ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα, Operational Research είναι επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την αριστοποίηση (βελτιστοποίησης) τους και τη λήψη αποφάσεων. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων ως μαθηματικά μοντέλα.

Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στις αρχές του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου και αποδόθηκε στην οργάνωση στρατιωτικών δραστηριοτήτων Μεγάλης Βρετανίας καθώς οι ανάγκες κατανομής του υπάρχοντος δυναμικού, ανθρώπινου και υλικού, σε μια μεγάλη ποικιλία στρατιωτικών επιχειρήσεων αποτέλεσε κύριο πραγματικό και μετέπειετα ερευνητικό ζήτημα για πολλούς επιστήμονες απο διαφορετικές ειδικότητες. Μάλιστα Μετά τον Β’ Παγκόσμιο Πόλεμο καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στις ΗΠΑ ενώ τις δεκαετίες του 1950 και 1960 αναπτύχθηκαν οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα..

Η αποτελεσματικότητα του νέου κλάδου προσέλκυσε το ενδιαφέρον της βιομηχανίας. Από την άλλη πλευρά, η πρόοδος των Η/Υ προκάλεσε και ταυτόχρονη ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας σε πολλά επίπεδα. Τα προβλήματα είναι πλέον τόσο μεγάλα σε πλήθος δεδομένων που είναι αδύνατη η εκτέλεση τον απαιτούμενων υπολογισμών με το χέρι. Ποιο συγκεκριμένα οι μεταβολές στο οικονομικό και επιχειρησιακό περιβάλλον, η αύξηση της πολυπλοκότητας της μεταβλητότητας καθώς και της αλληλεξάρτησης των διαφόρων φαινομένων και οι ανάγκες υποστήριξης για σφαιρική προσέγγιση προβλημάτων, για συστηματική ανάλυση και λήψης αποφάσεων συμβάλλει στην χρησιμοποίηση της επιχειρησιακής έρευνας ως ένα απαραίτητο εργαλείο.

Οι κατηγορίες μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας που καταγράφονται στην βιβλιογραφία παρουσιάζονται παρακάτω:

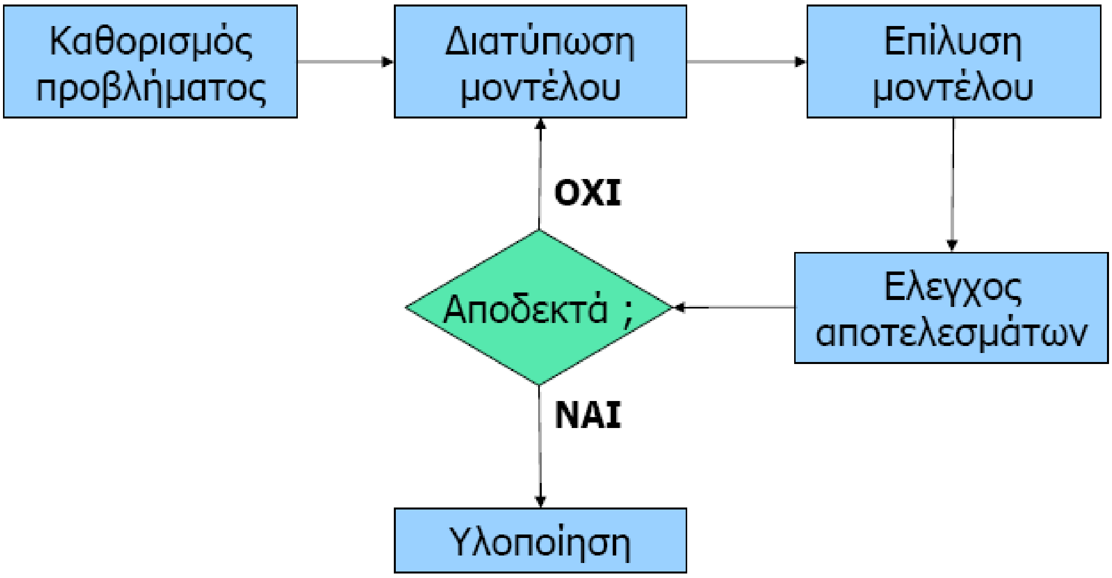
- Μαθηματικός Προγραμματισμός
- Δένδρα αποφάσεων (Decision trees)
- Πολυκριτηριακή Ανάλυση (Multiple Criteria Decision Analysis)
- Ανάλυση δικτύων (Network flows, PERT, CPM)
- Διαχείριση αποθεμάτων (Inventory control, EOQ)
- Γραμμές αναμονής (Queuing theory)
- Στοχαστικές Διεργασίες (Stochastic Processes)
- Θεωρία παιγνίων (Game theory)
- Προσομοίωση (simulation)

Τα στάδια που ακολουθούνται στην αντιμετώπιση ενός προβλήματος Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα εξής:

- Αναγνώριση και διατύπωση του προβλήματος
- Κατασκευή μαθηματικού μοντέλου
- Εύρεση της λύσης του μοντέλου
- Έλεγχος του μοντέλου και της λύσης
- Εφαρμογή της τελικής λύσης

Τα τρία πρώτα στάδια συχνά αναφέρονται και σαν μοντελοποίηση του προβλήματος. Το μαθηματικό μοντέλο ενός προβλήματος περιλαμβάνει:

- Τις μεταβλητές (μεταβάλουμε για να πετύχουμε το στόχο)
- Τις παραμέτρους (Τεχνολογικοί συντελεστές)
- Τους περιορισμούς (ή συνθήκες) - μορφή ανισοτήτων
- Τον αντικειμενικό στόχο (ή αντικειμενική συνάρτηση) δεν είναι πάντα μοναδικός αλλά μπορεί να αποτελείται από επί μέρους στόχους



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Βασικές Έννοιες Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί ενα ξεχωριστό μέρος της επιχειρησιακής έρευνας. Κύριος στόχος του γραμμικού προγραμματισμού η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση γραμμικών πραγματικών συναρτήσεων κάτω από ορισμένους περιορισμούς για τις μεταβλητές που αποτελεούν το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα επειδή τα συνήθη προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα τα οποία είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. κύριος σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος ή το χρόνος δεδομένου ότι στην εκάστοτε διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται κ.λ.π. Μάλιστα αρκετοί ερευνητές χρησιμοποιούν τον γραμμικό προγραμματισμό για τη προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (π.χ resource allocation problem). Ενδεικτικά παραδείγματα γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνουν:

- Την κατανομή σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες του εργατικού δυναμικού, του τεχνολογικού εξοπλισμού και των πρώτων υλών.
- Την κατανομή του κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά σχέδια.

- Τον προγραμματισμός της διακίνησης των προϊόντων μιας επιχείρησης προς τους πελάτες της.
- Την κατανομή υδατικών πόρων σε διάφορες ανταγωνιστικές χρήσεις.

Το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτών των αποφάσεων μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις, την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, την ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον, κ.λ.π.

Τα κύρια στοιχεία που χρησιμοποιούνται, γενικά, σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι τα εξής:

- Μεταβλητές απόφασης: x_1, x_2 ,... x_N : N ανταγωνιστικές δραστηριότητες
- Περιορισμοί: b_1, b_2,... b_M: M διαθέσιμοι πόροι (Δεξιά σκέλη περιορισμών)

$f_1(x_i)$, $f_2(x_i)$,... $f_M(x_i)$: ρυθμός κατανάλωσης των πόρων στις ανταγωνιστικές δραστηριότητες (M γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης)

- Τεχνολογικοί συντελεστές: aij: παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη σχέση κάθε μεταβλητής απόφασης i με τον περιορισμό j.
- Αντικειμενική συνάρτηση $f(x_i)$: Επικεντρώνεται στον στόχος της απόφασης της γραμμικής συνάρτησης των μεταβλητών απόφασης (μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση).

Συνεπώς ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αποτελείται από μια αντικειμενική συνάρτηση και από ένα σύνολο περιορισμών. Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το στόχο που επιχειρείται να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί και είναι μια σχέση μεταξύ μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών που ονομάζονται μεταβλητές απόφασης. Οι περιορισμοί (δυναμικότητας, διαθεσιμότητας πόρων, τεχνολογίας, κ.λ.π.) εκφράζουν τους περιορισμούς του περιβάλλοντος στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα. Κάθε συνδυασμός τιμών που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές απόφασης ονομάζεται λύση του προβλήματος. Όταν οι τιμές αυτές ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος, η λύση ονομάζεται εφικτή λύση

Βασικοί Ορισμοί Π.Γ.Π

Λύση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος $A\overline{x} \leq,=,\geq \overline{b}$, δηλαδή κάθε διάνυσμα x* που ικανοποιεί το σύστημα αυτό.

Δυνατή (ή εφικτή) λύση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα x* που ικανοποιεί τους περιορισμούς x≥0.

Βέλτιστη δυνατή λύση (βέλτιστη λύση) του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση αυτού, που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

Βάση του συστήματος (ή βάση) είναι ο πίνακας m×m, που προκύπτει από τον πίνακα A του συστήματος, και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσεως, λέγονται **βασικές μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.Οι υπόλοιπες (n-m) μεταβλητές που αντιστοιχούν στις (n-m) στήλες του πίνακα A που δεν περιλαμβάνονται στη βάση λέγονται **μη - βασικές μεταβλητές**.

Βασική εφικτή λύση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση Αι, είναι μια εφικτή λύση αυτού, που έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές, ως προς τη βάση αυτή, διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.

Ωστόσο οι παραπάνω βασικές, εφικτές ή μη λύσεις ή και απλά οι λύσεις ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ακολουθούν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος

2. Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτό κλειστό σύνολο.

3. Κάθε βασική εφικτή λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

4. Αν υπάρχει μια εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε υπάρχει και μια βασική εφικτή λύση αυτού.

5. Αν υπάρχει μια βέλτιστη εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική εφικτή λύση.

6. Αν υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη εφικτή λύση, που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι εξετάζουμε την παραγωγή δύο διαφορετικού τύπου βενζίνης απο ένα διυλιστήριο το όποίο έχει δύο εισόδους A και B. Η βενζίνη που παράγει είναι δύο ειδών super, unleaded. Θεωρούμε τις εξής διαδικασίες P,Q.

Πίνακας 1.

Διαδικασίες	Input		Output		Κέρδος	
	A	B	C	D		
P	6	4	5	2	2	x
Q	3	5	2	4	3	y
Απόθεμα	180	200	100	80	Απαιτήσεις	

Το βασικό μας ερώτημα εδώ αφορά τις σχέσεις που θα πρέπει να ισχύουν έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέδος του δυιλιστηρίου. Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το κέδος θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία P εκτελείται x-φορές ενώ η διαδικασία Q y-φορές. Άρα το επιδιωκόμενο κέρδος του δυιλησtηρίου θα είναι $z = 2x + 3y$ (1).

Προφανώς το δυιλιστίριο θα επιθυμούσε να πετύχαινε το μέγιστο κέρδος. Ωστόσο η τιμή αυτή επηρεάζεται απο το απόθεμα των καυσίμων που παράγει καθώς κια απο τις απαιτήσεις των καταναλωτών. Στην γλώσσα του μαθηματικού προγραμματισμού οι περιορισμοί αυτοί καλούντια φυσικοί περιορισμοί.

Με βάση τα παραπάνω το πρόβλημα μας τώρα δεν εστιάζεται μόνο στην προηγούμενη σχέση (1) αλλά διαφοροποιείται και γίνεται $\begin{matrix} \max z = 2x + 3y \\ 6x + 3y \le 180 \end{matrix}$ (2).

Αύξηση του πλήθους των περιορισμων περιορίζουν το σημείο ακρότατου (μέγιστο) με άλλα λόγια η τιμή του καθορίζεται και επηρεάζεται απο περισσότερους παράγοντες. Γυρνώντας στο παράδειγμα μας τώρα οι περιορισμού που ισχύουν με βάση τον πίνακα 1 διαμορφώνουν το πρόβλημα μας ως εξής:

$$\begin{aligned} &\max z = 2x + 3y \\ &6x + 3y \le 180 \\ &4x + 5y \le 200 \qquad\qquad (3) \\ &5x + 2y \le 80 \\ &x, y \ge 0 \end{aligned}$$

Έχοντας εξετάσεις το παραπάνω πρόβλημα και διαμορφώνοντας με βάση τα στοιχεία που έχουμε στην διάθεσή μας το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις προϋποθέσεις που θα πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις αυτές δίνονται παρακάτω:

1. Προσθετικότητα

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι άμεσα αναλογική με το επίπεδο της δραστηριότητας . Όταν το επίπεδο της

δραστηριότητας αυξάνει ή μειώνεται , η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που οφείλεται στην αλλαγή μίας μονάδας της δραστηριότητας παραμένει ίδια .επίσης το ποσό των πόρων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δραστηριότητα είναι άμεσα ανάλογο με το επίπεδο της δραστηριότητας.

2. Αναλογικότητα

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το άθροισμα της συνεισφοράς κάθε μίας δραστηριότητας. Όμοια, το συνολικό ποσό των πόρων που χρησιμοποιείται από όλες τις δραστηριότητες είναι το άθροισμα του ποσού των πόρων που κάθε μία δραστηριότητα χρησιμοποιεί ανεξάρτητα.

3. Διαιρετότητα

Όλες οι δραστηριότητες είναι συνεχείς και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Δηλαδή ο Γ.Π. δεν είναι κατάλληλος για προβλήματα που οι μεταβλητές λήψης απόφασης είναι ακέραιοι.

4. Καθοριστικότητα

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού καταγράφονται και ως καθοριστικά υποδείγματα. Με άλλα λόγια δεν λαμβάνουν υπόψη ότι όλοι οι συντελεστές είναι προσεγγίσεις , όταν υπολογίζει μία συγκεκριμένη λύση. Γι'αυτό πρέπει να γίνεται ανάλυση ευαισθησίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα, τα Π1, Π2 και Π3. Για την παραγωγή των προϊόντων απαιτείται επεξεργασία από τρεις μηχανές, τις Α, Β και Γ. Ο χρόνος επεξεργασίας των προϊόντων στις μηχανές αντίστοιχα δίνεται στον ακόλουθο πίνακα, μαζί με τις διαθέσιμες εβδομαδιαίες ώρες των μηχανών.

