

# Επιχειρησιακή Έρευνα, 2022

## Εργαστήριο 1<sup>ο</sup>: Διαγραμματική αναπαράσταση μέσω του Graph

Μπουλούμπασης Παναγιώτης

Πανεπιστήμιο Πατρών,

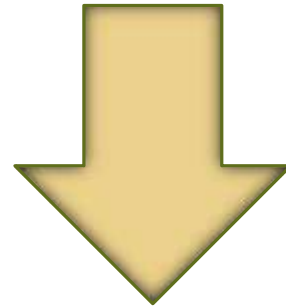
Σχολή Οργάνωσης & Διοίκησης Επιχειρήσεων,

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

# Γραφική επίλυση π.γ.π

---

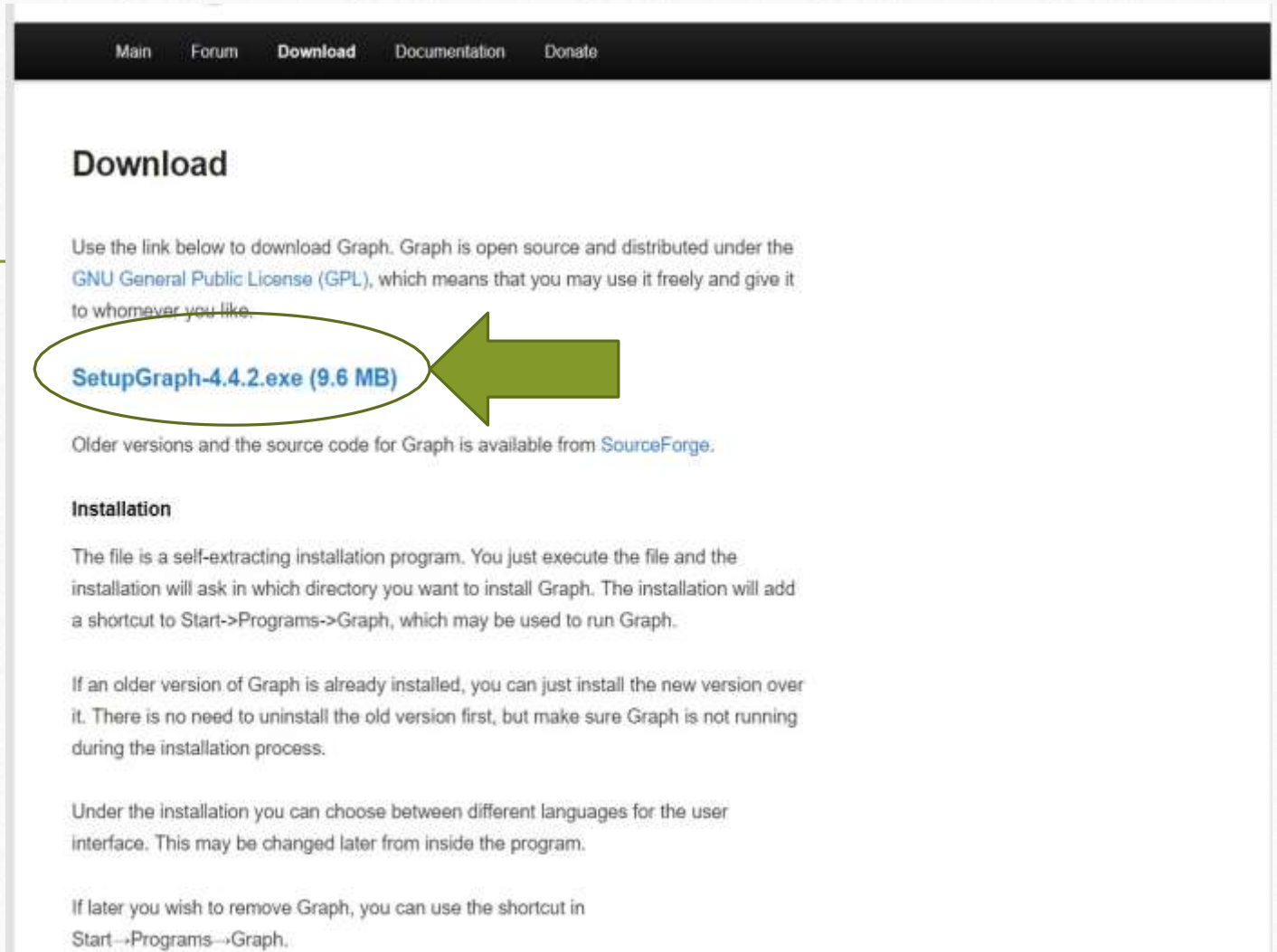
- Γραφική μέθοδος για την απεικόνιση του προβλήματος στις 2 διαστάσεις
- Οπτικοποίηση των χαρακτηριστικών των φαινομένων που μελετάμε
- Απαιτητική διαδικασία ως προς τον χρόνο εκτέλεσης



**Χρήση του λογισμικού Graph**

# Why use graph?

- Δυνατότητα αποτύπωσης γραφικά των μαθηματικών συναρτήσεων
- Ελεύθερο πρόγραμμα:  
<https://www.padowan.dk/>



The screenshot shows the website's navigation menu with links for Main, Forum, Download, Documentation, and Donate. The 'Download' section is active, featuring a heading 'Download' and a paragraph explaining that Graph is open source under the GNU GPL. A link for 'SetupGraph-4.4.2.exe (9.6 MB)' is highlighted with a green circle and a green arrow. Below this, there is a link to SourceForge for older versions. The 'Installation' section follows, providing instructions on how to run the self-extracting program and how to handle existing installations. It also mentions language options and how to uninstall the software.

Main Forum **Download** Documentation Donate

## Download

Use the link below to download Graph. Graph is open source and distributed under the [GNU General Public License \(GPL\)](#), which means that you may use it freely and give it to whomever you like.

[SetupGraph-4.4.2.exe \(9.6 MB\)](#)

Older versions and the source code for Graph is available from [SourceForge](#).

### Installation

The file is a self-extracting installation program. You just execute the file and the installation will ask in which directory you want to install Graph. The installation will add a shortcut to Start->Programs->Graph, which may be used to run Graph.

If an older version of Graph is already installed, you can just install the new version over it. There is no need to uninstall the old version first, but make sure Graph is not running during the installation process.

Under the installation you can choose between different languages for the user interface. This may be changed later from inside the program.

If later you wish to remove Graph, you can use the shortcut in Start->Programs->Graph.

# Περιβάλλον του graph

The image shows a dialog box titled "Insert function" with a close button (X) in the top right corner. The dialog contains several sections for configuring a function plot:

- Function type:** A dropdown menu set to "Standard function  $y=f(x)$ ".
- Function equation:** A text input field labeled "f(x)=".
- Argument range:** Three input fields labeled "From:", "To:", and "Steps:".
- Endpoints:** Two dropdown menus labeled "Start:" and "End:".
- Legend text:** A text input field labeled "Description:".
- Graph properties:** A section with four controls: "Line style:" (a line style dropdown), "Draw type:" (a dropdown set to "Automatic"), "Color:" (a color selection dropdown currently showing green), and "Width:" (a numeric input field set to 3).

