ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ, 2018
ΣΤΕΡΓΙΟΥ ΕΙΡΗΝΗ (email: e.stergiou@upnet.gr)
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ,
ΣΧΟΛΗ ΟΡΓΑΝΩΣΗς & ΔΙΟΙΚΗΣΗς ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ,
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Εργαστήριο 4^o: Δυϊκότητα

- Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυϊκό (dual) ενώ το αρχικό καλείται και πρωτεύον πρόβλημα
- Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι σε **κανονική μορφή** όταν :
  - είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
  - όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις της μορφής “ $\leq$ ”
  - όλες οι μεταβλητές είναι μη-αρνητικές

Μετατροπή αρχικού προβλήματος σε δυϊκό

Πρωτεύον Πρόβλημα	Δυϊκό Πρόβλημα
$\pm \max \boldsymbol{c}' \cdot \boldsymbol{x}$ $s.t$ $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq 0$	$\pm \min \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{x}$ $s.t$ $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{w} \geq 0$

Πρωτεύον Πρόβλημα	**Δυϊκό Πρόβλημα**
Πρόβλημα μεγιστοποίησης	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμός τύπου i $\geq$	Μεταβλητή $u_i \leq 0$
Περιορισμός τύπου i $\leq$	Μεταβλητή $u_i \geq 0$
Περιορισμός τύπου i $=$	Μεταβλητή u_i χωρίς περιορισμό
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός τύπου j $\geq$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός τύπου j $\leq$
Μεταβλητή x_j χωρίς περιορισμό	Περιορισμός τύπου j $=$
Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης	Συντελεστής δεύτερου μέλους
Συντελεστής δεύτερου μέλους	Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι

- Έστω μια βιομηχανία αυτοκινήτων και μοτοσυκλετών των οποίων η παραγωγή χρησιμοποιεί πόρους από το τμήμα σχεδιασμού, το τμήμα συναρμολόγησης και το τμήμα ποιοτικού ελέγχου. Η παραγωγή είναι κατά κύριο λόγο αυτοματοποιημένη με τον ανθρώπινο παράγοντα να επεμβαίνει κυρίως στο στάδιο του σχεδιασμού. Προκειμένου να σχεδιαστεί ένα **αυτοκίνητο** **απαιτούνται 8 ώρες στο τμήμα σχεδιασμού, 4 ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης και 4 ώρες στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου** ενώ προκειμένου να κατασκευαστεί **μία μοτοσυκλέτα** απαιτούνται **επίσης 8 ώρες στο τμήμα σχεδιασμού, 2 ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης και 3 ώρες στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου**. **Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο τμήμα σχεδιασμού είναι 960, στο τμήμα συναρμολόγησης είναι 400 ενώ στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου οι προς διάθεση ώρες είναι 420**. **Η τιμή πώλησης του κάθε αυτοκινήτου είναι €15.000 ενώ η τιμή πώλησης της κάθε μηχανής είναι €9.500 και ο αντικειμενικός σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των μικτών κερδών από την παραγωγή των αυτοκινήτων και των μοτοσικλετών**. Οι παραπάνω διαθέσιμες ώρες στο κάθε τμήμα αφορούν στον μέγιστο αριθμό που μπορεί η επιχείρηση να διαθέσει.

- Στο συμβούλιο συμμετέχουν μέτοχοι και διευθυντικά στελέχη. Κάποιος από τους μετόχους διατύπωσε την άποψη πως η διοίκηση της εταιρίας θα πρέπει να δαπανήσει πόρους στην πρόσληψη περισσότερων ειδικών στο τμήμα σχεδιασμού ώστε να διαφοροποιηθεί από τον ανταγωνισμό μέσω του πιο εξελιγμένου σχεδιασμού, κάτι το οποίο θα αυξήσει τα κέρδη της μέσω της διαφοροποίησης, ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει να ενισχύσει το τμήμα συναρμολόγησης με περισσότερο εξελιγμένες μηχανές συναρμολόγησης προκειμένου να εναρμονιστούν με το τμήμα σχεδιασμού. Ο οικονομικός διευθυντής της επιχείρησης διαφώνησε με την άποψη αυτή και υποστήριξε πως το καλύτερο για την εταιρεία θα ήταν να επενδύσει στον ποιοτικότερο έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων προκειμένου να αυξηθούν τα κέρδη της εταιρείας και επίσης υποστήριξε πως δεν χρειάζεται να δαπανηθούν περαιτέρω πόροι στο τμήμα σχεδιασμού καθώς ήδη το τμήμα αυτό φαίνεται να εμφανίζει αργούν παραγωγικό δυναμικό. Με ποια από τις δυο απόψεις συμφωνείτε και για ποιον λόγο/ους;