Μηχανές	Π1	Π2	Π3	Δυναμικότητα Μηχανών (h)
Α	9	3	5	500
Β	5	4	0	350
Γ	3	0	2	150

Λόγω προηγούμενων συμβάσεων που έχουν υπογραφεί, η επιχείρηση πρέπει να παράγει τουλάχιστον 20 μονάδες του προϊόντος Π3 την εβδομάδα. Το ανά μονάδα κέρδος των προϊόντων είναι 50, 20 και 25€ αντίστοιχα. Ζητείται να βρεθεί η άριστη ποσότητα παραγωγής των προϊόντων ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Μια εταιρεία ετοιμάζεται να εισάγει ένα νέο προϊόν. Έχει επιλέξει για την διαφημιστική της εκστρατεία 4 διαφημιστικά μέσα: τηλεόραση, ραδιόφωνο, διαδίκτυο, έντυπα μέσα. Το μοναδιαίο κόστος διαφήμισης για κάθε μέσο φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί. Επιπλέον, η αποδοτικότητα της διαφημιστικής εκστρατείας θα μετρηθεί με βάση τον αριθμό των ατόμων που θα εκτεθούν σε αυτή, υπολογίζοντας ένα μοναδιαίο δείκτη ακροαματικότητα / θεαματικότητας / επισκεψιμότητας σε κάθε μέσο. Όσο πιο υψηλός είναι ο δείκτης, τόσο πιο επιτυχημένο είναι το μέσο.

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Διαδίκτυο	Έντυπα Μέσα
Κόστος (€)	100	10	60	40
Δείκτης Αποδοτικότητας	100	22	70	50

Υπάρχουν οι ακόλουθοι περιορισμοί:

1) Το συνολικό κόστος δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 30000€.
2) Δεν μπορούν να μπούν περισσότερες από 12 διαφημίσεις στο διαδίκτυο.
3) Ο αριθμός των διαφημίσεων στο διαδίκτυο και τα έντυπα μέσα, δεν πρέπει να υπερβαίνει το 40% των διαφημίσεων που εκπέμπονται σε τηλεόραση και ραδιόφωνο.
4) Στην τηλεόραση και στο ραδιόφωνο πρέπει να προβληθούν τουλάχιστον 10 διαφημίσεις.

Να βρεθεί ο βέλτιστος αριθμός των διαφημίσεων σε κάθε μέσο, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ακροαματικότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).

Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Σχεδιάζουμε ένα σύστημα αξόνων για τις μεταβλητές X και Y.
2. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε μια-μια κάθε ανισότητα του μοντέλου (δηλ. σχεδιάζουμε την αντίστοιχη ισότητα και αποκλείουμε το ημιεπίπεδο που δεν ικανοποιεί την ανισότητα).
3. Η περιοχή που απομένει περιέχει το σύνολο των **εφικτών** λύσεων, δηλαδή όσων δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς ή τις συνθήκες.
4. Σχεδιάζουμε την αντικειμενική συνάρτηση και βρίσκουμε ποια από τις εφικτές λύσεις την μεγιστοποιεί ή την ελαχιστοποιεί (ανάλογα).
5. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι οι βέλτιστες τιμές των X και Y που ζητάμε.

Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης.

Ο πρώτος τρόπος είναι η προσέγγιση της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

Ο δεύτερος τρόπος είναι η προσέγγιση της χάραξης των καμπύλων ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης. Βρίσκουμε το σημείο όπου η ισοκερδής εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν την εγκαταλείψει.

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Περιοριστική ευθεία είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
- Κορυφή ή ακραίο σημείο είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.
- Εφικτή περιοχή είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.
- Εφικτή λύση (ακραίου σημείου) είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Γειτονικές εφικτές λύσεις (ακραίου σημείου) είναι αυτές που συνδέονται με μια ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής.
- Βασική λύση (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.
- Βασική εφικτή λύση είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Άριστη (βέλτιστη) λύση είναι η βασική εφικτή λύση ακραίου σημείου (κορυφή της εφικτής περιοχής) που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Δύναται να είναι ακριβώς μια, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις με άπειρες άριστες λύσεις, καμία άριστη λύση, ή η αντικειμενική συνάρτηση να τείνει στο άπειρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένας κτηνοτρόφος θέλει να προετοιμάσει ένα μείγμα από τις τροφές Α και Β. Κάθε κιλό της τροφής Α περιέχει 120 γρ. πρωτεΐνες, 56 γρ. υδατάνθρακες, 103 γρ. λίπη και κοστίζει 24 ευρώ. Κάθε κιλό της τροφής Β περιέχει 60 γρ. πρωτεΐνες, 112γρ. υδατάνθρακες και 120γρ. λίπη και κοστίζει 18 ευρώ. Το μείγμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 480 γρ. πρωτεΐνες, 448 γρ. υδατάνθρακες και 720 γρ. λίπη. Ο κτηνοτρόφος θέλει να παρασκευάσει το μείγμα κατά τέτοιο τρόπο που να πληρούνται οι περιορισμοί και να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αν x_1 και x_2 είναι τα κιλά των τροφών Α και Β που θα αποτελέσουν το μείγμα με το ελάχιστο κόστος τότε το πρόβλημα σε μαθηματική μορφή είναι :

$$\min z = 24x_1 + 18x_2$$

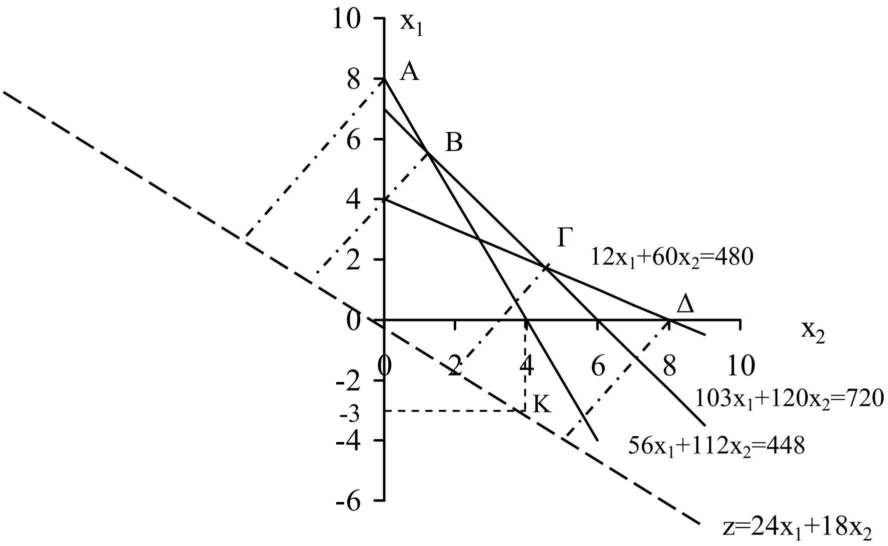
Η σχέση αυτή εκφράζει την οικονομική ή αντικειμενική συνάρτηση της οποίας ζητάμε το μέγιστο. Στο πρόβλημα αυτό θα έχουμε ένα σύστημα περιορισμών με τρεις ανισώσεις:

Περιορισμός πρωτεϊνών	$120x_1+60x_2\geq480$
Περιορισμός υδατανθρακών:	$56x_1+112x_2\geq448$
Περιορισμός λιπών:	$103x_1+120x_2\geq7208$

Αρχικά κάνουμε τη γραφική επίλυση του συστήματος των περιορισμών. Λόγω του γεγονότος ότι $x_1,x_2\geq0$, θα εργασθούμε μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Επομένως κάνουμε τη γραφική παράσταση (σχήμα 1) των ευθειών:

$120x_1+60x_2=480$
$56x_1+112x_2=448$
$103x_1+120x_2=7208$

Το σύστημα των περιορισμών έχει λύσεις όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται δεξιά και άνω της πολυγωνικής γραμμής x_1ΑΒΓΔx_2 όπως και αυτά που βρίσκονται πάνω στην πολυγωνική γραμμή λόγω της ύπαρξης του σημείου ισότητας στις ανισώσεις του συστήματος $\min z = 24x_1 + 18x_2$. Το σύστημα επομένως έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή άπειρους συνδυασμούς x_1και x_2 που το ικανοποιούν. Ειδικότερα ένα από τα σημεία των κορυφών Α.Β.Γ.Δ. δίνει τον άριστο συνδυασμό των x_1και x_2 που ελαχιστοποιεί την οικονομική συνάρτηση. Για την εύρεση της «καλύτερης κορυφής» βρίσκουμε την κλίση της οικονομικής συνάρτησης



Σχήμα 1 Διαγραμματική επίλυση ελαχίστου

Η κορυφή που απέχει λιγότερο από την ευθεία $\min z = 24x_1 + 18x_2$, που διέρχεται από την αρχή Ο, είναι η «καλύτερη κορυφή». Έτσι έχουμε : $24x_1 = Z - 18x_2$

ή $x_1 = \frac{1}{24}Z - \frac{18}{24}x_2$ συνεπώς η κλίση είναι : $-\frac{18}{24} = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$

Άρα το σημείο Κ που με την αρχή 0 ορίζουν τη θέση της ευθείας ΟΚ, δηλαδή της ευθείας $Z=24x_1+18x_2$ που διέρχεται από την αρχή, έχει συντεταγμένες (4, -3).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.2. η κορυφή Γ απέχει λιγότερο από την ευθεία ΟΚ. Οι συντεταγμένες επομένως x_1, x_2 της κορυφής Γ ελαχιστοποιούν την οικονομική συνάρτηση. Για την εύρεση των συντεταγμένων αυτών λύνεται το σύστημα των ευθειών που η τομή τους είναι το σημείο Γ. Οι ευθείες αυτές είναι :

$120x_1+60x_2=480$
$103x_1+120x_2=7208$

Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι:

$x_1=1,752$
$x_2=4,496$

Έτσι το ελάχιστο της οικονομικής συνάρτησης είναι:

$$\min z=24x_1+18x_2=(24*1,752)+(18*4,496)=122,98$$

Συνεπώς αν ο κτηνοτρόφος θέλει το μείγμα από τις τροφές Α και Β να του κοστίζει το λιγότερο δυνατόν και να πληροί τους περιορισμούς ως προς το ελάχιστο των πρωτεϊνών, υδατανθράκων και λιπών, πρέπει να αναμίξει 1,752χλγ. της τροφής Α με 4,496χλγ. της τροφής Β. Το κόστος τότε του μείγματος αυτών θα είναι 122,98 ευρώ.

Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι εκτός από την περίπτωση που έχουμε εφικτή λύση στην επίλυση π.γ.π συμπεριλαμβάνονται η απειρία, οι απεριόριστες καθώς και οι αδύνατες λύσει όπως παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα:

Απεριόριστη Λύση:

ΥΤΠ:

$X, Y \geq 0$

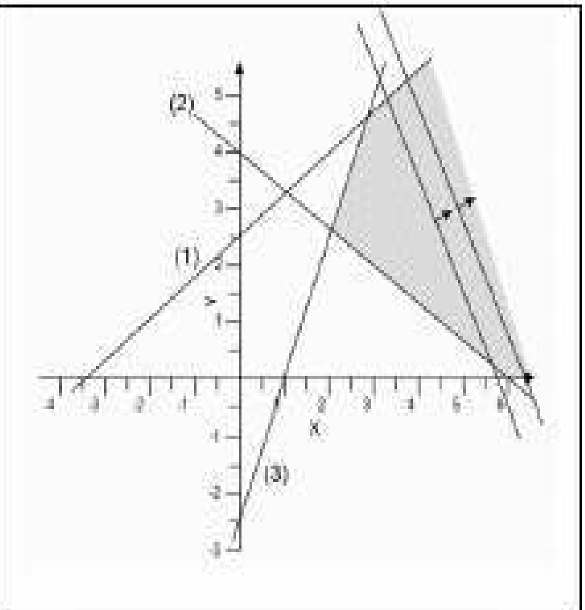
(1) $-6X + 8Y \geq 20$

(2) $2X + 3Y \geq 12$

(3) $10X - 4Y \geq 10$

ΑΣ:

$\max(4X + 2Y)$



Απειρία Λύσεων:

ΥΤΠ:

$X, Y \geq 0$

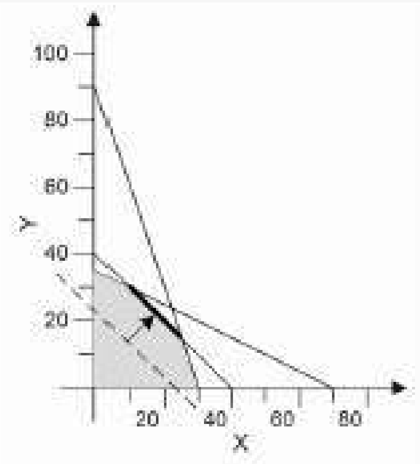
(1) $3X + Y \leq 90$

(2) $2X + 2Y \leq 80$

(3) $X + 2Y \leq 70$

ΑΣ:

$\max(6X + 6Y)$



Αδύνατη Λύση:

ΥΤΠ:

$X, Y \geq 0$

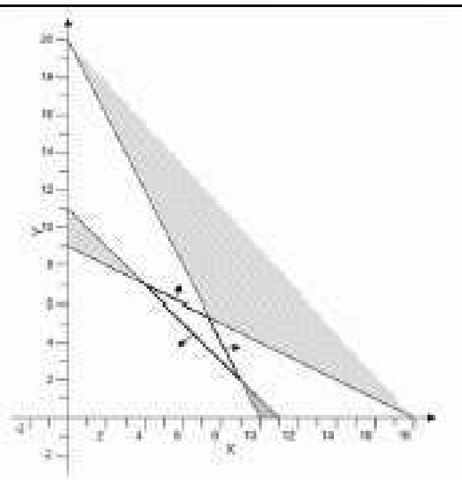
(1) $2X + Y \geq 20$

(2) $X + Y \leq 11$

(3) $X + 2Y \geq 18$

ΑΣ:

$\max(2X + 3Y)$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η Μέθοδος Simplex

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο βρίσκεται σε τυπική μορφή. Σκοπός μας είναι να παρέχουμε μια απλή και περιγραφική διαδικασία για το πώς αυτό το πρόβλημα θα λυθεί με την συγκεκριμένη μέθοδο.

$$
\begin{aligned}
&\max z = 6x_1 + 7x_2 \\
&s.t \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\
&\qquad\qquad 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε και να αποδοθεί ως:

$$
\begin{aligned}
&\max z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
&s.t \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 12 \\
&\qquad\qquad 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 8 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Αρχικά για να σχηματίσουμε τον πίνακα Tableau του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να υπολογίσουμε –εντοπίσουμε μια βάση της λύσης. Με τον όρο βάση εννοούμε τα διανύσματα της μορφής $(1,0,0.....,0),(0,1,0,.....,0)........(0,0,....,1)$ του διανυσματικού χώρου R^n. Δηλαδή τις στήλες από τα x_j που σχηματίζουν τον nxn πίνακα. Στην δεύτερη στήλη (c_B) του Tableau εισάγουμε τους συντελεστές τους αντίστοιχους συντελεστές της βάσης όπως αυτοί εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση $z, (x_3 = 0), (x_4 = 0)$. Στην Τρίτη τώρα στήλη του Tableau (x_B) εισέρχεται η στήλη b. Τέλος στις επόμενες στήλες τοποθετούμε τους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών του προβλήματος γ.π βρισκόμενο πάντα σε τυπική μορφή.Με βάση τα παραπάνω το Tableau σχηματίζεται ως εξής:

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	
	0	8	2	1	0	1	
	z						

Στην στήλη δίπλα στο c_j εμφανίζονται οι συντελεστές όπως αυτοί βρίσκονται στην αντικειμενική συνάρτηση. Τώρα οι κενές θέσεις στο Tableau συμπληρώνονται με τα άγνωστα μέχρι στιγμής στοιχεία k_j.