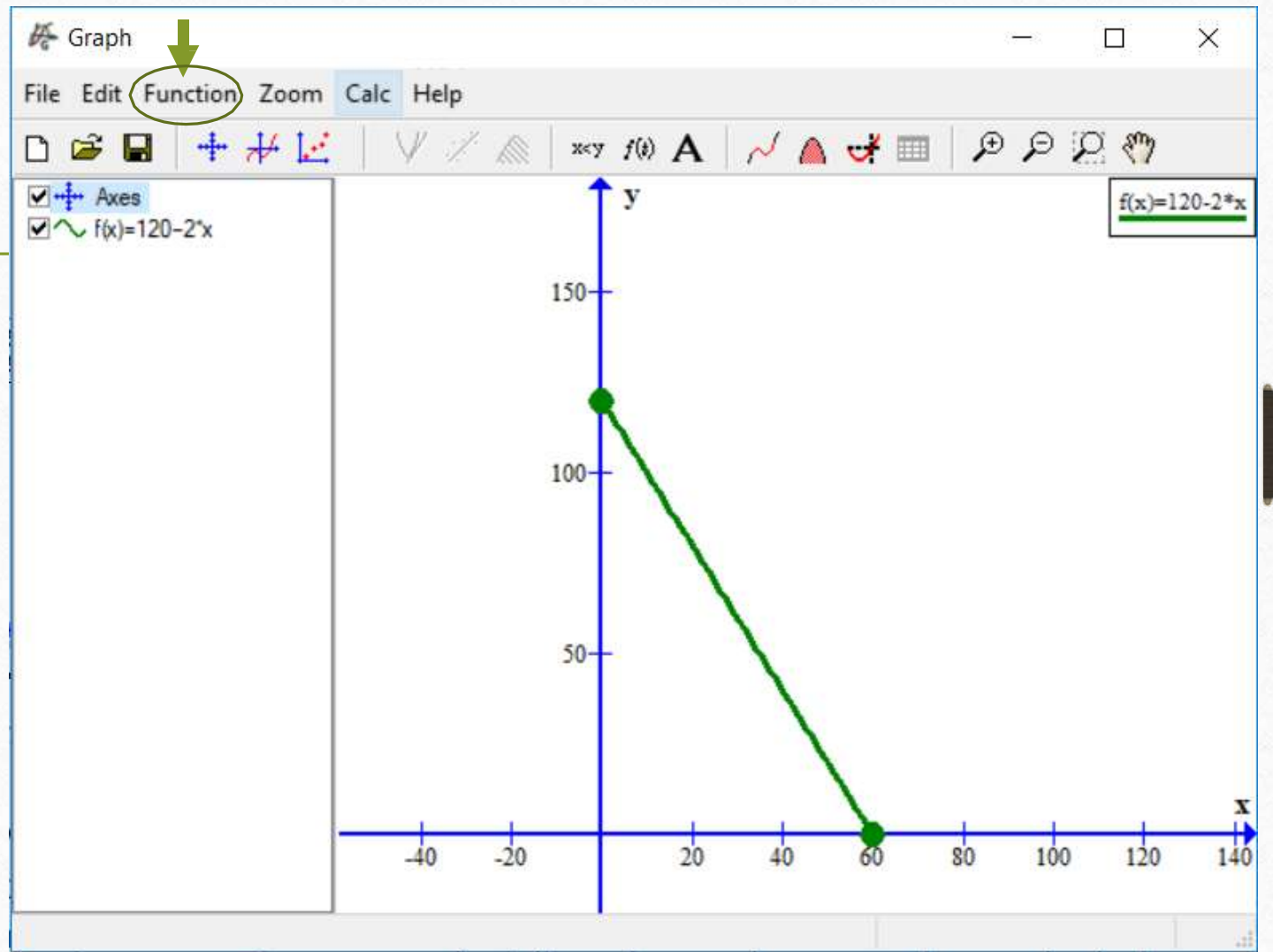
Annotations in Greek explain the purpose of these fields:

- Σε αυτό το πεδίο εισάγουμε την συνάρτηση ενδιαφέροντος (In this field we enter the function of interest).
- Σε αυτό το πεδίο εισάγουμε το σημείο τομής με τον άξονα των  $y$  (In this field we enter the intersection point with the  $y$ -axis).
- Σε αυτό το πεδίο εισάγουμε το βήμα με το οποίο η συνάρτηση θα φτάσει τον άξονα των  $x$  (In this field we enter the step with which the function will reach the  $x$ -axis).
- Σε αυτό το πεδίο εισάγουμε το σημείο τομής με τον άξονα των  $x$  (In this field we enter the intersection point with the  $x$ -axis).
- Στα πεδία **Start&End** επιλέγουμε σχεδίαση για τα σημεία τομής με τους άξονες (In the **Start&End** fields we choose design for the intersection points with the axes).
- Στα πεδία αυτό επιλέγουμε το είδος της γραμμής που θέλουμε να έχει η συνάρτηση (In this field we choose the type of line we want the function to have).
- Σε αυτό το πεδίο επιλέγουμε το χρώμα σχεδίασης της συνάρτησης (In this field we choose the color of the function design).
- Σε αυτό το πεδίο επιλέγουμε το όνομα της συνάρτησης που θα φαίνεται στο υπόμνημα (In this field we choose the name of the function that will appear in the tooltip).
- Σε αυτό το πεδίο επιλέγουμε το πάχος της γραμμής (In this field we choose the thickness of the line).

Buttons at the bottom: OK, Cancel, Help.

## Παράδειγμα 1

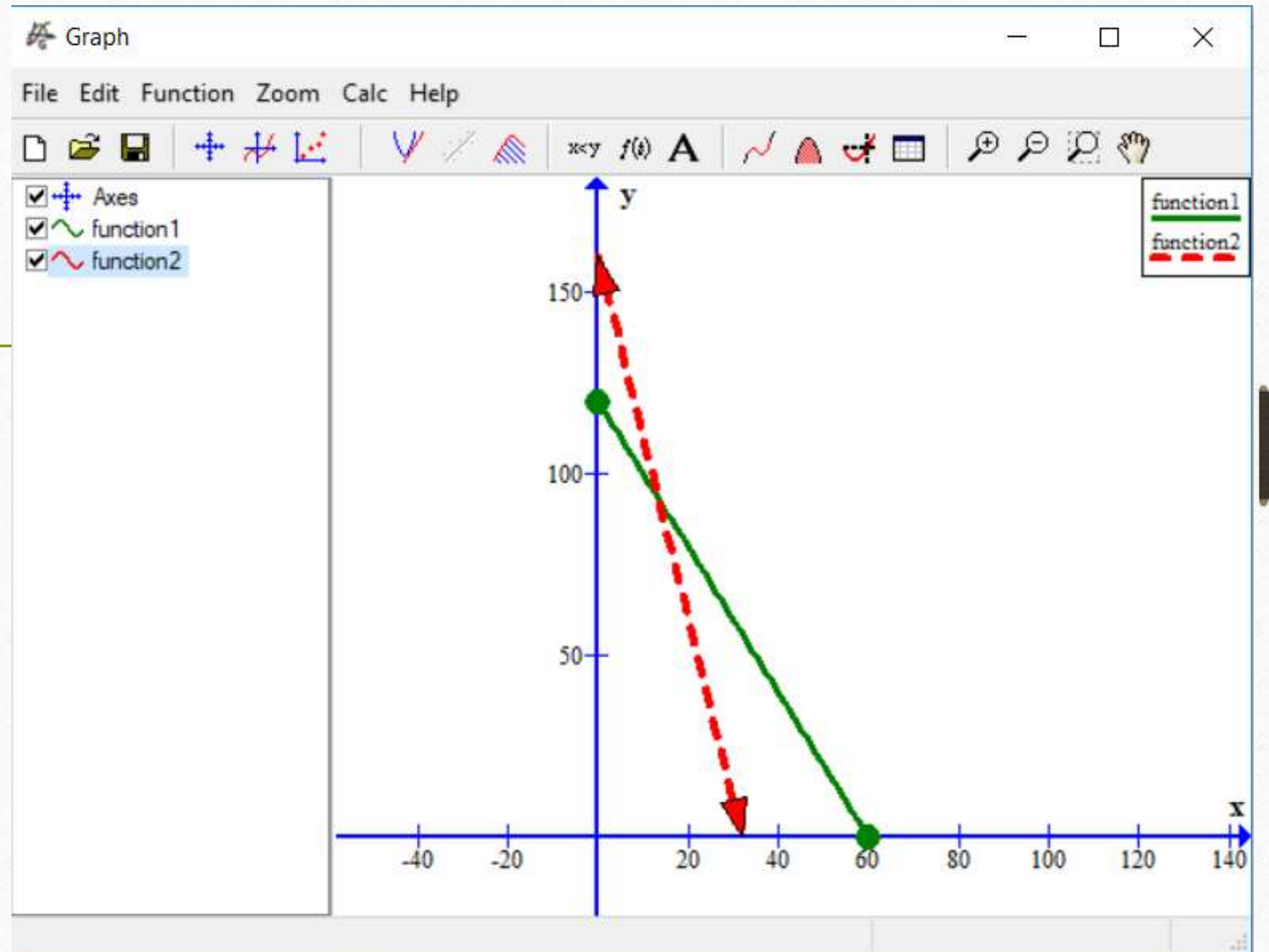
- Έστω συνάρτηση:  
 $y_1=f(x)=120-2*x$





## Παράδειγμα 1

- Έστω συνάρτηση:  
 $y_2=f(x)=160-5*x$



# Παράδειγμα II

- Μια επιχείρηση που λειτουργεί εντός ενός βιομηχανικού μεταποιητικού κλάδου παράγει δύο διαφορετικά προϊόντα, το προϊόν 1 και το προϊόν 2. Η παραγωγή του κάθε τεμαχίου απαιτεί συγκεκριμένο χρόνο λειτουργίας δύο μηχανών διαφορετικού τύπου, δηλαδή τύπου A και τύπου B. Η μηχανή τύπου A μπορεί να χρησιμοποιηθεί για είκοσι (20) ώρες ανά ημέρα ενώ η μηχανή τύπου B είναι διαθέσιμη στην διαδικασία παραγωγής για δώδεκα (12) ώρες ανά ημέρα. Προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος 1 απαιτούνται δύο (2) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου A και μία (1) ώρα λειτουργίας της μηχανής τύπου B ενώ για να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος 2 απαιτούνται τέσσερις (4) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου A και τρεις (3) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου B. Το αντίστοιχο (μικτό) κέρδος για την επιχείρηση ανέρχεται σε σαράντα ευρώ (40€) για κάθε μονάδα του προϊόντος 1 και σε εκατό ευρώ (100€) για κάθε μονάδα του προϊόντος 2. Η επιχείρηση έχει την δυνατότητα να διοχετεύσει στην αγορά όλη την παραγόμενη ποσότητα και από τα δύο προϊόντα με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Ζητείται να προσδιορίσετε την ποσότητα των τεμαχίων ανά προϊόν που πρέπει να παράγει η εν λόγω επιχείρηση ημερησίως προκειμένου να πετύχει τον σκοπό που έχει θέσει.

