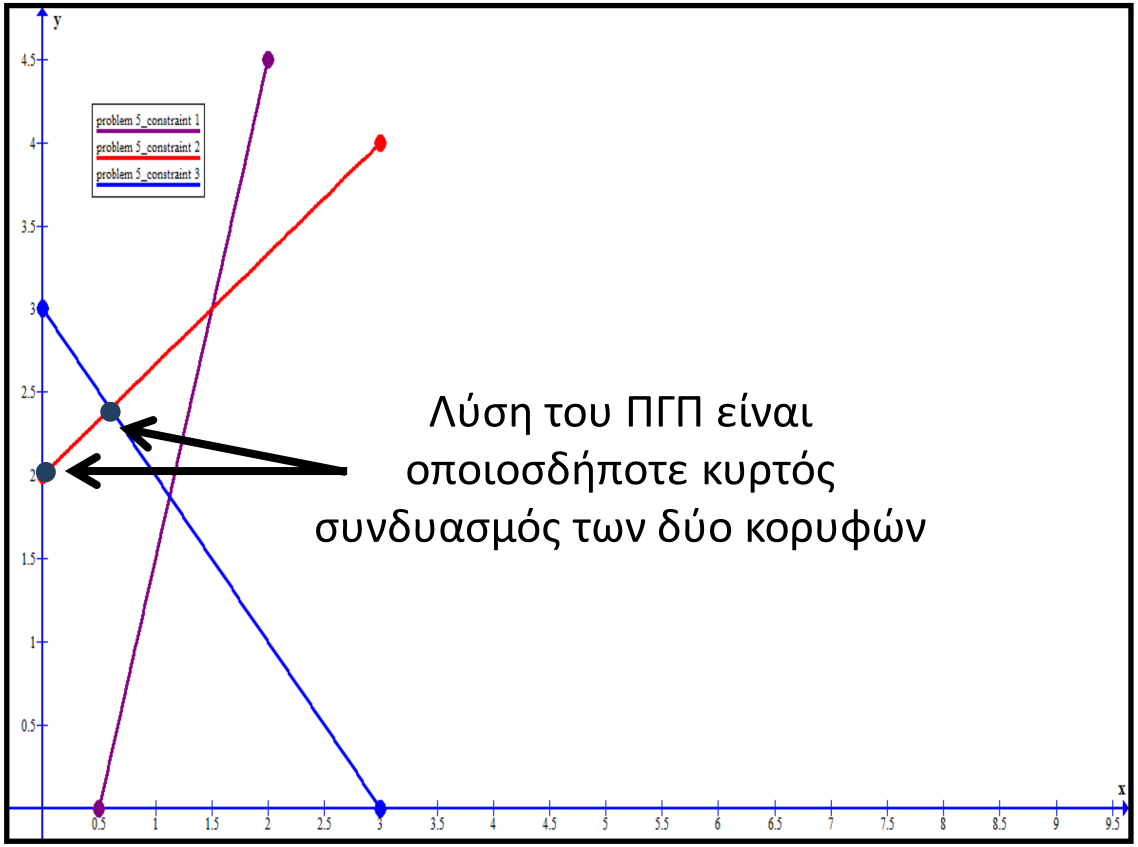
$$x_1 + x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Η περίπτωση της Απειρίας Λύσεων: Κυρτός Συνδυασμός

- Περισσότερες από μια κορυφές της εφικτής περιοχής μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση, τότε προκύπτει απειρία λύσεων καθώς οποιοσδήποτε κυρτός συνδυασμός των κορυφών αυτών μπορεί να αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Η βέλτιστη λύση δεν είναι μια και μοναδική υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.



Τέλος 3ης Ενότητας

Γραφική Επίλυση και ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Γραφική Επίλυση και ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.