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Πως όμως υπολογίζονται οι τιμές των στοιχείων αυτών. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να κάνουμε τον διαχωρισμό και να αναφέρουμε ότι για $k_j, j = 1,...,5$ τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $c_b * b$. Άρα το $k_1 = 0*12 + 0*8 = 0$ ενώ τα υπόλοιπα υπολογίζονται με βάση των εξής τύπο $k_j = c_j - c_b * b$. Εάν τώρα κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις θα έχουμε ότι ο πίνακάς μας παίρνει την παρακάτω μορφή:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	$k_2 =$ $6-(2\cdot 0+2\cdot 0)$ $=6$	$k_3=7-(3\cdot 0+1\cdot 0)$ $=7$	$k_4 = 0$	$k_5 = 0$	

Tableau 1

Να σημειώσουμε ότι τα υπολογισμένα στοιχεία στις θέσεις $k_4 = k_5 = 0$

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6

	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	0	6	7	0	0	

Ορισμός: Καθορίζουμε ως εισερχόμενη στην βάση μεταβλητή την μεταβλητής της οποίας η υπολογισμένη αντίστοιχα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παράδειγμά μας ουσιαστικά πρόκειται για την μεταβλητή x_2. Προφανώς μιλώντας για μεταβλητή που θα εισέλθει στην βάση μας κάποια θα πρέπει να εξέλθει.

Ορισμός: Καθορίζουμε ως εξερχόμενη μεταβλητή από την βάση την μεταβλητή η οποία έχει την μικρότερη τιμή θ.

Συνεπώς θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα για το πώς θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους k_6, k_7 που αναφέρονται στην παράμετρο θ. Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τα στοιχεία της στήλης b και της στήλης που θα εισέλθει στην βάση. Πιο συγκεκριμένα είναι ο λόγος τους συνεπώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα $k_6 = 12/3 = 4, k_7 = \frac{8}{1} = 8$.

Αρα τελικά το Tableau 1 έχει την εξής μορφή.

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	4

x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z	0	6	7	0	0	

Ως οδηγό στοιχείο λοιπόν μπορούσαμε να ορίσουμε αυτό που αντιστοιχεί στο στοιχείο της γραμμής που βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή καθώς και η εισερχόμενη μεταβλητή (συνεπώς το 3). Αντικαθιστούμε λοιπόν στην πρώτη στήλη της βάσης την εξερχομένη μεταβλητή με την εισερχόμενη και προκύπτει το Tableau 2.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7						
x_4	0						
	z						

Για νε γεμίσουμε με στοιχεία το δεύτερο μας Tableau θα πρέπει να υπολογίσουμε ότι ο οδηγός στοιχείο θα πρέπει να ισούται με την μονάδα (διαιρείται με το 1/3). Οπότε στην παρούσα φάση το Tableau 2 μετατρέπεται:

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ

x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	
x_4	0						
	z						

Κάνοντας τις κατάλληλες γραμμοπράξεις επιθυμούμε το στοιχείο κάτω από τον οδηγό στοιχείο να γίνει μηδέν. Οπότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με (-1) και την προσθέτουμε στην δεύτερη οπότε το Tableau 2 έχει την παρακάτω μορφή:

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική υπολογίζουμε τις τιμές των $k_j, j = 1,...,7$ και προκύπτει το παρακάτω Tableau.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6

x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	k_7
	z	28	4/3	0	-7/3	0	

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η μεγαλύτερη θετική τιμή αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1. Διαιρώντας τώρα με τις τιμές της μεταβλητής παίρνουμε τα k_6 και k_7.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	3
	z	28	4/3	0	-7/3	0	

Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_1 ενώ η εξερχόμενη η x_4.Πολλαπλασιάζοντας με 3/4 παίρνουμε τον οδηγό στοιχείο όπως απεικονίζεται παρακάτω.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ

x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	-
x_1	6	3	**1**	0	-1/4	3/4	-
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

ΟΔΗΓΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε την γραμμή που αναφέρεται το στοιχείο x_1 με (-2/3) και προσθέσουμε στην από πάνω γραμμή θα έχουμε ότι:

Tableau 3

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	½	-1/2	-
x_1	6	3	**1**	0	-1/4	3/4	-
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των k_j

Tableau 3

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	½	-1/2	-
x_1	6	3	**1**	0	-1/4	3/4	-
	z	32	0	0	-2	-1	

Η διαδικασία μας μέσω της μεθόδου Simplex σε αυτό το σημείο έχει τελειώσει καθώς στην γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης οι υπολογισμένες ποσότητες έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός. Η κορυφή της άριστης λύσης δίνεται από τα στοιχεία της στήλης b και της πρώτης στήλης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Σε αυτό το μέρος των σημειώσεων θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια πιο θεωρητική προσέγγιση για το πώς προκύπτει μια εφικτή λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και με ποιον τρόπο επιτυγχάνεται η συγκεκριμένη λύση. Αρχικά παραθέτονται κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν βασικά στοιχεία για την κατανόηση της λύσης:

- Κυρτό Σύνολο: Ένα σύνολο C καλείται κυρτό εάν $\forall\ x_1, x_2 \in C\ \exists\ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C, \lambda \in [0,1]$

- Το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες του ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς καλείται εφικτό σημείο. Ο χώρος των εφικτών σημείων καλείται εφικτός χώρος ενώ βέλτιστο σημείο αυτό που μας δίνει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

- **εσωτερικό σημείο συνόλου**: εάν υπάρχει ανοικτή σφαίρα $\left(x,\varepsilon\right)\in C,\forall\varepsilon>0$Ένα σημείο θα καλείται συνοριακό όταν $\exists G\left(x,\varepsilon\right)\in C,\forall\varepsilon>0\wedge\forall\varepsilon>0,G\left(x,\varepsilon\right)\cap C=\varnothing$

- **Ακρότατο συνοριακό σημείο** καλείται αυτό που δεν μπορεί αν εκφραστεί ως γραμμικό κυρτός συνδυασμός δύο διακεκριμένων σημείων του συνόλου.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού οι εξισώσεις των περιορισμών μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & \dots\ \dots & +a_{1j}x_j + & \dots & +a_{1n}x_n + & \dots & +a_{1n+m}x_{n+m} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & \dots\ \dots & +a_{2j}x_j + & \dots & +a_{2n}x_n + & \dots & +a_{2n+m}x_{n+m} & = b_2 \\
\dots & \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
a_{m1}x_1 + & \dots\ \dots & +a_{mj}x_j & \dots & +a_{mn}x_n + & \dots & +a_{m,n+m}x_{n+m} & = b_m
\end{array}
$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν με την μορφή πινάκων ως εξής: $A\cdot x=b$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n+m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & \dots & a_{m,n+m} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

Εάν θελήσουμε τώρα να δώσουμε τον πίνακα A υπό την μορφή ενός διανύσματος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι $A = \left[a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_{n+m} \right]$. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι κάποιες από τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε ορισμένα από τα n διανύσματα του πίνακα A ισούται με μηδέν τότε θα έχουμε ,μια μόνη λύση από τις εναπομείνουσες μεταβλητές (βασικές) εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα[1].

Εάν επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημά μας του γραμμικού προγραμματισμού όπως αυτό αναγράφεται σε τυπική μορφή θα έχουμε ότι

Όπως έχουμε ήδη πει η κανονική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να δοθεί με την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{array}{l} \max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \\ a_{11}x_1 + \quad ... \quad ... \quad + a_{1j}x_j + \quad ... \quad + a_{1n}x_n + \quad ... \quad = b_1 \\ a_{21}x_1 + \quad ... \quad ... \quad + a_{2j}x_j + \quad ... \quad + a_{2n}x_n + \quad ... \quad = b_2 \\ \quad ... \quad\quad ... \quad ... \quad\quad ... \quad\quad ... \quad\quad ... \quad\quad ... \quad = ... \\ a_{m1}x_1 + \quad ... \quad ... \quad + a_{mj}x_j \quad ... \quad + a_{mn}x_n + \quad ... \quad = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{array}$$

[1] Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα καλούνται αυτά που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$\sum_{i=1}^{N} a_i u_i = 0, u_1 = u_2 = ... = u_N = 0$$

Ωστόσο το συγκεκριμένο πρόβλημα με την εισαγωγή των αρνητικών m στον αριθμό περιθωρίων μεταβλητών μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & ... \; ... & +a_{1j}x_j + & ... & +a_{1n}x_n + & ... & +a_{1n+m}x_{n+m} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & ... \; ... & +a_{2j}x_j + & ... & +a_{2n}x_n + & ... & +a_{2n+m}x_{n+m} & = b_2 \\
... & ... \; ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\
a_{m1}x_1 + & ... \; ... & +a_{mj}x_j & ... & +a_{mn}x_n + & ... & +a_{m,n+m}x_{n+m} & = b_m \\
x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 & & & & & & &
\end{array}$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας μια ισοδύναμη μορφή και ως:

$$\begin{aligned} &\max z = c^T x \\ &s.t \; \left[A / I\right] x = b. \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο ότι το διάνυσμα x περιέχει και τις m περιθώριες μεταβλητές. Ενώ το διάνυσμα των συντελεστών του x στην αντικειμενική συνάρτηση c_j για τις μεταβλητές από $j = n+1, n+2, ..., n+m$ έχει μηδενικές τιμές. Με βάση το εξής θεώρημα:

Θεώρημα: Το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος $\begin{aligned} &\max z = c^T x \\ &s.t \; \left[A / I\right] x = b \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$ είναι κυρτό.

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εάν το πρόβλημα έχει λύση τότε δεν υπάρχει σημείο του χώρου των λύσεων όπου η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη των τιμών που λαμβάνει στα ακρότατα σημείου του χώρου αυτού.

Για να μιλήσουμε για λύση στο παραπάνω πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να προσδιορίσουμε μια λύση τουλάχιστον του πολυέδρου που σχηματίζουν (κυρτό ασφαλώς) του χώρου των εφικτών λύσεων. Έστω ότι έχουμε προσδιορίσει την λύση x^1. Για καθαρούς λόγους συμβολισμού και στην προσπάθεια μας να θυμίσουμε την έννοια του διανύσματος θα θέσουμε την λύση ως $\tilde{x}^1$.Πως προκύπτει η λύση $\tilde{x}^1$; Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό $\left[A/I\right]x=b$ και θεωρώντας τις συντεταγμένες του διανύσματος A ως εξής $\tilde{a}_j=(a^1,a^2,...,a_{n+m})$ δηλαδή να αποτελούν τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα $\left[A/I\right]$ μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία του διανύσματος $\tilde{x}$ με τέτοιον τρόπο ώστε τα πρώτα m στοιχεία να αντιστοιχούν στις m βασικές μεταβλητές. Συνεπώς το διάνυσμα $\tilde{x}$ μπορεί να γραφεί ως εξής $\tilde{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ ... \\ x_n \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_B \\ \_ \\ 0 \end{bmatrix}$

με m-διάστατο το διάνυσμα των μη μηδενικών γραμμών και n-διάστατο των μηδενικών.

Με την ίδια λογική μπορούμε να διατάξουμε τις στήλες $\tilde{a}_j=(a^1,a^2,...,a_{n+m})$ του πίνακα $\left[A/I\right]$ με ανάλογο τρόπο. Δηλαδή $\tilde{a}_j=\left[a^1,a^2,...,a_m,0,...,0\right]=\left[A|C\right]$. Αρα η εξίσωση $\left[A/I\right]x=b$ μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως $\left[A|C\right]\begin{bmatrix} x_B \\ \_ \\ 0 \end{bmatrix}=b$. Συνεπώς εάν κάνουμε προσεκτικά τις πράξεις θα έχουμε ότι $Ax_B + C0 = b$ και στην περίπτωση που υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα Α θα έχουμε την λύση $\tilde{x}^1 = A^{-1}\tilde{b}$.

Για να είναι ένα σημείο $\tilde{x} \in W$ ακρότατο σημείο ενός χώρου W θα πρέπει το διάνυσμα $\tilde{x}$ να αποτελεί μια βασική εφικτή λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &\max z = c^T x \\ &s.t \ \left[A/I\right]x = b \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

ΤΕΧΝΙΚΗ SIMPLEX-ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ

Ξεκινάμε από μια κορυφή και πηγαίνουμε σε άλλες. Μετά από κ-επαναλήψεις θα έχουμε υπολογίσει τις συντεταγμένες της x^k κορυφής στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει τιμή $\tilde{z}^k = \left(\tilde{c}_k\right)^t \tilde{x}^k$. Έστω ότι $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \ldots \\ x_m^k \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$ όπου με επαναδιάταξη τοποθετούμε στο τέλος τα μηδενικά στοιχεία. Θα πρέπει να θυμίσουμε ότι το διάνυσμα αυτό αντιστοιχεί στις παραμέτρους $a_i = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k, a_{m+1}^k, \ldots, a_j^k, \ldots a_{n+m}^k)$. Προφανώς θα μπορούσαμε να γράψουμε και την αντίστοιχη σχέση όπου $\sum_{i=1}^{m} x_i^k a_i^k = b^k$. Όπως πράξαμε και πριν για την λύση $\tilde{x}^1$ θα μπορούσαμε ομοίως να υπολογίσουμε και λύση για την κ-κορυφή. Αφού κάθε βασική λύση πρέπει να περιλαμβάνει m βασικές μεταβλητές μια νέα βασική λύση μπορεί να κατασκευασθεί θέτοντας στην βασική εφικτή λύση μιας από τις m βασικές μεταβλητές ίση με το μηδέν και αντικαθιστώντας την με κάποια από τις μη βασικές μεταβλητές. Προφανώς θα πρέπει να απαιτήσουμε η προκύπτουσα βασική λύση να είναι εφικτή αλλά και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με την νέα λύση να είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα.

Ας εναλλάξουμε τώρα την θέση μιας βασικής μεταβλητής με μια μη βασική εισάγοντας στην βάση την μεταβλητή x_j^k. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να θυμίσουμε ότι σε αυτήν την μη βασική μεταβλητή αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\tilde{a}_j^k$. Το διάνυσμα αυτό μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός βασικών διανυσμάτων του χώρου μια και τα m-διανύσματα της τρέχουσας βάσης $(a_1^k, a_2^k, ..., a_m^k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δηλαδή θα μπορούσε να εκφραστεί ως $\tilde{a}_j^k = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i^k \tilde{u}_{ij}^k$ με ένα από τα $\tilde{u}_{ij}^k$[2] τουλάχιστον διαφορετικό του μηδενός. Εάν $\tilde{u}_j^k = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1j}^k \\ \cdots \\ \tilde{u}_{ij}^k \\ \cdots \\ \tilde{u}_{mj}^k \end{bmatrix}$ τότε θα μπορούσαμε να έχουμε ότι

$$\tilde{a}_j^k = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i^k \tilde{u}_{ij}^k = \left[\tilde{a}_1^k, \tilde{a}_2^k, ..., \tilde{a}_m^k\right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1j}^k \\ \cdots \\ \tilde{u}_{ij}^k \\ \cdots \\ \tilde{u}_{mj}^k \end{bmatrix} = B^k \tilde{u}_j^k$$ [3]

---

[2] Ο δείκτης i αναφέρεται στο βασικό διάνυσμα ενώ ο j στο μη βασικό διάνυσμα.