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

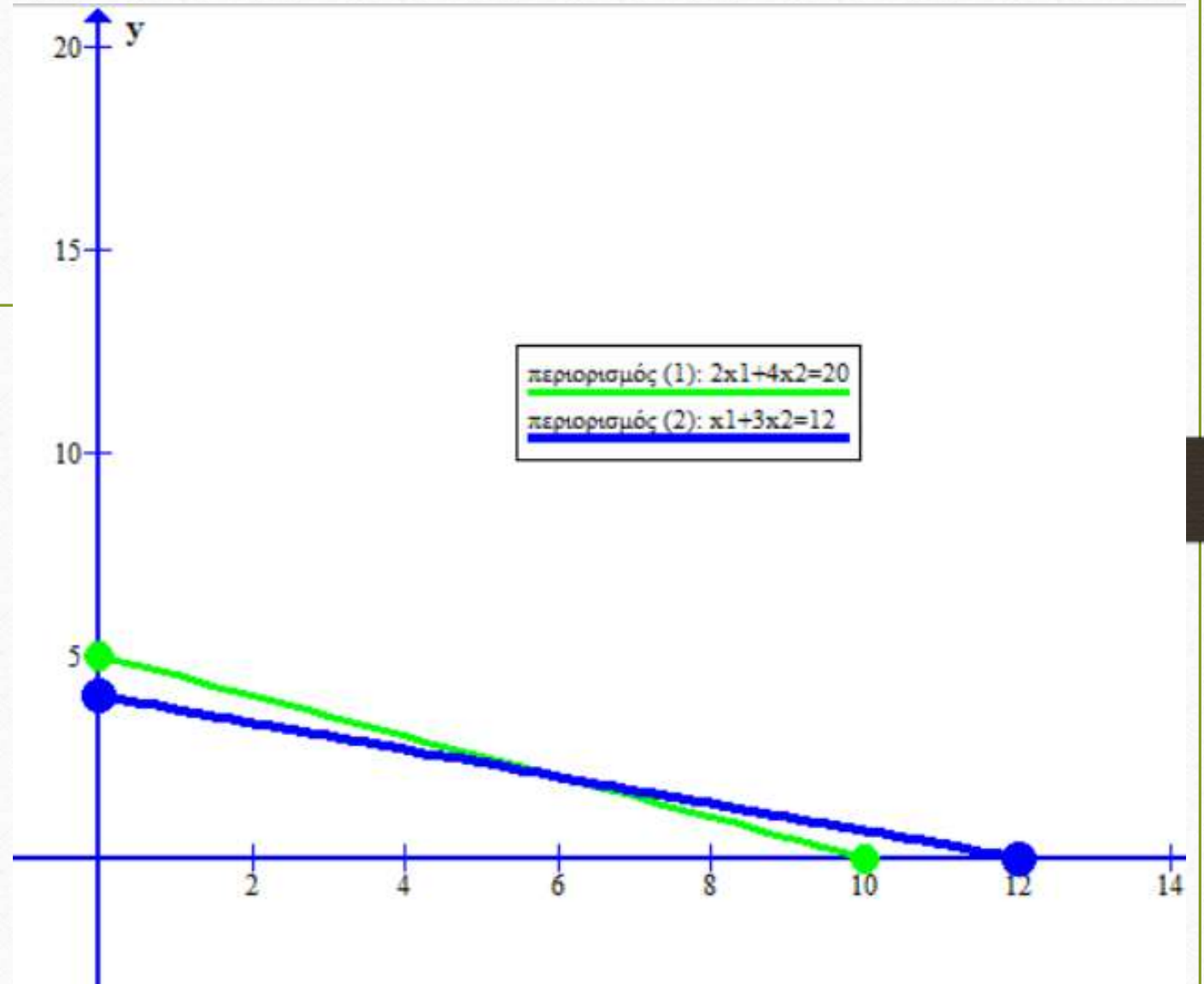
- s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{περιορισμός μη-αρνητικότητας})$$

## Γραφική επίλυση

- Αγνοώ τις ανισότητες και μηδενίζω τα  $x_1, x_2$  για να βρω τα σημεία τομής με τους άξονες

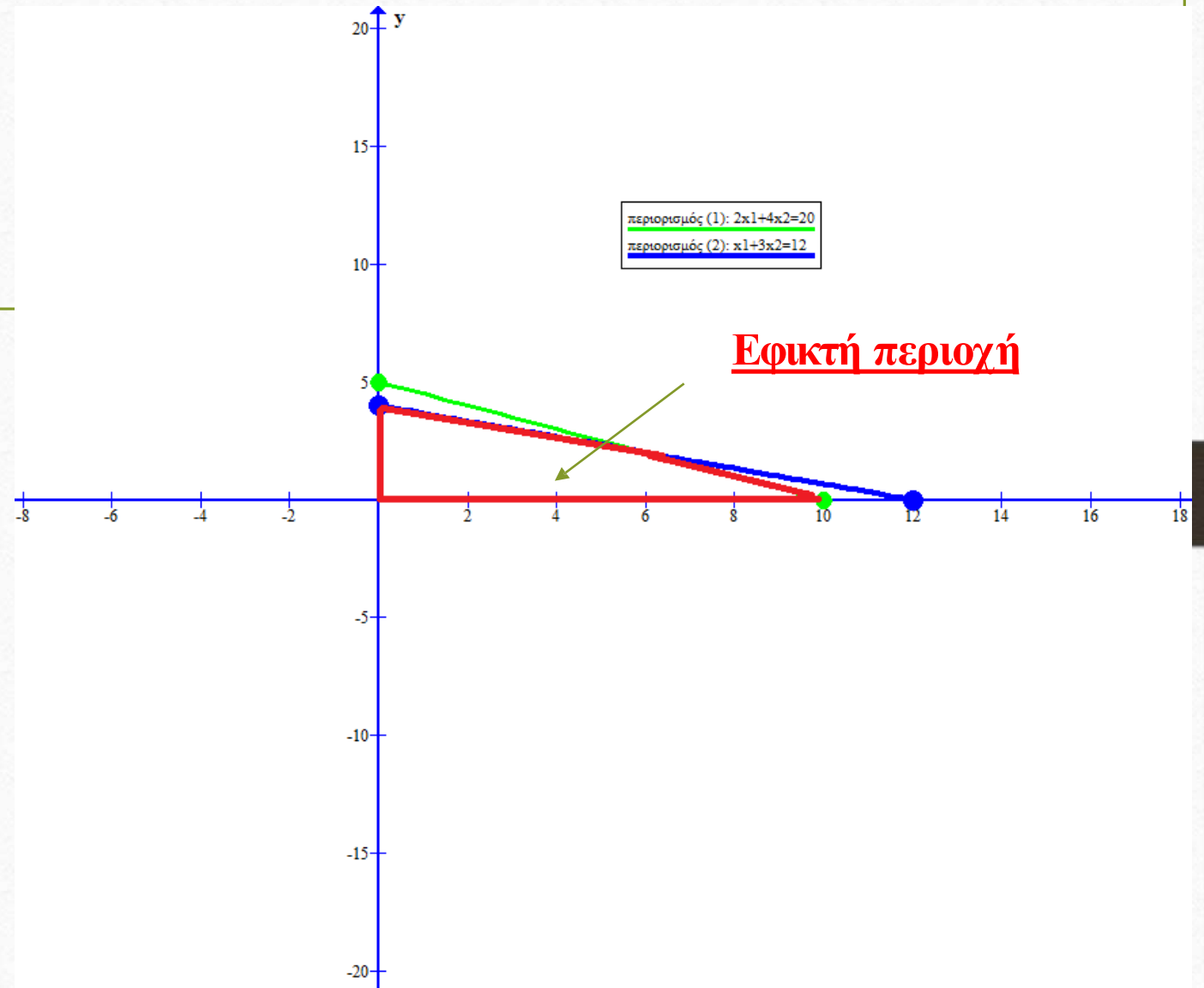




- # Περιορισμοί

- ## Εφικτή περιοχή

- Είναι η περιοχή που βρίσκεται στο κάτω από τους περιορισμούς (κόκκινο πλαίσιο)
- Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται σε κάποιο γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής

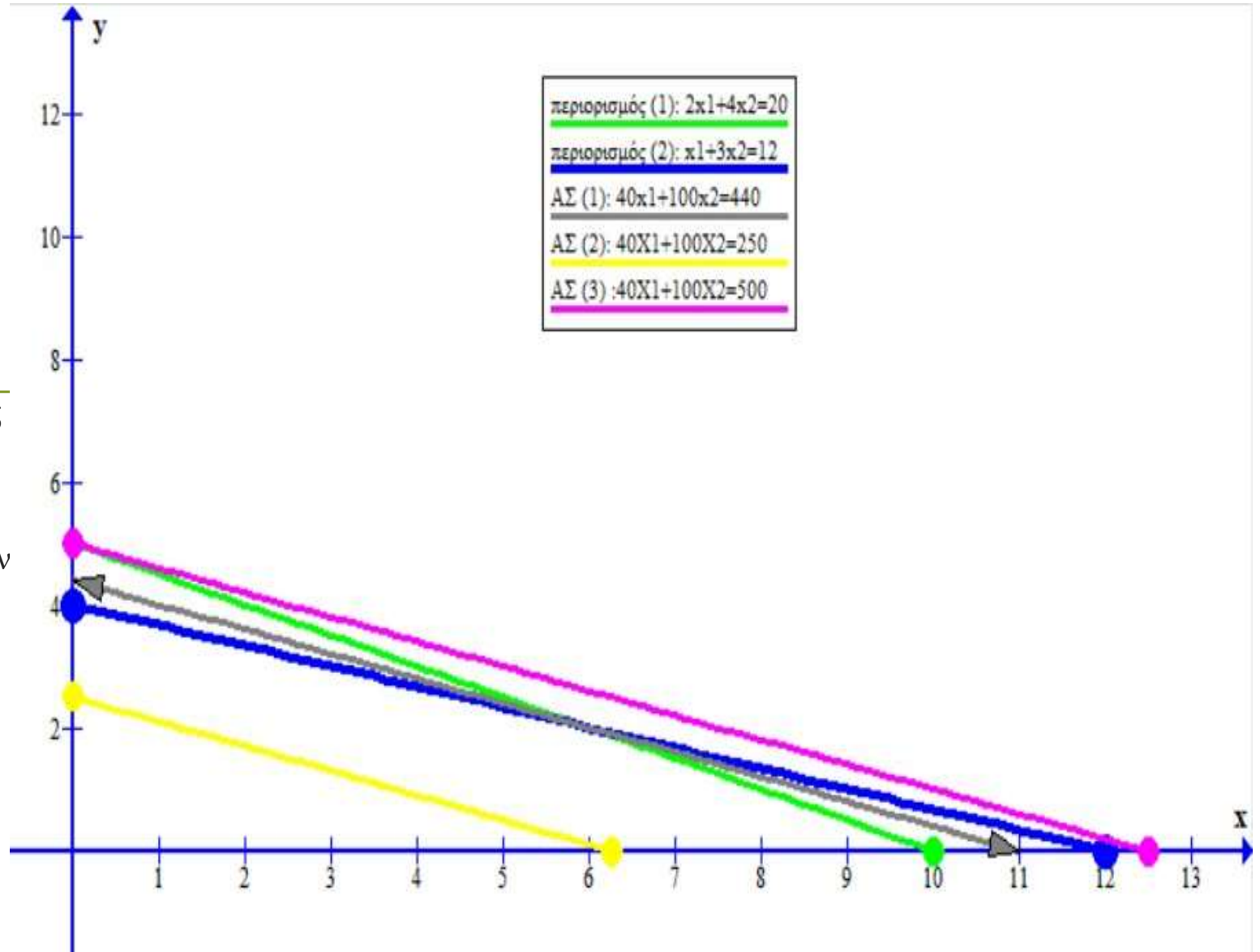


## Διαφορετικά επίπεδα κέρδους

- Το γωνιακό σημείο που αποτελεί την λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εξαρτάται κάθε φορά από την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή από τον συντελεστή διεύθυνσης = λόγο των συντελεστών κέρδους (κόστους) των δύο προϊόντων:

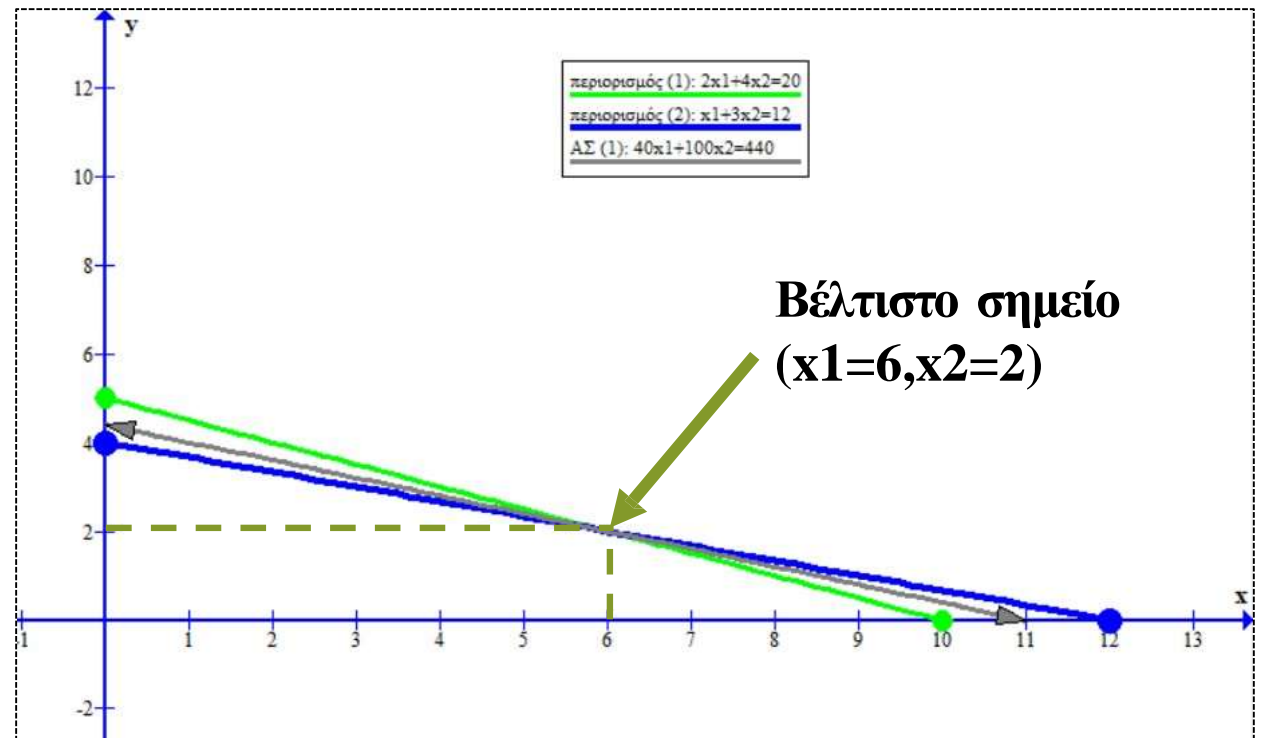
$$\left(\frac{x}{y} = -\frac{40}{100} = -\frac{2}{5}\right)$$

- Για διαφορετικές τιμές τις αντικειμενικής συνάρτησης, διατηρώντας αμετάβλητους τους συντελεστές κέρδους του κάθε προϊόντος προκύπτουν διαφορετικές ευθείες



## Βέλτιστο σημείο

- Για να βρούμε το (γωνιακό) σημείο που μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση λύνουμε ταυτόχρονα το σύστημα των περιορισμών
  - $2 * x_1 + 4 * x_2 = 20$
  - $x_1 + 3 * x_2 = 12$



## ΚΛΙΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ

- $max \Pi = 20 * x_1 + 40 * x_2$

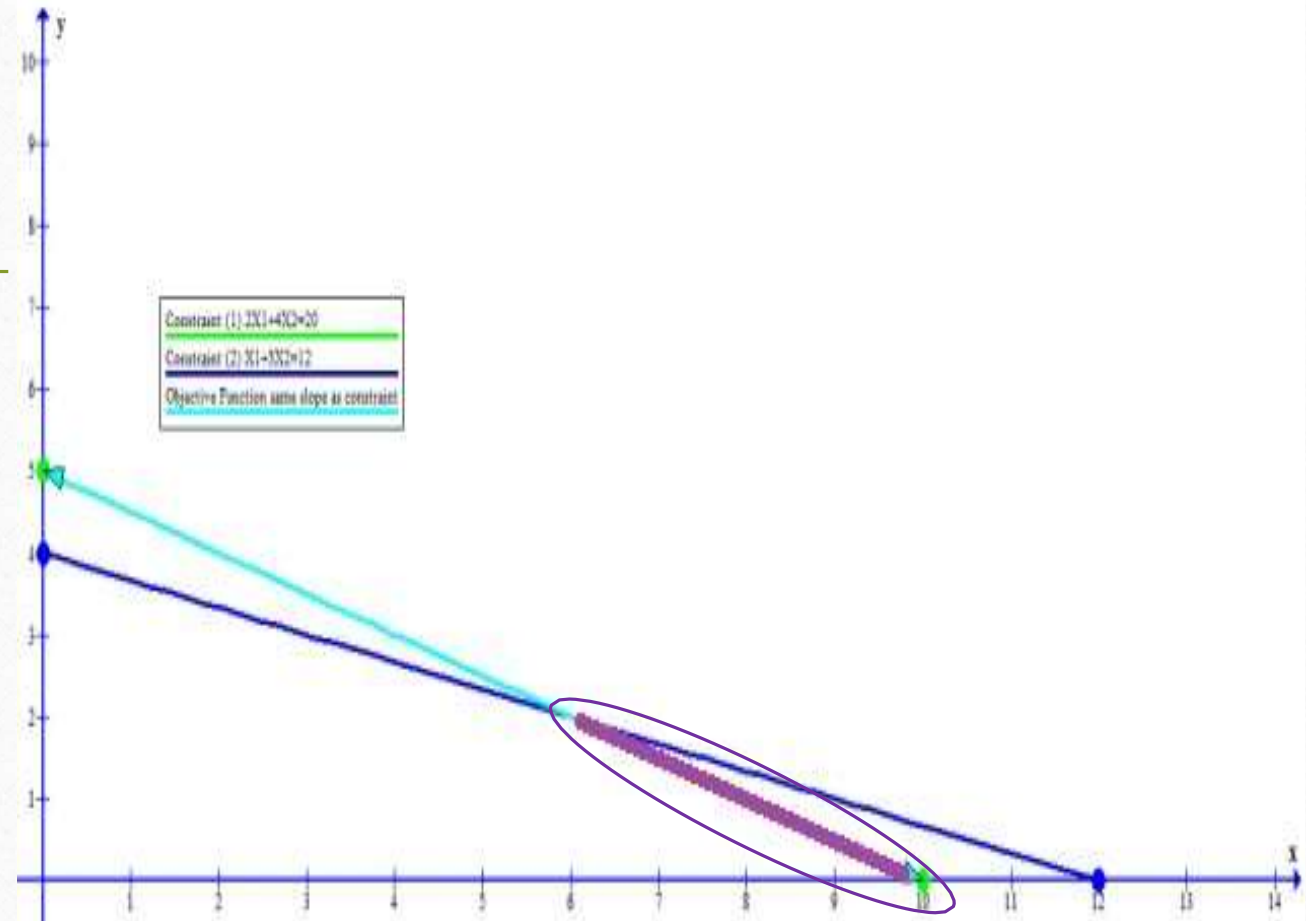
s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- **Ίδια κλίση περιορισμού με Α.Σ.**

⇒ **εναλλακτικά βέλτιστα σημεία** κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που οι δύο ευθείες ταυτίζονται (**δηλαδή άπειρα!**)



# ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

- **Ερώτημα:** Η βέλτιστη λύση είναι αξιόπιστη ως προς τις (οριακές) αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος;
- Η **Σκιάδης Τιμή** αποτελεί την μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει από μια μοναδιαία (ή οριακή) μεταβολή στο δεξί μέλος κάποιου από το σύνολο των περιορισμών.

## • Μεταβολή στους περιορισμούς

### 1) Περιορισμός διαθεσιμότητας

$$\text{Έστω ότι : } \max \Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$$

$$\text{s.t. } 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$$

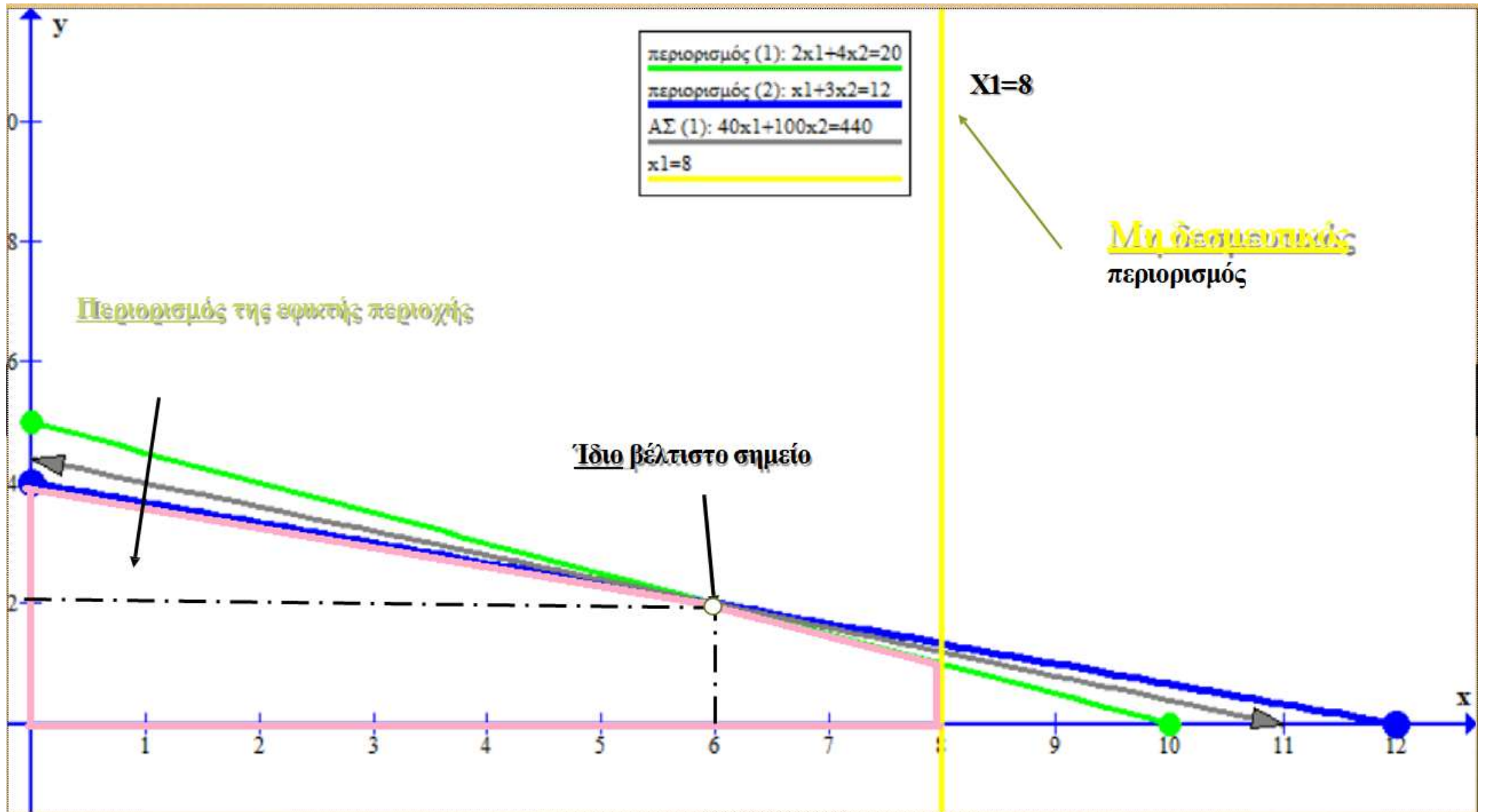
$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$$



$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





## 2) Μεταβολές στις διαθέσιμες ποσότητες

**i. Οριακή Αύξηση** των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου A

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20 \Rightarrow 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 21$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$$

