ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

Ανάλυση Ευαισθησίας-Sensitivity Analysis

SENSITIVITY ANALYSIS- ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Αφορά την μελέτη των μεταβολών που θα τελεστούν στην βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εάν παρουσιαστούν κάποιες μεταβολές των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος.

Ακολουθούν:

1. Παραμετρική Ανάλυση
2. Ανάλυση Ευστάθειας

SENSITIVITY ANALYSIS- ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Θα πρέπει να εξεταστούν χωριστά οι κάτωθι περιπτώσεις:

1. Μεταβολή συντελεστών κόστους
2. Μεταβολή σταθερών όρων
3. Μεταβολή των συντελεστών του συστήματος των περιορισμών
4. Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών
5. Προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών

Some Definitions (again…….)

Ας θεωρήσουμε ένα π.γ.π σε κανονική μορφή

$$\max c' x \quad x, c \in M_{nx1}, b \in M_{mx1}, A \in M_{mxn}$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1^* \\ \\ A_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1^* \\ \\ b_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_\beta^* \\ \\ x_m \end{bmatrix}, c = [c_1, \ldots, c_m]'$$

Δίνεται η άριστη λύση του $x_0 = [x_{10} \;\; x_{20} \;\; x_{m0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}]'$ και συμβολίζουμε με $A_j = [P_1, P_2, \ldots, P_m]$, τον αντίστοιχο βασικό πίνακα. Εάν οι στήλες του τελικού tableau

$$\Upsilon_0, \Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_n$$

Some Definitions (again…….)

Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εάν οι στήλες του τελικού μας άριστου tableau $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$ τότε

$$Y_0 = A_1^{*-1} b \Leftrightarrow Y_j = A_1^{*-1} P_j, \kappa\alpha\iota$$

$$z_0 = c_B^{'} Y_0 = c_B^{'} A_1^{*-1} b, \kappa\alpha\iota$$

$$z_j - c_j = c_B^{'} Y_j - c_j = c_B^{'} A_1^{*-1} P_j - c_j$$

Τελικό Tableau

- Το τελικό μας tableau έχει την εξής σύνθεση:

$A_1^{*-1} b$	$A_1^{*-1} A$
$c'_B A_1^{*-1} b$	$c'_B A_1^{*-1} A - c'$

Μεταβολή συντελεστών κόστους ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Στην περίπτωση της μεταβολής των συντελεστών κόστους c_j . Στο τελικό μας tableau επηρεάζεται μοναχά η τελευταία του γραμμή. Συνεπώς θα πρέπει να κοιτάξουμε εάν θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα νέο διάνυσμα $c_j^* = \left[c_1^* \; c_2^* \ldots\ldots c_n^*\right]'$ το πώς επηρεάζεται η διαφορά $z_j - c_j$.

Εάν η διαφορά παραμένει αρνητική τότε η λύση μας παραμένει άριστη ενώ εάν η διαφορά δεν είναι αρνητική θα πρέπει να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο της Simplex.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η άριστη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

$$\max z = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ & -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 2 \\ & 7x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \\ & 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

εάν $c^* = [-\mathbf{3} \;\; \mathbf{8} \;\; \mathbf{2}]'$

Μεταβολή σταθερών όρων ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Εάν σκεφτούμε τώρα την μέθοδο Simplex θα καταλάβουμε ότι η μεταβολή του διανύσματος των σταθερών όρων επιφέρει μεταβολές στην πρώτη στήλη του κάθε tableau. Στην θεωρία μας λοιπόν και στο π.γ.π αντικαθιστούμε την πρώτη στήλη $\begin{pmatrix} Y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ με $\begin{pmatrix} \mathrm{Y}_0 \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$

Μεταβολή των α_{ij}
ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο περιπτώσεις:

1) Οι μεταβολές δεν αφορούν τις βασικές στήλες της άριστης λύσης του π.γ.π

2) Οι μεταβολές αφορούν και τις βασικές στήλες της άριστης λύσης του π.γ.π

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε την άριστη λύση του π.γ.π

$$\max z = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$
\begin{aligned}
s.t \quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\
& -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
& 7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\
& 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

εάν αντί των δύο πρώτων περιορισμών έχουμε ότι: $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 2, -x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2$

Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε νέα μεταβλητή που εισέρχεται ή αφαιρείται υπήρχε στο αρχικό π.γ.π. Άρα για τις μη βασικές μεταβλητές θα πρέπει να διαγράψουμε την αντίστοιχη στήλη του tableau ενώ για τις βασικές πρέπει να βγάλουμε από την βάση τις αντίστοιχες στήλες και μετα να τις διαγράψουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε την άριστη λύση του π.γ.π

$$\max z = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & 7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

εάν προστεθούν οι μεταβλητές x_8, x_9, με $c_8 = 2, c_9 = -3$ και

$$x_8 = [4 \ \ -2 \ \ 0 \ \ -3]', \ x_9 = [0 \ \ 5 \ \ 3 \ \ 0]'$$

Προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Ελέγχουμε εάν η βέλτιστη λύση επαληθεύει τον νέο περιορισμό. Εάν ναι ο περιορισμός είναι ανενεργός και εάν όχι θ προκύψει μια νέα λύση. Για να την υπολογίσουμε θα πρέπει:

1. Να χρησιμοποιήσουμε το δυικό και άρα ο περιορισμός να γίνει μεταβλητή
2. Να εισάγουμε το νέο περιορισμό με την μορφή εξίσωσης στο βέλτιστο πίνακα του πρωτεύοντος και να δημιουργήσουμε μια μη βασική δυνατή λύση και μετά να εφαρμόσουμε το δυικό simplex algorithm.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε την άριστη λύση του π.γ.π

$$\max z = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & 7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

εάν δεν χρειάζεται ο πρώτος περιορισμός και όταν προστεθεί ο περιορισμός $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Σημειώσεις από το e-class
- Κεφάλαιο 6ο από το βιβλίο των Χατζησταμούλου-Κουνετάς
- Κεφάλαιο 3ο Τσάντας-Βασιλείου
- Κεφάλαιο 8ο του Σίσκου.