[3] Θυμίζουμε ότι $\left[\tilde{a}_1^k, \tilde{a}_2^k, ..., \tilde{a}_m^k\right] \equiv B$ λόγω της διαμέρισης του πίνακα $\left[A|I\right]$.

καθώς $\tilde{u}_j^k = \left[\tilde{u}_{1j}^k, \ldots, \tilde{u}_{ij}^k, \ldots, \tilde{u}_{mj}^k\right]^t$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια πραγματική παράμετρο τ^k. Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση με την παράμετρο αυτή θα έχουμε ότι $\tau^k B^k \tilde{u}_j^k = \tau^k \tilde{a}_j^k$. Αφαιρώντας τις σχέσεις $\tau^k B^k \tilde{u}_j^k = \tau^k \tilde{a}_j^k$ $B^k \tilde{x}_B^k = b^k$ θα έχουμε ότι

$$B^k\left(\tilde{x}_B^k - \tau^k \tilde{u}_j^k\right) + \tau^k \tilde{a}_j^k = b^k \Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{x}_1^k - \tau^k \tilde{u}_{1j}^k\right)\tilde{a}_1^k + \left(\tilde{x}_2^k - \tau^k \tilde{u}_{2j}^k\right)\tilde{a}_2^k + \ldots.. + \left(\tilde{x}_m^k - \tau^k \tilde{u}_{mj}^k\right)\tilde{a}_m^k + \tau^k \tilde{a}_j^k = b^k$$

Θα πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι η λύση αυτή είναι μη βασική καθώς περιλαμβάνει m+1 μεταβλητές δηλαδή τις τρέχουσες m και την εισερχόμενη μεταβλητή $x_j^k = \tau^k$. Άρα θα πρέπει να βρούμε τ^k τέτοιο ώστε μια από τις τρέχουσες βασικές μεταβλητές να λαμβάνει μηδενική τιμή στην νέα λύση. Επιπλέον για να είναι και εφικτή η συγκεκριμένη λύση θα πρέπει $x_m^k - \tau^k u_{mj}^k \geq 0$. Η περίπτωση όπου η παραπάνω συνθήκη παραβιάζεται είναι όταν $u_{mj}^k > 0$ ενώ στην αντίθετη περίπτωση ο εφικτός χώρος είναι μη φραγμένος. Μάλιστα σε μη φραγμένο εφικτό χώρο η λύση δύναται να είναι μη φραγμένη. Η σχέση που καθιστά την νέα λύση βασική και εφικτή δίνεται ως εξής: $\tau^k = \min\left(x_i^k / u_{ij}^k , u_{ij}^k > 0\right)$.

Η συγκεκριμένη λύση προκύπτει εάν εξετάσουμε τα θετικά u_{ij}^k και ισχύουν οι περιορισμοί $\frac{x_m^k}{u_{ij}^k} \geq \tau^k, u_{ij}^k > 0$. Προφανώς θα πρέπει να συναληθεύουν οπότε

$\tau^k = \min\left({x_i^k}/{u_{ij}^k}, u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ {x_i^k}/{u_{rj}^k}, u_{rj}^k > 0 \right\}$[4]. Άρα η νέα βασική λύση x_r^k παίρνει την τιμή μηδέν γιατί $\tilde{x}_r^k - \tau^k \tilde{u}_{rj}^k = \tilde{x}_r^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{rj}^k = 0$. Συνεπώς το σημείο $\left(\tilde{x}_1^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{1j}^k \right), \left(\tilde{x}_2^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{2j}^k \right), \ldots\ldots, \left(\tilde{x}_m^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{mj}^k \right), \ldots 0, \ldots, \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}, 0, \ldots)$ έχει τουλάχιστον n-μηδενικά στοιχεία.

Κριτήριο Εφικτότητας:

Το κριτήριο $\tau^k = \min\left({x_i^k}/{u_{ij}^k}, u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ {x_i^k}/{u_{rj}^k}, u_{rj}^k > 0 \right\}$ καλείται κριτήριο εφεκτικότητας και προσδιορίζει την τιμή της τ^k η οποία θα μηδενίζει την βασική μεταβλητή και θα δίνει ενδεχομένως μια μη μηδενική τιμή στην μη βασική μεταβλητή.

Παρατηρήσεις:

1. Στην περίπτωση όπου η τ^k με την τιμή που παίρνει μηδενίζει δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές ονομάζεται δεσμός.

2. Εάν σε μία κορυφή μα ή περισσότερες βασικές μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν τότε αυτή η βασική λύση και κατ' επέκταση η κορυφή ονομάζεται εκφυλισμένη.

3. Εάν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν για το ίδιο τ^k τότε βγάζουμε μια από τις δύο βασικές μεταβλητές και η κορυφή μας έχει μια βασική μεταβλητή ίση με το μηδέν δηλαδή είναι εκφυλισμένη.

[4] Ο δείκτης r αναφέρεται στην βασική μεταβλητή με τον ελάχιστο των λόγων.

4. Το τ^k μπορεί να ισούται με το μηδέν όταν κάποια βασική μεταβλητή ισούται με το μηδέν και το αντίστοιχο $u_{ij}^k > 0$

Υπολογισμός Βέλτιστης λύσης

Ο υπολογισμός της βέλτιστης λύσης γίνεται ως εξής:

$z^k = (c)^t \tilde{x}^k \Leftrightarrow \left[\left(c_B^K\right)^t \middle| \left(c_E^K\right)^t \right] \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \left(c_B^K\right)^t x_B^k = c_B^K \left(B_k\right)^{-1} b^k$. Εάν τώρα εισάγουμε στην βάση την μεταβλητή που αντιστοιχεί στη θέση a_{ij} θα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \sum_{i=1}^{m} c_i^k \left(x_i^k + \tau^k u_{ij}^k \right) + c_j^k \tau^k = \sum_{i=1}^{m} c_i^k x_i^k + \sum_{i=1}^{m} \tau^k c_i^k x_i^k + b^k c_j^k = \\
&= z^k - \tau^k \left[\left(c_B^k\right)^t u_{ij}^k - c_j^k \right] \Leftrightarrow \\
z^{k+1} &= z^k - \tau^k \left[s_j^k - c_j^k \right]
\end{aligned}
$$

Το κριτήριο αριστότητας όπως προκύπτει από τα παραπάνω δίνεται από την τελευταία σχέση $z^{k+1} = z^k - \tau^k \left[s_j^k - c_j^k \right]$.

Παρατηρήσεις:

1. Εάν $s_j^k - c_j^k \geq 0$ τότε η τρέχουσα κορυφή είναι βέλτιστη.

2. Κάνομε την υπόθεση ότι υπάρχει μια βασική μεταβλητή τέτοια ώστε $u_{ij}^k \leq 0$. Τότε ο χώρος είναι μη φραγμένος και για αυτή την βασική μεταβλητή έστω ότι το αντίστοιχο $s_j^k - c_j^k < 0$. Τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ***απειρίζεται.***

3. Για μια εκφυλισμένη κορυφή το $\tau^k = 0$ και ενδέχεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι η ίδια. Τότε έχουμε το φαινόμενο της ***ανακύκλωσης*** και η τεχνική Simplex μας παρέχει τις ίδιες κορυφές.

4. Για να έχουμε μα ***εναλλακτική βέλτιστη λύση*** εξετάζουμε κατά πόσον υπάρχουν μη βασικές μεταβλητές τέτοιες ώστε να δίνουν $s_j^k - c_j^k = 0$ ενώ για τις υπόλοιπες μεταβλητές ισχύει $s_j^k - c_j^k > 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Ας προχωρήσουμε τώρα στην αναλυτική επίλυση του παρακάτω παραδείγματος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{array}{ll} \max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 & \\ s.t & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

1. Κάτω από τις μη βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3 οι οποίες ονομάζονται και μη βασικές μεταβλητές είναι οι συντελεστές των μεταβλητών αυτών όπως δίνονται από τους περιορισμούς $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$ και $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15$. Εν συνεχεία παραθέτω και τις περιθώριες μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν στον μοναδιαίο πίνακα $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ και θα

έχουν την προηγούμενη μορφή. Άρα μετά την προσθήκη των περιθωρίων μεταβλητών οι οποίες και βρίσκονται σε πλήρη ταύτιση με τον αριθμό των περιορισμών το π.γ.π διαμορφώνεται ως εξής:

$$
\begin{array}{llr}
\max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & (1) \\
s.t \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & =10 & (2) \\
\qquad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + \qquad + x_5 & = 15 & (3) \\
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & (4)
\end{array}
$$

2. Η στήλη κάτω από το b συμπληρώνεται από την τιμή (-ες) των περιορισμών (1) και (2). Επειδή στον περιορισμό (1) έχουμε προσθέσει την περιθώρια μεταβλητή x_4 σε αυτήν την μεταβλητή και κάτω από το b θα βάζουμε την αντίστοιχη τιμή του περιορισμού. Ομοίως για τον περιορισμό (2) στον οποίο έχει εισέρθει ως περιθώρια η μεταβλητή x_5 θα αντιστοιχίσουμε την τιμή του περιορισμού δηλαδή το 15. Άρα η στήλη θα διαμορφωθεί ως εξής: $\begin{array}{c} b \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \end{array}$.

3. Η γραμμή πάνω από τις βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 συμπληρώνεται από τους αντίστοιχους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτοί παρουσιάζονται στην αντικειμενική συνάρτηση $\max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Συνεπώς θα έχουμε το πρώτο Tableau ως εξής:

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_4	0	10	1	**2**	2	1	0	5
x_5	0	15	2	**4**	3	0	1	3,75
	z	$s_j - c_j$	3	**5**	2	0	0	

Αρχικά και όπως ήδη γνωρίζουμε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδέν. Η γραμμή δεξιά του $s_j - c_j$

συμπληρώνεται με βάση τον παρακάτω τύπο $s_j - c_j = c_B^T u_j - c_j = c_B^T B^{-1} a_j - c_j$.

Δηλαδή για το στοιχείο της γραμμής $s_j - c_j$ το οποίο βρίσκεται κάτω από την μεταβλητή x_1 πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο του c_B με το αντίστοιχο στοιχείο του x_1 και τα αποτελέσματα τα προσθέτουμε μεταξύ τους. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα το αφαιρούμε από τον αριθμό που βρίσκεται πάνω από την αντίστοιχη μεταβλητή x_1.Όμοια συμπληρώνονται και τα υπόλοιπα στοιχεία που ανήκουν στην γραμμή $s_j - c_j$.Από όλα τα ευρισκόμενα στοιχεία επιλέγουμε αυτό με την μεγαλύτερη θετική τιμή. Εάν κατά τους υπολογισμούς μας όλα τα στοιχεία που ανήκουν στην συγκεκριμένη γραμμή είναι μηδενικά ή και μικρότερα του μηδενός τότε έχουμε υπολογίσει της βέλτιστη κορυφή τις οποίας οι συντεταγμένες θα δίνονται από τα στοιχεία του c_B .

Η στήλη κάτω από το θ συμπληρώνεται ως εξής: Είδαμε ότι το στοιχείο της γραμμής με την τιμή 5 είναι το στοιχείο που επιλεγούμε. Αυτό αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_2. Η πρώτη τιμή που βρίσκεται κάτω από το θ προκύπτει από την πρώτη τιμή που βρίσκεται κάτω από το b εάν την διαιρέσω με τον πρώτο αριθμό που βρίσκεται κάτω από την μεταβλητή x_2. Ομοίως συνεχίζω με τις υπόλοιπες και επιλέγω την τιμή με την μικρότερη τιμή. Σε αυτή την φάση αντικαθιστούμε την μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο στοιχείο της γραμμής $s_j - c_j$ με την μεταβλητή που αντιστοιχεί στην μικρότερη τιμή της στήλης θ. Άρα θα αντικαταστήσουμε την μεταβλητή x_5 με την μεταβλητή x_2. Συνεπώς προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_4	0	2,5	**0**	0	0,5	1	-0,5	-
x_2	5	3,75	**0,5**	1	0,75	0	0,25	7,5
	z	$s_j - c_j$	**0,5**	0	-5,75	0	-1,25	

Συνεχίζουμε με την ίδια λογική έως ότου στην συγκεκριμένη γραμμή $s_j - c_j$ προκύψουν μηδενικές ή και αρνητικές τιμές. Στην συνέχεια ακολουθούν ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Στην περίπτωση όπου σε ένα Simplex tableau όλοι οι λόγοι θ που υπολογίζουμε για να εκτιμήσουμε το ποια μεταβλητή θα εισέλθει είναι αρνητικοί τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Η τιμή που θα υπολογίσουμε για την αντικειμενική μας συνάρτηση θα τείνει στο άπειρο και το πρόβλημα μας χαρακτηρίζεται ως μη φραγμένο.

Παράδειγμα

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned}
&\min z = x_1 + x_2 - x_3 && (1)\\
&s.t \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 && (2)\\
&\qquad -x_1 - 7x_2 + 2x_3 \le 2 && (3)\\
&\qquad 7x_1 + x_2 - x_3 \le 10 && (4)\\
&\qquad 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 6 && (5)\\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Το τελικό Taubleau είναι

		c_j	-1	1	1	0	0	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_6	0		13/2	**-5/2**	0	0	1/2	1	0	
x_7	0		3	**-1**	0	0	1	0	1	
x_4	0	2,5	3/2	**5/2**	0	1	1/2	0	0	-
	z	$z_j - c_j$	-0,5	**2**	0	0	-1/2	0	0	
x_3	1	3,75	-0,5	**-7/2**	1	0	1/2	0	0	7,5

Οι λόγοι θ είναι όλοι αρνητικοί συνεπώς καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μη φραγμένο.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Εάν κάποια βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε Z=0 τότε αύξηση της τιμής αυτής δεν αλλάζει την τιμή της αντικειμενικής της συνάρτησης. Υπό την προϋπόθεση μάλιστα ότι η λύση είναι μη εκφυλισμένη η εισαγωγή της μεταβλητής αυτής στην βάση θα μας οδηγήσει σε τιμή αντικειμενικούς συνάρτησης της ίδιας αξίας οπότε το πρόβλημα θα έχει άπειρες λύσεις. Οι άπειρες αυτές λύσεις δύναται να εμφανίζονται με την μορφή ενός γραμμικού συνδυασμού λύσεων.