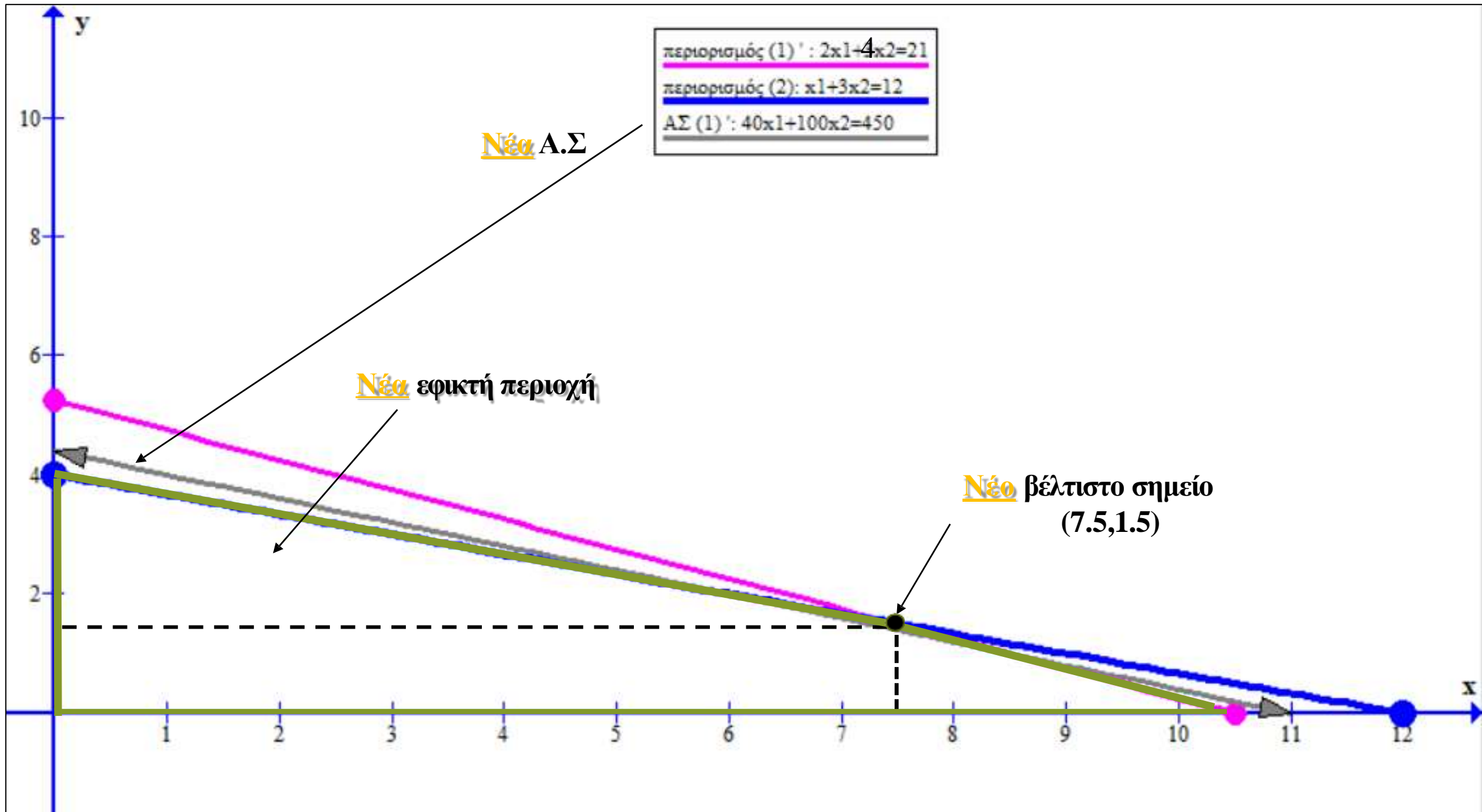
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση :  $2 * x_1 + 4 * x_2 = 21$

$$x_1 + 3 * x_2 = 12$$

Επομένως **νέο** βέλτιστο σημείο :  $(x_1=7.5, x_2=1.5)$

**Νέα** τιμή Α.Σ.:  $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 = 4500$



ii. **Οριακή Μείωση** των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου A

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

---

s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20 \Rightarrow 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 19$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$$

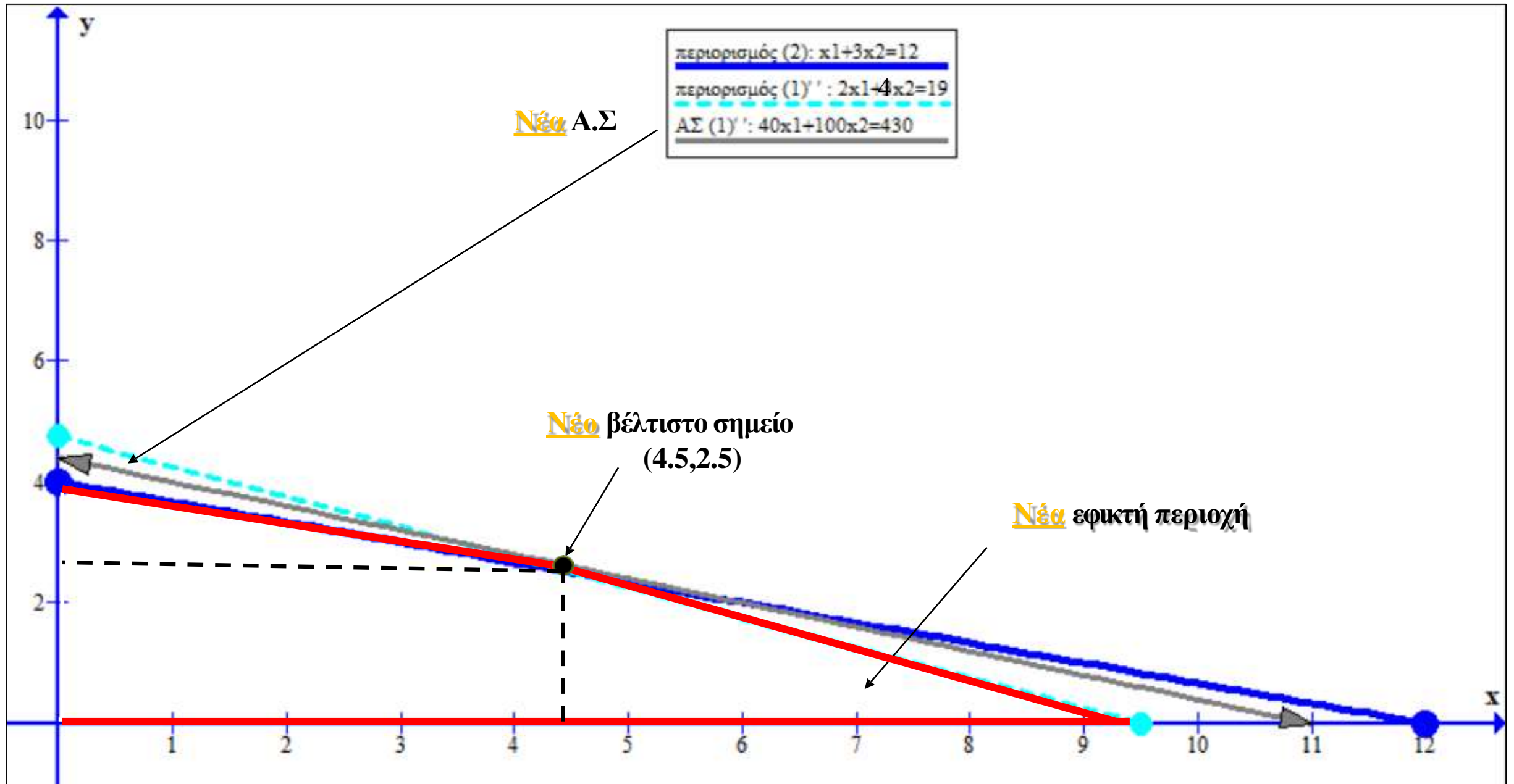
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση :  $2 * x_1 + 4 * x_2 = 19$

$$x_1 + 3 * x_2 = 12$$

Επομένως **νέο** βέλτιστο σημείο :  $(x_1=4.5, x_2=2.5)$

**Νέα** τιμή Α.Σ.:  $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 = 430$





ii. **Οριακή Αύξηση** των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου B