Αποτύπωση του προβλήματος σε Π.Γ.Π

- maxΠ=$15000 * x_1 + 9500 * x_2$
- s.t.

$$
\begin{gathered}
8 * x_1 + 8 * x_2 \leq 960 \\
4 * x_1 + 2 * x_2 \leq 400 \\
4 * x_1 + 3 * x_2 \leq 420 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

```
> library(linprog)
> cvec=c(15000,9500)
> bvec=c(960,400, 420)
> A=matrix(c(8,8,4,2,4,3),nrow=3,ncol=2,byrow=T)
> LP=solveLP(cvec,bvec,A,maximum=T)
> print(LP)


Results of Linear Programming / Linear Optimization

Objective function (Maximum): 1540000

Iterations in phase 1: 0
Iterations in phase 2: 2
Solution
  opt
1  90
2  20

Basic Variables
    opt
1    90
2    20
S 1  80

Constraints
  actual dir bvec free dual dual.reg
1    880  <=  960   80    0       80
2    400  <=  400    0 1750       40
3    420  <=  420    0 2000       20

All Variables (including slack variables)
    opt  cvec   min.c max.c  marg marg.reg
1    90 15000 12666.7 19000    NA       NA
2    20  9500  7500.0 11250    NA       NA
S 1  80     0  -875.0   500     0       NA
S 2   0     0    -Inf  1750 -1750       40
S 3   0     0    -Inf  2000 -2000       20
```

```
> library(linprog)
> library(lpSolve)
> cvec=c(15000,9500)
> bvec=c(960,400, 420)
> A=matrix(c(8,8,4,2,4,3),nrow=3,ncol=2,byrow=T)
> LP1 = solveLP(cvec, bvec, A, maximum = T, const.dir = c("<=","<=","<="), lpSolve = T, solve.dual = T)
> print(LP1)


Results of Linear Programming / Linear Optimization
(using lpSolve)

Objective function (Maximum): 1540000

Solution
  opt
1  90
2  20

Constraints
  actual dir bvec free dual
1    880  <=  960   80    0
2    400  <=  400    0 1750
3    420  <=  420    0 2000
```

Duality

- Θέλουμε να βρούμε την αξία χρήσης (κόστος ευκαιρίας) της κάθε διαθέσιμης ώρας εργασίας στο τμήμα σχεδιασμού, συναρμολόγησης και ποιοτικού ελέγχου αντίστοιχα.
- Άρα:

maxΠ=$15000 * x_1 + 9500 * x_2$

- s.t. $8 * x_1 + 8 * x_2 \leq 960$

$4 * x_1 + 2 * x_2 \leq 400$

$4 * x_1 + 3 * x_2 \leq 420$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\min \mathrm{o.c} = 960 * w_1 + 400 * w_2 + 420 * w_3$

s.t. $8 * w_1 + 4 * w_2 + 4 * w_3 \geq 15000$

$8 * w_1 + 2 * w_2 + 3 * w_3 \geq 9500$

$w_1, w_2, w_3 \geq 0$

- w_1, w_2, w_3 :**δυϊκές τιμές (dual variables)** - εκφράζουν την οριακή αξία χρήσης των διαθέσιμων πόρων . (κόστος σε € ανά ώρα λειτουργίας του κάθε Τμήματος)
- **Σκιώδης Τιμή ≠ Δυϊκή μεταβλητή!!!**