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Σε ένα Simplex tableau όταν κάποια (-ες) από την τρέχουσα (-ες) βασική (-ες) λύσεις περιέχουν μεταβλητή με τιμή μηδέν τότε μπορούμε να μιλήσουμε για εκφυλισμένη λύση. Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να συνεχιστεί με την αντικατάσταση αυτής με μια αυθαίρετη και πάρα πολύ μικρή ποσότητα ε θετική μέχρι το τελικό tableau και θέτοντας στην άριστη λύση ε=0.

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			140	100	0	0	0	

Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	80	0	0	1	2	-4	
	140	90	1	0	0	3/4	-1/2	
	100	20	0	1	0	-1	1	

Το οποίο μετά τις ανάλογες πράξεις μετατρέπεται στο εξής βέλτιστο τελικό tableau

			140	100	0	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		80	0	0	1	2	-4	
		90	1	0	0	3/4	-1/2	
		20	0	1	0	-1	1	

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΜΗ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			140	100	0	0	0				

	Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
	0	500	0	0.75	1	5	0			0	
	1	500	1	0.25	0	-5	0			0	
	M	**100**	**0**	**-0.2**	**0**	**0**	**-1**			**1**	

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η λύση μας περιλαμβάνει και τεχνητές μεταβλητές στην βάση. Αυτό ουσιαστικά δεν είναι δυνατό και έρχεται σε αντίφαση με τον ρόλο των τεχνητών μεταβλητών και συνεπώς η λύση μας χαρακτηρίζεται ως μη εφικτή.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ Μ

Η υλοποίηση και εφαρμογή της μεθόδου Simplex, αλλά και των Simplex tableau, απαιτεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού να είναι στην τυπική μορφή αλλά και την ύπαρξη του μοναδιαίου πίνακα μέσα από τις στήλες του πίνακα A. Στην περίπτωση που δεν περιέχεται ο μοναδιαίος πίνακας μέσα στον πίνακα A χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας. Η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών διευρύνει την εφικτή περιοχή του προβλήματος. Βλέπουμε ότι μια εφικτή λύση στο αναθεωρημένο πρόβλημα είναι εφικτή λύση και για το αρχικό πρόβλημα αν και μόνον αν οι τιμές όλων των τεχνητών μεταβλητών είναι μηδέν. Η Μ-μέθοδος εισάγει τις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή για κάθε μεταβλητή το $-M$, όπου M αυθαίρετα πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. Η λύση του αναθεωρημένου προβλήματος πρέπει να είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, όπου x οι λύσεις των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος και όπου 0 οι λύσεις των τεχνητών μεταβλητών οι οποίες πρέπει να είναι 0.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Μεγάλο μειονέκτημα της Μ-μεθόδου ο μη καθορισμός του πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το Μ, όταν χρησιμοποιούμε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επιλεγούμε το Μ αυθαίρετα μεγάλο το οποίο όμως μπορεί να προκαλέσει προβλήματα ακρίβειας στην υπολογιστική μηχανή (σφάλματα στρογγυλοποίησης). Τα προβλήματα αυτά μπορούμε να τα αποφύγουμε με την μέθοδο των 2 φάσεων. Στην πρώτη φάση εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές που χρειάζονται για να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας. Λύνουμε το βοηθητικό πρόβλημα $\min\left(\text{τεχνητές μεταβλητές}\right)$ το οποίο θέλουμε να έχει άριστη λύση μηδέν, δηλαδή, όλες οι τεχνητές να είναι μηδέν. Το σύνολο των άλλων μεταβλητών σε αυτή την περίπτωση αποτελούν βασική εφικτή λύση για το αρχικό πρόβλημα. Αν το βοηθητικό πρόβλημα έχει άριστη λύση θετική, τότε το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση. Στην δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας σαν αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος την άριστη λύση της 1ης φάσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Δυική Θεωρία

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με εάν άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυικό (dual) ενώ το αρχικό πρωτεύον. Η δυική θεωρία παρέχει πληροφορίες κυρίως οικονομικής φύσεως ενώ είναι διαφωτιστική για την ανάλυση των επιπτώσεων της αλλαγής των παραμέτρων c_j, a_{ij}, b. Επίσης η άριστη λύση του δυικού είναι άρρηκτα δεμένη νε την λύση του πρωτεύοντος.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να θυμίσουμε ότι ένα π.γ.π είναι σε κανονική μορφή όταν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
2. Όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις της μορφής $\leq$
3. όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Σε ορισμένα εγχειρίδια χρησιμοποιείται ρητά ο όρος της ημικανονικής μορφής και την χρήσης του δυικού π.γ.π μέσω αυτής. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση της ημικανονικής μορφής η συνθήκη 3 αφαιρείται και δεν ισχύει.

Στην περίπτωση που οι παραπάνω συνθήκες δεν ισχύουν προχωρούμε μέσα από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού κανονικής μορφής. Οι μετασχηματισμοί αυτοί περιλαμβάνουν τα παρακάτω:

1. Την μετατροπή του προβλήματος μεγιστοποίησης σε ελαχιστοποίησης και αντίστροφα.
2. Την μετατροπή της ανισώσεις της μορφής $\geq$ με πολλαπλασιασμό της γραμμής της με (-1).
3. Την μετατροπή μιας αρνητικής μεταβλητής x_i και αντικατάστασης της μέσα από την $x_i^{'} = -x_i$.
4. Την μετατροπή μιας μεταβλητής ελευθέρου πρόσημου $x_i \in R$ όπως αποκαλείται μέσω της $x_i = x_i^{'} - x_i^{''}, x_i^{'}, x_i^{''} \geq 0$.

Αα θεωρήσουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την παρακάτω μορφή.

$$
\begin{array}{l}
\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
a_{11}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{1j}x_j + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n + \quad \ldots. \quad \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{2j}x_j + \quad \ldots \quad + a_{2n}x_n + \quad \ldots \quad \leq b_2 \\
\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \leq \ldots \\
a_{m1}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{mj}x_j \quad \ldots \quad + a_{mn}x_n + \quad \ldots \quad \leq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \\
c_j, b_i, a_{ij} \ \text{(i=1,2,...,m, j=1,2,...,n)}
\end{array}
$$

Ή σε μορφή πινάκων: $\begin{array}{l} \pm \max c' x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$ όπου

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & \ldots & a_{1n+m} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & \ldots & a_{2n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & \ldots & a_{m,n+m} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_j \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ένα π.γ.π θα μπορεί να μετατραπεί σε δυικό μέσω της διαδικασίας.

$$
\begin{array}{l} \pm \max c' x \ \text{(Πρωτεύον)} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \pm \min b' \mathrm{w} \ \text{(Δυικό)} \\ A^T w \leq c \\ w \geq 0 \end{array}
$$

Σε ανοιγμένη τώρα μορφή το δυικό π.γ.π αποδίδεται ως εξής:

$$
\begin{array}{l}
\min y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n \\
a_{11} w_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{j1} w_j + \quad \ldots \quad + a_{m1} w_n + \quad \ldots. \quad \leq c_1 \\
a_{12} w_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{j2} w_j + \quad \ldots \quad + a_{m2} w_n + \quad \ldots \quad \leq c_2 \\
\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \leq \ldots \\
a_{1n} w_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + w_{jm} x_j \quad \ldots \quad + a_{mn} w_n + \quad \ldots \quad \leq c_m \\
w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0,
\end{array}
$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Μια δυική μεταβλητή ορίζεται για κάθε m περιορισμούς του πρωτεύοντος π.γ.π.

2. Ένας δυικό περιορισμός ορίζεται για κάθε n μεταβλητή του πρωτεύοντος π.γ.π.

3. Οι συντελεστές των μεταβλητών ενός δυικού προβλήματος ισούται με τους συντελεστές της συνδεόμενης μεταβλητής του πρωτεύοντος π.γ.π.

4. Οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυικού π.γ.π ταυτίζονται με τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος π.γ.π.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει σχηματικά το μετασχηματισμό του πρωτεύοντος σε δυικό καθώς και την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει σχηματικά το μετασχηματισμό του πρωτεύοντος σε δυικό καθώς και την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους.

	ΠΡΩΤΕΥΟΝ Π.Γ.Π maximizeZ
ΔΥΙΚΟ Π.Γ.Π minimizeY w_1	$a_{11}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + \boxed{a_{1j}x_j} + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n + \quad \ldots. \quad \leq b_1$

w_j			
w_m			
	$\geq c_1$	$\geq c_j$	$\geq c_n$

j περιορισμός του δυικού π.γ.π

j περιορισμός του πρωτεύοντος π.γ.π

Αναλυτικότεραση σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε δυικό και πρωτεύον φαίνεται παρακάτω:

ΠΡΩΤΕΥΟΝ	**ΔΥΙΚΟ**
Πρόβλημα μεγιστοποίησης	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμός τύπου i $\geq$	Μεταβλητή $u_i \leq 0$
Περιορισμός τύπου i $\leq$	Μεταβλητή $u_i \geq 0$
Περιορισμός τύπου $i =$	Μεταβλητή u_i χωρίς περιορισμό
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός τύπου j $\geq$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός τύπου j $\leq$
Μεταβλητή x_j χωρίς περιορισμό	Περιορισμός τύπου j =
Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης	Συντελεστής δεύτερου μέλους
Συντελεστής δεύτερου μέλους	Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης

Ορισμός: Ένας περιορισμός π.γ.π χαρακτηρίζεται ως δεσμευτικός-αποτελεσματικός αν και μόνο εάν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση καλείται χαλαρός.

Έστω x^* η βέλτιστη λύση ενός π.γ.π και w^* του δυικού του.

1. Οι μεταβλητές του ενός π.γ.π που αντιστοιχούν σε χαλαρούς περιορισμούς του άλλου είναι μη βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.

2. Οι μεταβλητές του ενός π.γ.π που αντιστοιχούν σε αποτελεσματικούς περιορισμούς του άλλου είναι βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.

3. Εάν σε κάποιο δεσμευτικό περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί δυική μεταβλητή με τιμή μηδέν στην βέλτιστη λύση του δυικού τότε το πρωτεύον π.γ.π έχει άπειρες λύσεις.

Οικονομική Ερμηνεία του δυικού προβλήματος

Γενικότερα θα λέγαμε ότι τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με προβλήματα κατανομής περιορισμού αριθμού πόρων σε διαφορετικές εναλλακτικές και ανταγωνιστικές δραστηριότητες. Εάν a_{ij} είναι η ποσότητα του πόρου i για την παραγωγή j μονάδων, c_j η αύξηση στο μέτρο αποδοτικότητας ζ από την αύξηση κατά μία μονάδα της x_j τότε

1. Το $\sum a_{ij}x_j$ των περιορισμών (αριστερό μέλος) παριστάνει την συνολική ποσότητα πόρων που θα χρησιμοποιηθούν και θα είναι μικρότεροι των διαθέσιμων πόρων b_i.

2. Η αντικειμενική συνάρτηση παριστάνει το συνολικό κέρδος

Άρα το πρωτεύον π.γ.π μας δείχνει με ποιον τρόπο θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε

$$\begin{aligned}&\pm\max\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}} \\ &s.t\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\text{πόρος}_{\text{i}}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}}\end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned}&\pm\max\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}}\equiv\text{αξία} \\ &s.t\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\text{πόρος}_{\text{i}}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}}\equiv\text{πόρος}\end{aligned}$$

Τι ουσιαστικά μας δείχνει το δυικό;

Το δυικό

$$\begin{aligned}&\pm\max\sum_{j=1}^{n}\left(\text{πόρος}_{\text{i}}\right)\text{w}_{\text{i}} \\ &s.t\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\text{πόρος}_{\text{i}}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{w}_{\text{i}}\geq\left(\frac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\end{aligned} \longrightarrow \quad w_i\equiv\left(\frac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)$$

Ιδιότητες του Δυικού Προβλήματος γραμμικού Προγραμματισμού

Θεώρημα1

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού τότε $c'x\leq b'w$ (ασθενής δυικότητα)

Απόδειξη

Εάν πολλαπλασιάσουμε τον i-περιορισμό του πρωτεύοντος προβλήματος επί $w_i\geq 0$ δηλαδή $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}w_i a_{ij}x_j\leq\sum_{i=1}^{m}b_i w_i$ και αντίστοιχα τον j-περιορισμό του δυικού προβλήματος με $x_j\geq 0$ δηλαδή έχοντας $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}w_i a_{ij}x_j\leq\sum_{i=1}^{m}c_j x_j$ και συνδυάσουμε τις σχέσεις που έχουμε θα δούμε ότι

$$c'x = \sum_{i=1}^{m} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_i a_{ij} x \le \sum_{i=1}^{m} b_i w_i = b'w$$

Θεώρημα 2

Εάν $\tilde{x}$ μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και $\hat{w}$ του δυικού έτσι ώστε $\tilde{z} = c'\tilde{x} = b'\hat{w}$ τότε τα $\tilde{x}$ και $\hat{w}$ είναι άριστες λύσεις των Π και Δ αντίστοιχα

Απόδειξη

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού τότε θα έχουμε ότι $c'x \le b'\hat{w} = c'\tilde{x} = \max\{c'x : x,$ εφικτή λύση Π$\} \Rightarrow \tilde{x}$ 'αριστη λύση του Π και

$b'w \ge c'\tilde{x} = b'\hat{w} = \min\{c'x : x,$ εφικτή λύση D$\} \Rightarrow \hat{w}$ 'αριστη λύση του D

Επομένως μπορούμε να συνοψίσουμε αυτά που έχουμε αποδείξει στο παρακάτω διάγραμμα και να ισχυριστούμε ότι κάθε τιμή της Α.Σ του προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι άνω φράγμα της Α.Σ του προβλήματος μεγιστοποίησης και αντίστροφα. Οι άριστες αυτές λύσεις είναι τα καλύτερα φράγματα που υπάρχουν.