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3 * x_2 \leq \mathbf{13}$$

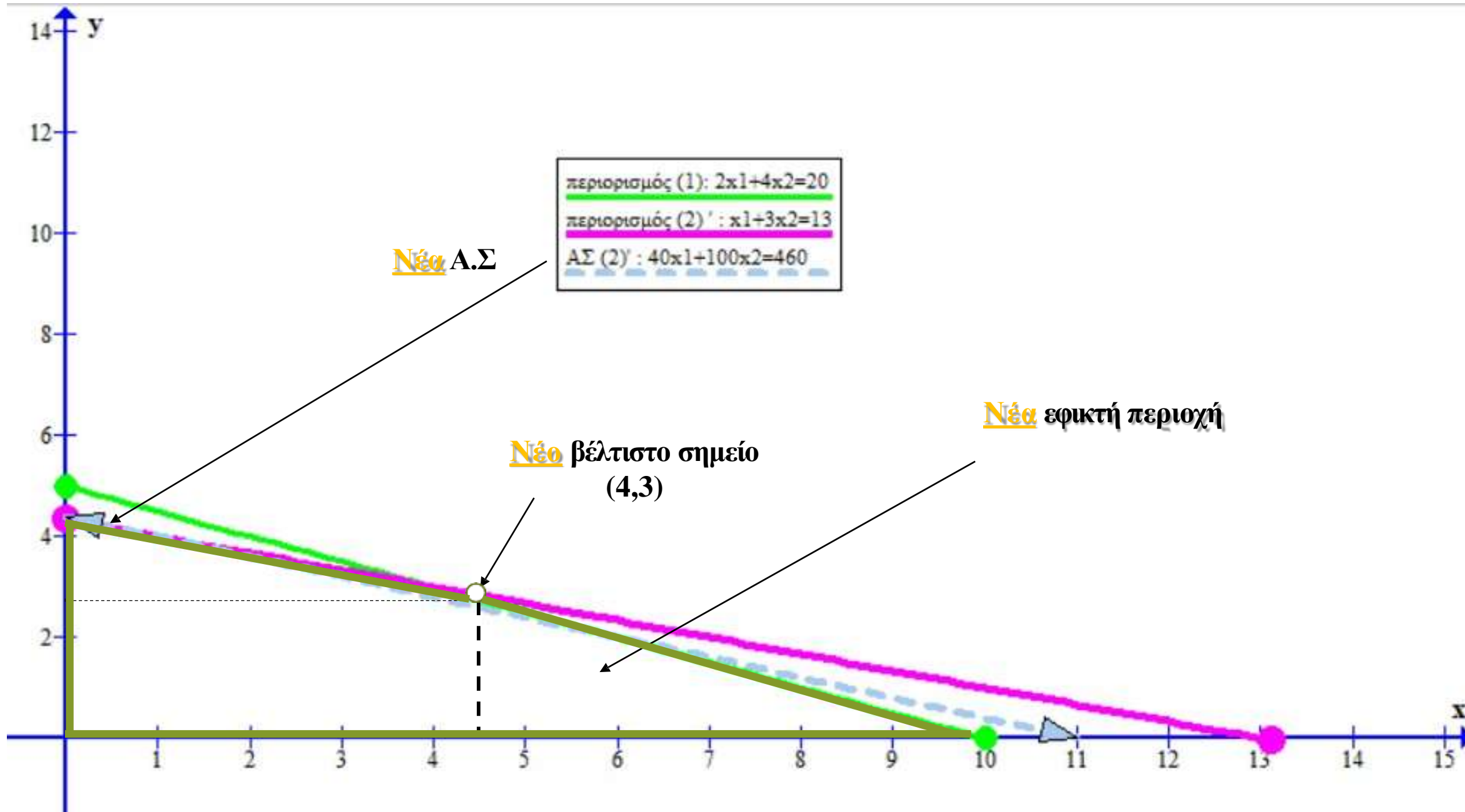
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση :  $2 * x_1 + 4 * x_2 = 20$

$$x_1 + 3 * x_2 = 13$$

Επομένως **νέο** βέλτιστο σημείο :  $(x_1=4, x_2=3)$

**Νέα** τιμή Α.Σ.:  $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 = \mathbf{460}$



**ii. Οριακή Μείωση** των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3 * x_2 \leq \mathbf{11}$$

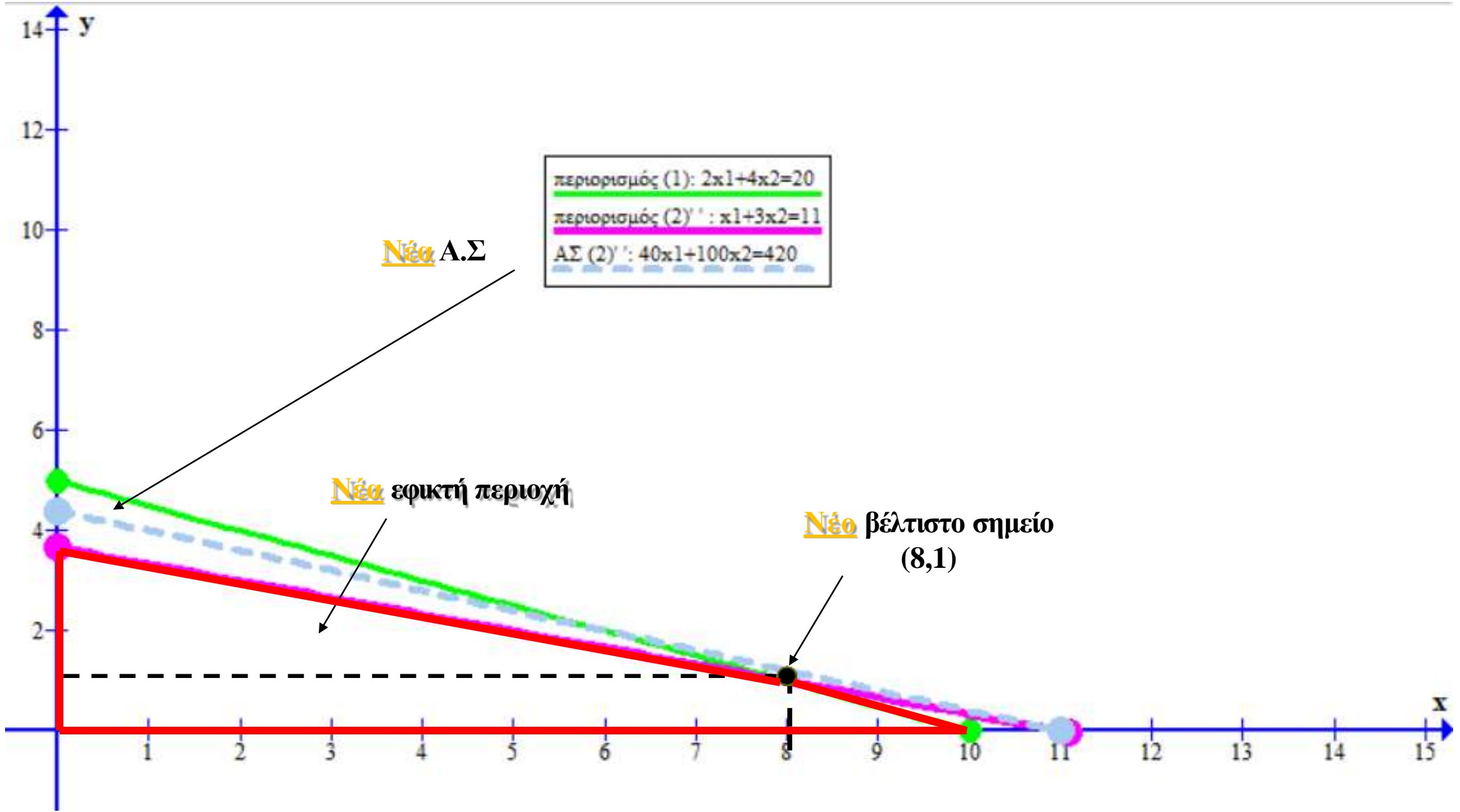
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση :  $2 * x_1 + 4 * x_2 = 20$

$$x_1 + 3 * x_2 = 11$$

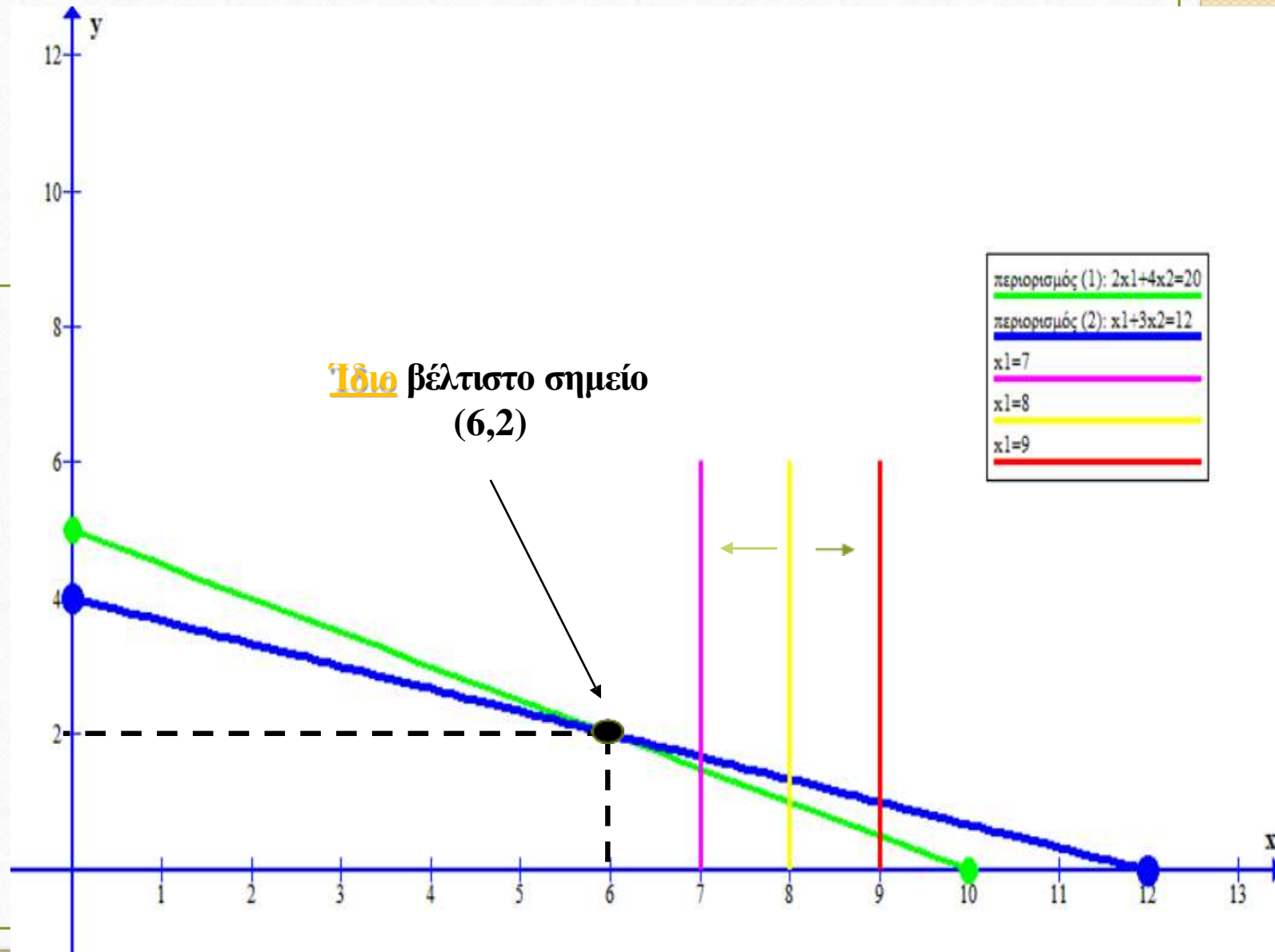
Επομένως **νέο** βέλτιστο σημείο :  $(x_1=8, x_2=1)$