Πρωτεύον Πρόβλημα	Δυϊκό Πρόβλημα

Πρωτεύον Πρόβλημα

```
> library(linprog)
> cvec=c(15000,9500)
> bvec=c(960,400, 420)
> A=matrix(c(8,8,4,2,4,3),nrow=3,ncol=2,byrow=T)
> primal=solveLP(cvec,bvec,A,maximum=T, lpSolve=T, solve.dual=T)
> print(primal)


Results of Linear Programming / Linear Optimization
(using lpSolve)

Objective function (Maximum) 1540000

Solution
  opt
1  90
2  20

Constraints
  actual dir bvec free dual
1    880  <=  960   80    0
2    400  <=  400    0 1750
3    420  <=  420    0 2000
```

Δυϊκό Πρόβλημα

```
> library(linprog)
> cvec=c(960,400,420)
> bvec=c(15000,9500)
> A=matrix(c(8,4,4,8,2,3),nrow=2,ncol=3,byrow=T)
> dual=solveLP(cvec,bvec,A,maximum=F,const.dir=c(">=",">="),lpSolve=T,solve.dual=T)
> print(dual)


Results of Linear Programming / Linear Optimization
(using lpSolve)

Objective function (Minimum) 1540000

Solution
  opt
1    0
2 1750
3 2000

Constraints
  actual dir  bvec free dual
1  15000  >= 15000    0   90
2   9500  >=  9500    0   20
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΙ

- Ένας καταναλωτής αντλεί χρησιμότητα καταναλώνοντας δύο μόνο αγαθά, αστακό και σολομό ενώ η χρησιμότητα του προκύπτει από την σχέση *U* (*x*1, *x*2) = $x_1 + x_2$. **Η τιμή του αστακού είναι 2 χρηματικές μονάδες, η τιμή του σολομού είναι 1 χρηματική μονάδα** ενώ **η κατανάλωση των δύο αγαθών υπόκειται σε (εισοδηματικό) περιορισμό που δεν μπορεί να ξεπερνάει τις 150 χρηματικές μονάδες**. **Αντικειμενικός σκοπός του καταναλωτή είναι η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας του**.
- $\max U = x_1 + x_2$
- s.t. $2 * x_1 + x_2 \leq 150$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Duality

- Στόχος η ελαχιστοποίηση της δαπάνης του καταναλωτή με δεδομένες τις τιμές των δύο αγαθών
- $\max U = x_1 + x_2$
- s.t. $2 * x_1 + x_2 \leq 150$

  $x_1, x_2 \geq 0$

$\min exp = 150 * w_1$

s.t. $2 * w_1 \geq 1$

$w_1 \geq 1$

$w_1 \geq 0$

Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας	Ελαχιστοποίηση Δαπάνης

> library(linprog)
> cvec = c(1,1)
> bvec = c(150)
> A = matrix(c(2,1), nrow=1, ncol=2, byrow=T)
> utility_max = solveLP(cvec,bvec,A,maximum=T, lpSolve=T, solve.dual=T)
> print(utility_max)
 	
Results of Linear Programming / Linear Optimization
(using lpSolve)
 	
Objective function (Maximum): 150
 	
Solution
  opt
1 0
2 150
 	
Constraints
  actual dir bvec free dual
1 150 <= 150 0 1
	> library(linprog)
	> cvec = c(150)
	> bvec = c(1,1)
	> A = matrix(c(2,1),nrow=2,ncol=1,byrow=T)
	> expenditure_min = solveLP(cvec,bvec,A,maximum=F, const.dir=c(">=",">="), lpSolve=T, solve.dual=T)
	> print(expenditure_min)
	
	Results of Linear Programming / Linear Optimization
	(using lpSolve)
	
	Objective function (Minimum): 150
	
	Solution
	  opt
	1 1
	
	Constraints
	  actual dir bvec free dual
	1 2 >= 1 1 0
	2 1 >= 1 0 150