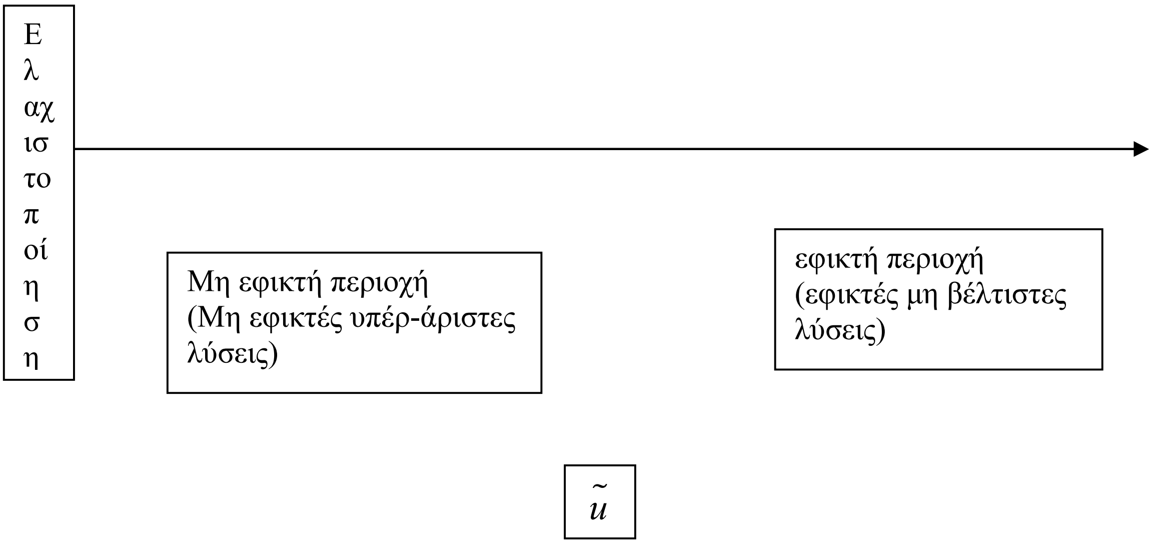
Μεγιστοποίηση

Άριστη Λύση

$\tilde{z}$

εφικτή περιοχή (εφικτές μη βέλτιστες λύσεις)

Μη εφικτή περιοχή (Μη εφικτές υπέρ-άριστες λύσεις)



Θεώρημα 3

Εάν το πρωτεύον π.γ.π είναι μη φραγμένο τότε το δυικό του δεν έχει εφικτές λύσεις.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ως G_x το σύνολο των εφικτών λύσεων του πρωτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και G_w του δυικού του και έχοντας ότι το πρωτεύον πρόβλημα είναι μη φραγμένο δηλαδή $\max\{c'x : x \in G_x\} = \infty$. Εάν υποθέσουμε ότι το δυικό πρόβλημα έχει μια λύση εφικτή w τότε από το θεώρημα 2 θα ισχύει ότι $b'w \geq c'x$ και με βάση το γεγονός ότι $\max\{c'x : x \in G_x\} = \infty$ θα έχουμε ότι $b'w = \infty$ που είναι όμως άτοπο.

(*Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα*).

Θεώρημα 4

Εάν το δυικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις τότε το πρωτεύον είτε δεν έχει εφικτές λύσεις είτε είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα Δυισμού

Εάν το πρωτεύον π.γ.π έχει άριστη λύση τότε το δυικό του έχει άριστη λύση και μάλιστα οι τιμές των αντικειμενικών του συναρτήσεων είναι ίσες. (Gale, Kuhn and Tucker, 1950).

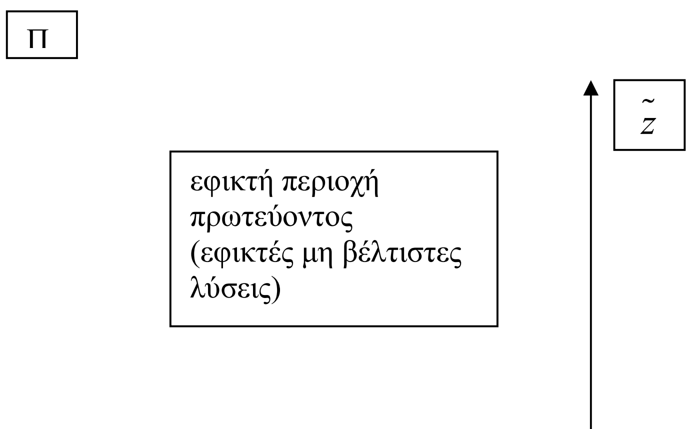
Για παράδειγμα έως θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με άριστη λύση $x = \left(1/5, 0, 21/5, 9/5\right)$. Να υπολογίσουμε την λύση του δυικού του προβλήματος.

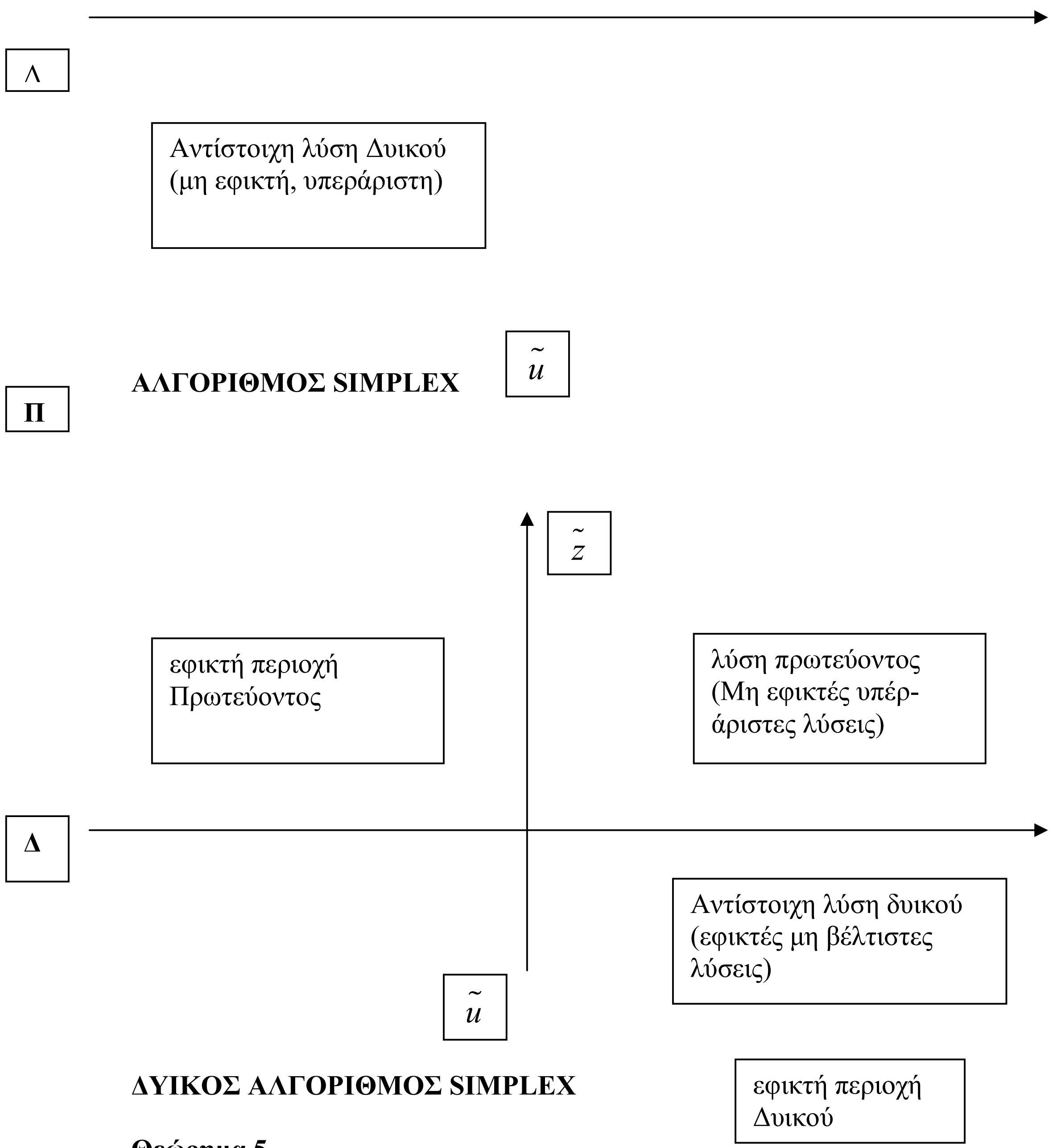
ΔΥΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Τα δύο προβλήματα το δυικό αλλά και το πρωτεύον ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού μπορούν αν επιλυθούν με την μέθοδο SIMPLEX όπως αυτή έχει αναπτυχθεί στο παρόν μάθημα. Μάλιστα επειδή στο τελικό Tableau των λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού περιέχεται και η λύση του άλλου προβλήματος συνηθίζεται να επιλύετε όποιο πρόβλημα φαίνεται να έχει την ευκολότερη λύση. Επιπρόσθετα θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι κάθε βήμα στην διαδικασία Simplex συνδέεται με ένα ανάλογο βήμα στην επίλυση του αντίστοιχου δυικού προβλήματος δηλαδή επιφέρει και την λύση του άλλου στην δική του διάσταση.

Η γενική ιδέα της μεθόδου SIMPLEX υποστηρίζει ότι αρχίζουμε με μία βάσει λύση του πρωτεύοντος π.γ.π η οποία παρεμπιπτόντως αντιστοιχεί σε μια βασική μη εφικτή λύση του δυικού. Με βάση την συγκεκριμένη τεχνική βελτιώνουμε βαθμιδόν την λύση αυτή διατηρώντας την εφικτότητα στο πρωτεύον και φτάνουμε στη άριστη λύση όταν επιτύχει εφικτότητα και στο δυικό. Στην δυική μέθοδο SIMPLEX αρχίζουμε με μια βασική μη εφικτή λύση του πρωτεύοντος π.γ.π (υπεράριστη λύση) και συνεπώς η αντίστοιχη δυική είναι εφικτή. Η πρώτη βασική λύση εφικτή για το πρωτεύον είναι η άριστη του.

Συνεπώς η δυική μέθοδος SIMPLEX επιλύει το δυικό πρόβλημα πάνω στα tableau του πρωτεύοντος και μετακινούμαστε από μια βασική εφικτή λύση του δυικού σε μία καλύτερη βασική εφικτή λύση.





Θεώρημα 5

Έστω $w^{'} = c^{'}B^{-1}$. Εάν $z_i - c_i \geq 0, \forall i$ η λύση w είναι μια βασική εφικτή λύση του δυικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Παράδειγμα

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ & 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{aligned}$$

με άριστη λύση $\tilde{x} = [1/5, 0, 21/5, 9/5]$. Ποια η άριστη λύση του δυικού;

Λύση

Το δυικό πρόβλημα έχει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} \min y &= 8w_1 + 6w_2 + 3w_3 \\ s.t \quad & w_1 \geq 2 \\ & 2\mathrm{w}_1 + w_3 \geq -3 \\ & \mathrm{w}_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\ & 2\mathrm{w}_1 + w_2 - 3w_3 \geq 2 \end{aligned}$$

. Η ‘άριστη λύση του δυικού προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} & w_1 = 2 \\ & \mathrm{w}_1 + w_2 + 2w_3 = 1 \\ & 2\mathrm{w}_1 + w_2 - 3w_3 = 2 \end{aligned}$$

οπότε $\tilde{w} = [2, -7/5, 1/5]$

Άσκηση

Εάν μια μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι ελεύθερη πρόσημου τότε ο αντίστοιχος δυικός μετασχηματισμός έχει την μορφή εξίσωσης

Πρωτεύον		**Δυικό**
max		min
≥ 0	➔	≥ 0
≤ 0		≤ 0
ελεύθερη προσήμου		=

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ

Πρωτεύον		**Δυικό**
max		min
≥ 0	➔	≥ 0
≤ 0		≤ 0
=		**ελεύθερη προσήμου**

Θεώρημα Συμπληρωματικού Περιθωρίου

Εάν στο ένα πρόβλημα ένας περιορισμός του είναι αδρανής η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου προβλήματος είναι μηδέν και επίσης εάν μια μεταβλητή είναι θετική τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ενεργός (έχει την μορφή εξίσωσης).

Άσκηση 1

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα
$$\begin{aligned}&\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5\\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

Οι μεταβλητές x_1, x_2 αντιστοιχούν σε ανισοτικό περιορισμός του τύπου $\ge$ άρα στο περιορισμό που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε $\ge$. Η μεταβλητή x_3 είναι ελεύθερη προσήμου και τότε στον περιορισμό που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε ισότητα. Το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα
$$\begin{aligned}&\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4\sigma_3 - 4\rho_3\\ &x_1 + 2x_2 + \sigma_3 - \rho_3 \le 5\\ &2x_1 - x_2 + 3\sigma_3 - 3\rho_3 \ge 2\\ &-2x_1 + x_2 - 3\sigma_3 + 3\rho_3 \le -2\\ &x_1, x_2, \sigma_3, \rho_3 \ge 0\end{aligned}$$

Θεώρημα: Μια εφικτή λύση του ενός προβλήματος θέτει ένα φράγμα στην βέλτιστη λύση του άλλου.

Θεώρημα: Έστω w^*, x^* δύο εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυικού προβλήματος για τις οποίες ισχύει y^*, z^*. Τότε οι λύσεις αυτές είναι αντίστοιχα βέλτιστες και για τα δύο προβλήματα.

Άσκηση 2

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα
$$\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 - x_2 - 30x_3 + 11x_4 + 2x_5 - 3x_6 \\
&-2x_1 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_6 + x_7 = 20 \\
&-4x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 - 3x_6 = 10 \\
&-5x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

με βέλτιστο tableau

1. Ποια η αρχική βάση;

2. Ποιος ο αντίστροφος πίνακας της βέλτιστης λύσης;

3. Ποιο το δυικό πρόβλημα

Λύση

Η αρχική βάση είναι η Ο αντίστροφος της βέλτιστης λύσης δίνεται ως

$$\left(B^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & -7/24 & 1/24 \\ -1/6 & 1/12 & 5/14 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Ενώ το δυικό δίνεται ως
$$\begin{aligned} &\max z = 4x_1 - x_2 - 30x_3 + 11x_4 + 2x_5 - 3x_6 \\ &-2x_1 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_6 + x_7 = 20 \\ &-4x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 - 3x_6 = 10 \\ &-5x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα
$$\begin{aligned} &\max z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1 \\ &x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

με βέλτιστο tableau

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_1	5	30	1	b	2	1	0	
x_5	0	10	0	c	-8	-1	1	
	z		0	a	7	d	e	

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Η ανάλυση ευαισθησία μελετά την μεταβολή της άριστης λύσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού όταν αλλάξουν μερικά από τα αρχικά δεδομένα του. Πιο συγκεκριμένα έχει νόημα να εξετάζουμε ξεχωριστά τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Διαταραχή-Μεταβολή των συντελεστών κόστους c_j.
2. Διαταραχή-Μεταβολή των σταθερών όρων b_i.
3. Διαταραχή-Μεταβολή των συντελεστών του συστήματος τω περιορισμών a_{ij}.
4. Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών.
5. προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών.

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

το οποίο κατά την λύση του παράγει το παρακάτω βέλτιστο tableau.