**Νέα** τιμή Α.Σ.:  $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 = \mathbf{420}$



# Μεταβολές του μη- δεσμευτικού Περιορισμού

- Ίδιο βέλτιστο σημείο  
⇒ ίδια τιμή Α.Σ.
- Σκιώδη τιμή=0





# Ταυτοχρονες μεταβολες

- **Μείωση (οριακή)** των ωρών λειτουργίας και των δύο μηχανημάτων Α και Β

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

---

s.t.  $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20 \quad \Rightarrow \quad 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 19$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3 * x_2 \leq 11$$

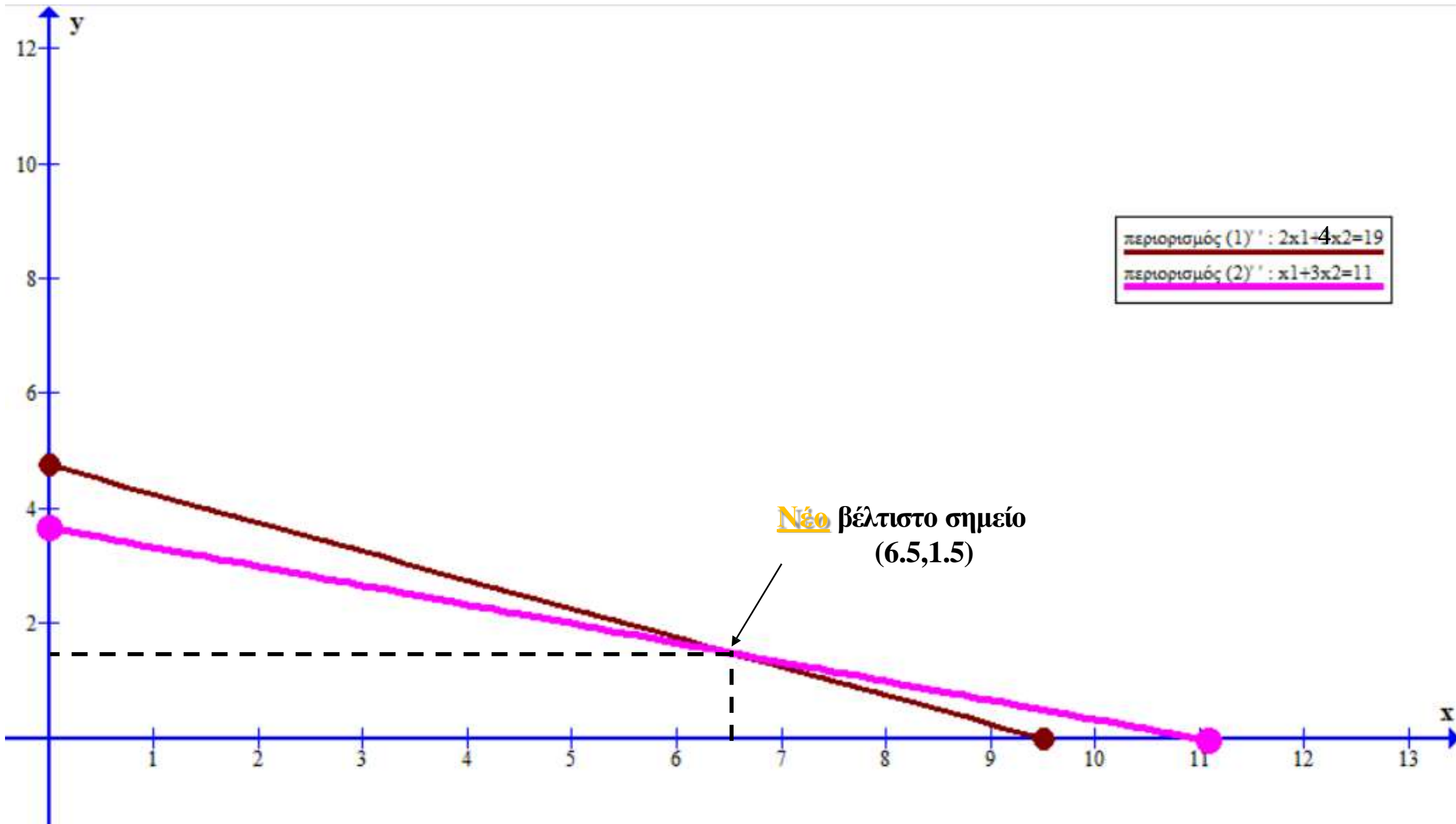
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση :  $2 * x_1 + 4 * x_2 = 19$

$$x_1 + 3 * x_2 = 11$$

Επομένως **νέο** βέλτιστο σημείο :  $(x_1=6.5, x_2=1.5)$

- **Αδυναμία υπολογισμού Σκιώδους τιμής. Γιατί;**



περιορισμός (1)' :  $2x_1 - 4x_2 = 19$   
περιορισμός (2)' :  $x_1 + 3x_2 = 11$

**Νέο** βέλτιστο σημείο  
(6.5, 1.5)

# Παράδειγμα για το σπίτι

Μία σοκολατοποιία παράγει δύο τύπους σοκολάτας, τους A και B. Για την παρασκευή μιας σοκολά-τας τύπου A χρειάζονται 1 μονάδα γάλα και 2 μονάδες κακάο, ενώ για την παρασκευή μιας σοκολάτας τύπου B χρειάζονται 1 μονάδα γάλα και 3 μονάδες κακάο. Το εργοστάσιο διαθέτει κάθε μέρα 5.000 μονάδες γάλα και 12.000 μονάδες κακάο. Η επιχείρηση έχει κέρδος 0,8 Ευρώ από κάθε σοκολάτα τύπου A και 1 Ευρώ από κάθε σοκολάτα τύπου B. Επίσης, έχει συνάψει μια συμφωνία με έναν πελάτη που απαιτεί να παραδίδει τουλάχιστον 1.000 σοκολάτες τύπου B κάθε μέρα.

- Η διοίκηση της επιχείρησης επιθυμεί να προσδιορίσει πόσες σοκολάτες τύπου A και τύπου B θα πρέπει να παράγει καθημερινά, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Διατυπώστε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση αυτού του προβλήματος. Εξηγήστε με σαφήνεια τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και το φυσικό νόημα των περιορισμών του μοντέλου σας.
- Σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων κατασκευάστε τον χώρο των εφικτών λύσεων (εφικτή περιοχή). Εξηγήστε πώς προκύπτει, προσδιορίστε τις συντεταγμένες των κορυφών του και σκιαγραφήστε τον. Χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις γνωστές προσεγγίσεις της γραφικής επίλυσης, βρείτε και διατυπώστε τη βέλτιστη λύση και την άριστη τιμή. Πόσες μονάδες σοκολάτας τύπου A και τύπου B πρέπει να παράγει το εργοστάσιο καθημερινά έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος του;