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	12	8/5	0	**1**	-1/5	2/5	-1/5	

x_1	5	9/5	1	**0**	7/5	1/5	2/5	
	z		0	**0**	-3/5	**-29/5**	**-M-2/9**	

Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι ο αντίστροφος της βέλτιστης βάσης είναι αυτός που αρχικά ήταν ο μοναδιαίος πίνακας απο τα στοιχεία κατω απο τις μεταβλη΄τες x_4, x_5

$$\left(B^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Διαταραχή του σταθερού όρου c_B

Μια μεταβολή του c_B συνεπάγετια και μεταβολή της αριστότητας εάν θυμηθούμε ότι εισέρχεται στον τύπο $s_j - c_j = c_B^T B^{-1} a_j - c_j$. Η μεταβολή λοιπον μας προσφέρει μια επιπλέον λορυφή η οποία είναι πιθανόν να μην είναι πλεον εφικτή και συνεπώς και βέλτιστη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια διαταραχή του διανύσματος κόστους $c_B = \left[c_1 = -2, c_2 = 4\right]$. Προφανώς με βάση την μέθοδο SIMPLEX θα πρέπει να προχωρήσουμε αφού αντικαταστήσουμε στο τελικό tableau τις τιμές των διανυσμάτων κόστους στον υπολογισμό των k_j's.

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

x_2	4	8/5	0	**1**	-1/5	2/5	-1/5	
x_1	-1	9/5	1	**0**	7/5	1/5	2/5	
	z		0	**0**	-3/5	**-29/5**	**-M-2/9**	

Στην περίπτωση όπου δεν έχουμε άριστη λύση προχωρούμε κανονικά στην επίλυς τους π.γ.π όπως γνωρίζουμε.

Διαταραχή του σταθερού όρου b_i

Ας θεωρήσουμε $\hat{b} = b + \delta_b$ που ικανοποιεί το κριτήριο της αριστότητας. Η συγκεκριμένη λύση θα πρέπει να είναι και εφικτή συνπώς θα πρέπει να ισχύει ότι $\hat{x}_B = B^{-1}b = B^{-1}b + B^{-1}\delta_b$. Αρα $\hat{x}_B = x_B + \sum_{i=1}^{m} \delta_b \beta_i$ καθώς

$$B^{-1} = \left[\beta_1, ..., \beta_i, ...\beta_m\right], \delta_b = \begin{bmatrix} \delta_{b_1} \\ \cdot \\ \\ \delta_{bm} \end{bmatrix}.$$

Εάν τώρα γυρίσουμε στο παράδειγμα μας θα δούμε ότι αλλάζοντας την συνθήκη των διαθέσιμων πόρων κατά $b_i = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$ επιβάλλεται απο την πλευρά μας να υπολογίσουμε τις νέες τιμές $b_i^* = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$ οπότε μπορούμε ν

έχουμε και τις βασικές λύσεις $\hat{z} = \begin{bmatrix} 12/5 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 22/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} > 0$ και να ελέγχουμε εάν

ιακνοποιύν τις ανάλογες συνθήκες.

Διαταραχή του σταθερού όρου a_{ij}

Στην περίπτωση αυτή αλλάζει ο πίνακας $A = a_{ij}$ των περιορισμών με αποτέλεσμα να υπεισέρχονται και αλλαγές στο βέλτιστο tableau.Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου προσθέτουμε δύο μεταβλητές με $c_6 = 3, c_7 = -4$ και αντίστοιχα διανύσματα $x_6 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}', x_7 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}'$.

Υπολογίζουμε τώρα

$$x_6 = B^{-1}x_6 = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$
$$x_7 = B^{-1}x_7 = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

τις οποίες και προσθέτουμε στην βάση

		c_j								

Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_2	4	8/5	0	**1**	-1/5	2/5	-1/5	7/5	-3/5	
x_1	-1	9/5	1	**0**	7/5	1/5	2/5	6/5	6/5	
	z									

Από αυτό το σημείο και μετά η διαδικασία είναι γνωστή.

Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών

Πρόκειται για ειδική περίπτωση της προηγούμενης μεταβολής. Θεωρητικά κάθε νέα μεταβλητή που εισάγεται σε ένα π.γ.π θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπήρχε και προηγούμενα στο αρχικό π.γ.π με όλους τους συντελεστές της ίσο με μηδέν. Ομοίως και κάθε μεταβλητή που αφαιρείται με την ίδια λογική θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπάρχει στο παρόν π.γ.π. Αρα για τις μή βασικές μεταβλητές διαγράφουμε την αντίστοιχη στήλη του tableau ενώ για τις βασικές πρέπει να βγάλουμε απο την βάση τις αντίστοιχε στήλες και μετά να τις διαγράψουμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γ. Σίσκος – Γραμμικός Προγραμματισμός, 2η έκδοση, Αθήνα 2000

Β. Κώστογλου – Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2003

Σ. Κουνιάς, Δ. Φακίνος – Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεσσαλονίκη 1988

Π. Μηλιώτης – Εισαγωγή στο Μαθηματικό Προγραμματισμό, Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα – Πειραιάς 1994

Γ. Αβδέλας, Θ. Σίμου - Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.

Βασιλείου Παναγιώτης - Χρήστος, Τσάντας Νίκος Ι (2000) Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα Εκδότης Ζήτη & Σια Ο.Ε.

ΠΑΠΑΡΡΙΖΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ (1999) ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Εκδόσεις ΖΥΓΟΣ .

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Leonard W. Swanson – Linear Programming: Basic Theory and Applications, 1980

D. Yudin, E. Golshtein – Linear Programming, Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1965.

Lieberman, H., 2005. Operations research (8^{th} edition). McGraw-Hill edition.

Gass, σ., (2010) Linear Programming: Methods and Applications: Fifth Edition

Varderbei (2011) Linear Programming: Foundations and extensions.Third Edition. Princeton University. http://www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/

Matousek, Jiri, Gärtner, (2007) Understanding and Using Linear Programming Springer.

ΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

http://www.informs.org/Resources/Courses/

http://www-classes.usc.edu/engr/ise/330/2003/

http://commerce.concordia.ca/bourjolly/lp.html

http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/

http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/ (Michael Trick)

http://www.lehigh.edu/~tkr2/teaching/

http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/(P.Jensen)

http://www.brunel.ac.uk/depts/ma/research/jeb/or/contents.html
(J.E. Beasley)

http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/

http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/ (NEOS)

http://mathworld.wolfram.com/

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα, Operational Research είναι επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την αριστοποίηση (βελτιστοποίησης) τους και τη λήψη αποφάσεων. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων ως μαθηματικά μοντέλα.

Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στις αρχές του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου και αποδόθηκε στην οργάνωση στρατιωτικών δραστηριοτήτων Μεγάλης Βρετανίας καθώς οι ανάγκες κατανομής του υπάρχοντος δυναμικού, ανθρώπινου και υλικού, σε μια μεγάλη ποικιλία στρατιωτικών επιχειρήσεων αποτέλεσε κύριο πραγματικό και μετέπειτα ερευνητικό ζήτημα για πολλούς επιστήμονες απο διαφορετικές ειδικότητες. Μάλιστα Μετά τον Β’ Παγκόσμιο Πόλεμο καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στις ΗΠΑ ενώ τις δεκαετίες του 1950 και 1960 αναπτύχθηκαν οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα..

Η αποτελεσματικότητα του νέου κλάδου προσέλκυσε το ενδιαφέρον της βιομηχανίας. Από την άλλη πλευρά, η πρόοδος των Η/Υ προκάλεσε και ταυτόχρονη ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας σε πολλά επίπεδα. Τα προβλήματα είναι πλέον τόσο μεγάλα σε πλήθος δεδομένων που είναι αδύνατη η εκτέλεση τον απαιτούμενων υπολογισμών με το χέρι. Ποιο συγκεκριμένα οι μεταβολές στο οικονομικό και επιχειρησιακό περιβάλλον, η αύξηση της πολυπλοκότητας της μεταβλητότητας καθώς και της αλληλεξάρτησης των διαφόρων φαινομένων και οι ανάγκες υποστήριξης για σφαιρική προσέγγιση προβλημάτων, για συστηματική ανάλυση και λήψης αποφάσεων συμβάλλει στην χρησιμοποίηση της επιχειρησιακής έρευνας ως ένα απαραίτητο εργαλείο.

Οι κατηγορίες μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας που καταγράφονται στην βιβλιογραφία παρουσιάζονται παρακάτω:

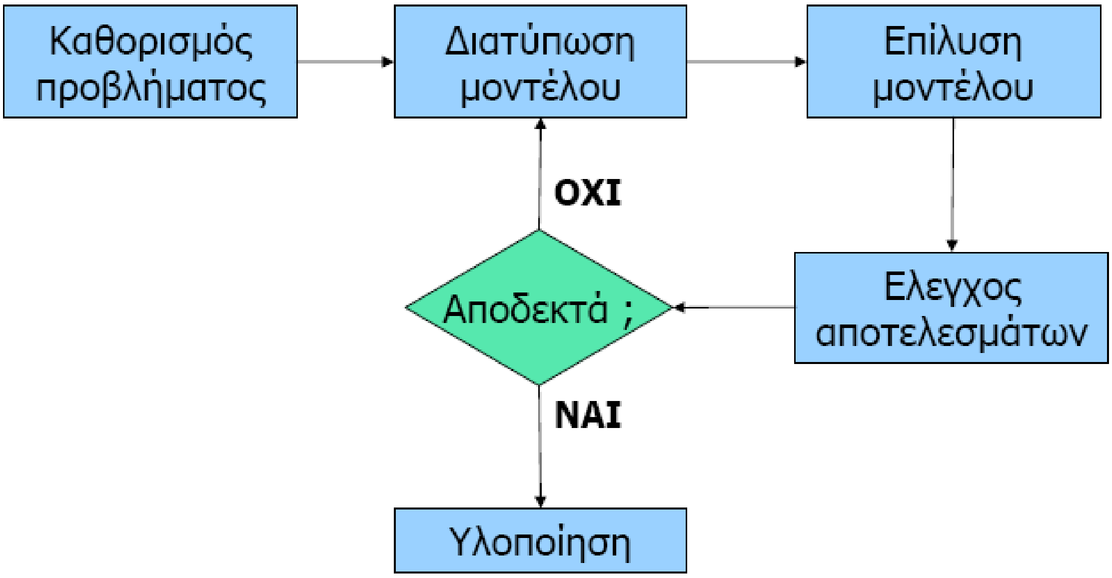
- Μαθηματικός Προγραμματισμός
- Δένδρα αποφάσεων (Decision trees)
- Πολυκριτηριακή Ανάλυση (Multiple Criteria Decision Analysis)
- Ανάλυση δικτύων (Network flows, PERT, CPM)
- Διαχείριση αποθεμάτων (Inventory control, EOQ)
- Γραμμές αναμονής (Queuing theory)
- Στοχαστικές Διεργασίες (Stochastic Processes)
- Θεωρία παιγνίων (Game theory)
- Προσομοίωση (simulation)

Τα στάδια που ακολουθούνται στην αντιμετώπιση ενός προβλήματος Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα εξής:

- Αναγνώριση και διατύπωση του προβλήματος
- Κατασκευή μαθηματικού μοντέλου
- Εύρεση της λύσης του μοντέλου
- Έλεγχος του μοντέλου και της λύσης
- Εφαρμογή της τελικής λύσης

Τα τρία πρώτα στάδια συχνά αναφέρονται και σαν μοντελοποίηση του προβλήματος. Το μαθηματικό μοντέλο ενός προβλήματος περιλαμβάνει:

- Τις μεταβλητές (μεταβάλουμε για να πετύχουμε το στόχο)
- Τις παραμέτρους (Τεχνολογικοί συντελεστές)
- Τους περιορισμούς (ή συνθήκες) - μορφή ανισοτήτων
- Τον αντικειμενικό στόχο (ή αντικειμενική συνάρτηση) δεν είναι πάντα μοναδικός αλλά μπορεί να αποτελείται από επί μέρους στόχους



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Βασικές Έννοιες Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί ενα ξεχωριστό μέρος της επιχειρησιακής έρευνας. Κύριος στόχος του γραμμικού προγραμματισμού η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση γραμμικών πραγματικών συναρτήσεων κάτω από ορισμένους περιορισμούς για τις μεταβλητές που αποτελεούν το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα επειδή τα συνήθη προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα τα οποία είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. κύριος σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος ή το χρόνος δεδομένου ότι στην εκάστοτε διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται κ.λ.π. Μάλιστα αρκετοί ερευνητές χρησιμοποιούν τον γραμμικό προγραμματισμό για τη προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (π.χ resource allocation problem). Ενδεικτικά παραδείγματα γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνουν:

- Την κατανομή σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες του εργατικού δυναμικού, του τεχνολογικού εξοπλισμού και των πρώτων υλών.
- Την κατανομή του κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά σχέδια.

- Τον προγραμματισμός της διακίνησης των προϊόντων μιας επιχείρησης προς τους πελάτες της.
- Την κατανομή υδατικών πόρων σε διάφορες ανταγωνιστικές χρήσεις.

Το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτών των αποφάσεων μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις, την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, την ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον, κ.λ.π.

Τα κύρια στοιχεία που χρησιμοποιούνται, γενικά, σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι τα εξής:

- Μεταβλητές απόφασης: x_1, x_2 ,... x_N : N ανταγωνιστικές δραστηριότητες
- Περιορισμοί: b_1, b_2,... b_M: M διαθέσιμοι πόροι (Δεξιά σκέλη περιορισμών)

$f_1(x_i)$, $f_2(x_i)$,... $f_M(x_i)$: ρυθμός κατανάλωσης των πόρων στις ανταγωνιστικές δραστηριότητες (M γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης)

- Τεχνολογικοί συντελεστές: aij: παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη σχέση κάθε μεταβλητής απόφασης i με τον περιορισμό j.
- Αντικειμενική συνάρτηση $f(x_i)$: Επικεντρώνεται στον στόχος της απόφασης της γραμμικής συνάρτησης των μεταβλητών απόφασης (μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση).

Συνεπώς ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αποτελείται από μια αντικειμενική συνάρτηση και από ένα σύνολο περιορισμών. Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το στόχο που επιχειρείται να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί και είναι μια σχέση μεταξύ μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών που ονομάζονται μεταβλητές απόφασης**.** Οι περιορισμοί (δυναμικότητας, διαθεσιμότητας πόρων, τεχνολογίας, κ.λ.π.) εκφράζουν τους περιορισμούς του περιβάλλοντος στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα. Κάθε συνδυασμός τιμών που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές απόφασης ονομάζεται λύση του προβλήματος. Όταν οι τιμές αυτές ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος, η λύση ονομάζεται εφικτή λύση

Βασικοί Ορισμοί Π.Γ.Π

Λύση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος $A\overline{x} \leq,=,\geq \overline{b}$, δηλαδή κάθε διάνυσμα x* που ικανοποιεί το σύστημα αυτό.

Δυνατή (ή εφικτή) λύση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα x* που ικανοποιεί τους περιορισμούς $x \geq 0$.

Βέλτιστη δυνατή λύση (βέλτιστη λύση) του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση αυτού, που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

Βάση του συστήματος (ή βάση) είναι ο πίνακας $m \times m$, που προκύπτει από τον πίνακα A του συστήματος, και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσεως, λέγονται **βασικές μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.Οι υπόλοιπες (n-m) μεταβλητές που αντιστοιχούν στις (n-m) στήλες του πίνακα A που δεν περιλαμβάνονται στη βάση λέγονται **μη - βασικές μεταβλητές**.

Βασική εφικτή λύση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση Αι, είναι μια εφικτή λύση αυτού, που έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές, ως προς τη βάση αυτή, διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.

Ωστόσο οι παραπάνω βασικές, εφικτές ή μη λύσεις ή και απλά οι λύσεις ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ακολουθούν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος

2. Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτό κλειστό σύνολο.

3. Κάθε βασική εφικτή λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

4. Αν υπάρχει μια εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε υπάρχει και μια βασική εφικτή λύση αυτού.

5. Αν υπάρχει μια βέλτιστη εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική εφικτή λύση.

6. Αν υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη εφικτή λύση, που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι εξετάζουμε την παραγωγή δύο διαφορετικού τύπου βενζίνης απο ένα διυλιστήριο το όποίο έχει δύο εισόδους A και B. Η βενζίνη που παράγει είναι δύο ειδών super, unleaded. Θεωρούμε τις εξής διαδικασίες P,Q.

Πίνακας 1.

Διαδικασίες	Input		Output		Κέρδος	
	A	B	C	D		
P	6	4	5	2	2	x
Q	3	5	2	4	3	y
Απόθεμα	180	200	100	80	Απαιτήσεις	

Το βασικό μας ερώτημα εδώ αφορά τις σχέσεις που θα πρέπει να ισχύουν έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέδος του δυιλιστηρίου. Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το κέδος θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία P εκτελείται x-φορές ενώ η διαδικασία Q y-φορές. Άρα το επιδιωκόμενο κέρδος του δυιλησтηρίου θα είναι $z = 2x + 3y$ (1).

Προφανώς το δυιλιστίριο θα επιθυμούσε να πετύχαινε το μέγιστο κέρδος. Ωστόσο η τιμή αυτή επηρεάζεται απο το απόθεμα των καυσίμων που παράγει καθώς κια απο τις απαιτήσεις των καταναλωτών. Στην γλώσσα του μαθηματικού προγραμματισμού οι περιορισμοί αυτοί καλούντια φυσικοί περιορισμοί.

Με βάση τα παραπάνω το πρόβλημα μας τώρα δεν εστιάζεται μόνο στην προηγούμενη σχέση (1) αλλά διαφοροποιείται και γίνεται $\begin{array}{l} \max z = 2x + 3y \\ 6x + 3y \le 180 \end{array}$ (2).

Αύξηση του πλήθους των περιορισμων περιορίζουν το σημείο ακρότατου (μέγιστο) με άλλα λόγια η τιμή του καθορίζεται και επηρεάζεται απο περισσότερους παράγοντες. Γυρνώντας στο παράδειγμα μας τώρα οι περιορισμού που ισχύουν με βάση τον πίνακα 1 διαμορφώνουν το πρόβλημα μας ως εξής:

$$\begin{aligned}&\max z = 2x+3y\\&6x+3y \le 180\\&4x+5y \le 200\\&5x+2y \le 80\\&x, y \ge 0\end{aligned} \qquad (3)$$

Έχοντας εξετάσεις το παραπάνω πρόβλημα και διαμορφώνοντας με βάση τα στοιχεία που έχουμε στην διάθεσή μας το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις προϋποθέσεις που θα πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις αυτές δίνονται παρακάτω:

1. Προσθετικότητα

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι άμεσα αναλογική με το επίπεδο της δραστηριότητας . Όταν το επίπεδο της

δραστηριότητας αυξάνει ή μειώνεται , η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που οφείλεται στην αλλαγή μίας μονάδας της δραστηριότητας παραμένει ίδια .επίσης το ποσό των πόρων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δραστηριότητα είναι άμεσα ανάλογο με το επίπεδο της δραστηριότητας.

2. Αναλογικότητα

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το άθροισμα της συνεισφοράς κάθε μίας δραστηριότητας. Όμοια, το συνολικό ποσό των πόρων που χρησιμοποιείται από όλες τις δραστηριότητες είναι το άθροισμα του ποσού των πόρων που κάθε μία δραστηριότητα χρησιμοποιεί ανεξάρτητα.

3. Διαιρετότητα

Όλες οι δραστηριότητες είναι συνεχείς και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Δηλαδή ο Γ.Π. δεν είναι κατάλληλος για προβλήματα που οι μεταβλητές λήψης απόφασης είναι ακέραιοι.

4. Καθοριστικότητα

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού καταγράφονται και ως καθοριστικά υποδείγματα. Με άλλα λόγια δεν λαμβάνουν υπόψη ότι όλοι οι συντελεστές είναι προσεγγίσεις , όταν υπολογίζει μία συγκεκριμένη λύση. Γι'αυτό πρέπει να γίνεται ανάλυση ευαισθησίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα, τα Π1, Π2 και Π3. Για την παραγωγή των προϊόντων απαιτείται επεξεργασία από τρεις μηχανές, τις Α, Β και Γ. Ο χρόνος επεξεργασίας των προϊόντων στις μηχανές αντίστοιχα δίνεται στον ακόλουθο πίνακα, μαζί με τις διαθέσιμες εβδομαδιαίες ώρες των μηχανών.

Μηχανές	Π1	Π2	Π3	Δυναμικότητα Μηχανών (h)
Α	9	3	5	500
Β	5	4	0	350
Γ	3	0	2	150

Λόγω προηγούμενων συμβάσεων που έχουν υπογραφεί, η επιχείρηση πρέπει να παράγει τουλάχιστον 20 μονάδες του προϊόντος Π3 την εβδομάδα. Το ανά μονάδα κέρδος των προϊόντων είναι 50, 20 και 25€ αντίστοιχα. Ζητείται να βρεθεί η άριστη ποσότητα παραγωγής των προϊόντων ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Μια εταιρεία ετοιμάζεται να εισάγει ένα νέο προϊόν. Έχει επιλέξει για την διαφημιστική της εκστρατεία 4 διαφημιστικά μέσα: τηλεόραση, ραδιόφωνο, διαδίκτυο, έντυπα μέσα. Το μοναδιαίο κόστος διαφήμισης για κάθε μέσο φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί. Επιπλέον, η αποδοτικότητα της διαφημιστικής εκστρατείας θα μετρηθεί με βάση τον αριθμό των ατόμων που θα εκτεθούν σε αυτή, υπολογίζοντας ένα μοναδιαίο δείκτη ακροαματικότητα / θεαματικότητας / επισκεψιμότητας σε κάθε μέσο. Όσο πιο υψηλός είναι ο δείκτης, τόσο πιο επιτυχημένο είναι το μέσο.

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Διαδίκτυο	Έντυπα Μέσα
Κόστος (€)	100	10	60	40
Δείκτης Αποδοτικότητας	100	22	70	50

Υπάρχουν οι ακόλουθοι περιορισμοί:

1) Το συνολικό κόστος δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 30000€.
2) Δεν μπορούν να μπούν περισσότερες από 12 διαφημίσεις στο διαδίκτυο.
3) Ο αριθμός των διαφημίσεων στο διαδίκτυο και τα έντυπα μέσα, δεν πρέπει να υπερβαίνει το 40% των διαφημίσεων που εκπέμπονται σε τηλεόραση και ραδιόφωνο.
4) Στην τηλεόραση και στο ραδιόφωνο πρέπει να προβληθούν τουλάχιστον 10 διαφημίσεις.

Να βρεθεί ο βέλτιστος αριθμός των διαφημίσεων σε κάθε μέσο, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική ακροαματικότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).

Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Σχεδιάζουμε ένα σύστημα αξόνων για τις μεταβλητές X και Y.
2. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε μια-μια κάθε ανισότητα του μοντέλου (δηλ. σχεδιάζουμε την αντίστοιχη ισότητα και αποκλείουμε το ημιεπίπεδο που δεν ικανοποιεί την ανισότητα).
3. Η περιοχή που απομένει περιέχει το σύνολο των **εφικτών** λύσεων, δηλαδή όσων δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς ή τις συνθήκες.
4. Σχεδιάζουμε την αντικειμενική συνάρτηση και βρίσκουμε ποια από τις εφικτές λύσεις την μεγιστοποιεί ή την ελαχιστοποιεί (ανάλογα).
5. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι οι βέλτιστες τιμές των X και Y που ζητάμε.

Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης.

Ο πρώτος τρόπος είναι η προσέγγιση της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

Ο δεύτερος τρόπος είναι η προσέγγιση της χάραξης των καμπύλων ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης. Βρίσκουμε το σημείο όπου η ισοκερδής εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν την εγκαταλείψει.

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Περιοριστική ευθεία είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
- Κορυφή ή ακραίο σημείο είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.
- Εφικτή περιοχή είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.
- Εφικτή λύση (ακραίου σημείου) είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Γειτονικές εφικτές λύσεις (ακραίου σημείου) είναι αυτές που συνδέονται με μια ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής.
- Βασική λύση (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.
- Βασική εφικτή λύση είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Άριστη (βέλτιστη) λύση είναι η βασική εφικτή λύση ακραίου σημείου (κορυφή της εφικτής περιοχής) που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Δύναται να είναι ακριβώς μια, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις με άπειρες άριστες λύσεις, καμία άριστη λύση, ή η αντικειμενική συνάρτηση να τείνει στο άπειρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένας κτηνοτρόφος θέλει να προετοιμάσει ένα μείγμα από τις τροφές A και B. Κάθε κιλό της τροφής A περιέχει 120 γρ. πρωτεΐνες, 56 γρ. υδατάνθρακες, 103 γρ. λίπη και κοστίζει 24 ευρώ. Κάθε κιλό της τροφής B περιέχει 60 γρ. πρωτεΐνες, 112γρ. υδατάνθρακες και 120γρ. λίπη και κοστίζει 18 ευρώ. Το μείγμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 480 γρ. πρωτεΐνες, 448 γρ. υδατάνθρακες και 720 γρ. λίπη. Ο κτηνοτρόφος θέλει να παρασκευάσει το μείγμα κατά τέτοιο τρόπο που να πληρούνται οι περιορισμοί και να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αν x_1 και x_2 είναι τα κιλά των τροφών A και B που θα αποτελέσουν το μείγμα με το ελάχιστο κόστος τότε το πρόβλημα σε μαθηματική μορφή είναι :

$$\min z = 24x_1 + 18x_2$$

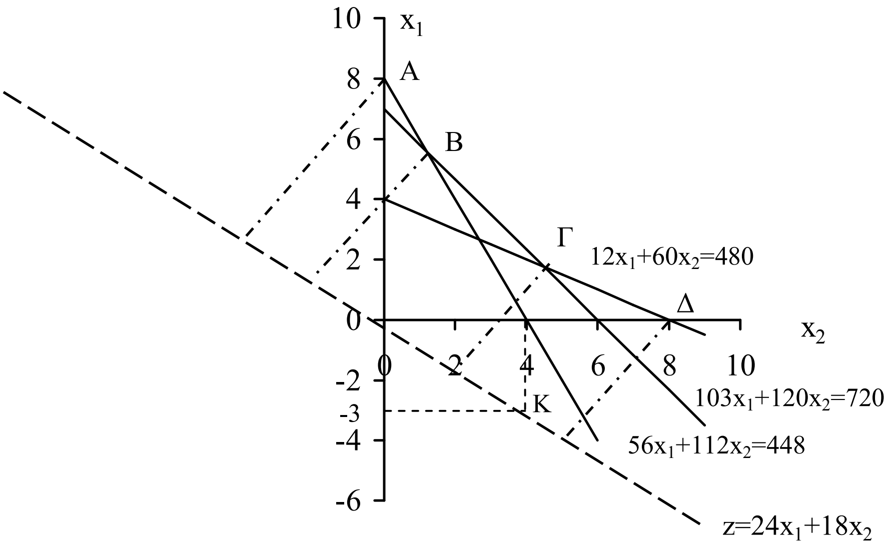
Η σχέση αυτή εκφράζει την οικονομική ή αντικειμενική συνάρτηση της οποίας ζητάμε το μέγιστο. Στο πρόβλημα αυτό θα έχουμε ένα σύστημα περιορισμών με τρεις ανισώσεις:

Περιορισμός πρωτεϊνών	$120x_1+60x_2\geq480$
Περιορισμός υδατανθρακών:	$56x_1+112x_2\geq448$
Περιορισμός λιπών:	$103x_1+120x_2\geq7208$

Αρχικά κάνουμε τη γραφική επίλυση του συστήματος των περιορισμών. Λόγω του γεγονότος ότι $x_1,x_2\geq0$, θα εργασθούμε μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Επομένως κάνουμε τη γραφική παράσταση (σχήμα 1) των ευθειών:

$120x_1+60x_2=480$
$56x_1+112x_2=448$
$103x_1+120x_2=7208$

Το σύστημα των περιορισμών έχει λύσεις όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται δεξιά και άνω της πολυγωνικής γραμμής x_1ΑΒΓΔx_2 όπως και αυτά που βρίσκονται πάνω στην πολυγωνική γραμμή λόγω της ύπαρξης του σημείου ισότητας στις ανισώσεις του συστήματος $\min z = 24x_1 + 18x_2$. Το σύστημα επομένως έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή άπειρους συνδυασμούς x_1και x_2 που το ικανοποιούν. Ειδικότερα ένα από τα σημεία των κορυφών Α.Β.Γ.Δ. δίνει τον άριστο συνδυασμό των x_1και x_2 που ελαχιστοποιεί την οικονομική συνάρτηση. Για την εύρεση της «καλύτερης κορυφής» βρίσκουμε την κλίση της οικονομικής συνάρτησης



Σχήμα 1 Διαγραμματική επίλυση ελαχίστου

Η κορυφή που απέχει λιγότερο από την ευθεία $\min z = 24x_1 + 18x_2$, που διέρχεται από την αρχή Ο, είναι η «καλύτερη κορυφή»». Έτσι έχουμε : $24x_1 = Z - 18x_2$

ή $x_1 = \frac{1}{24}Z - \frac{18}{24}x_2$ συνεπώς η κλίση είναι : $-\frac{18}{24} = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$

Άρα το σημείο Κ που με την αρχή 0 ορίζουν τη θέση της ευθείας ΟΚ, δηλαδή της ευθείας $Z=24x_1+18x_2$ που διέρχεται από την αρχή, έχει συντεταγμένες (4, -3).

Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.2. η κορυφή Γ απέχει λιγότερο από την ευθεία ΟΚ. Οι συντεταγμένες επομένως x_1, x_2 της κορυφής Γ ελαχιστοποιούν την οικονομική συνάρτηση. Για την εύρεση των συντεταγμένων αυτών λύνεται το σύστημα των ευθειών που η τομή τους είναι το σημείο Γ. Οι ευθείες αυτές είναι :

$120x_1+60x_2=480$
$103x_1+120x_2=7208$

Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι:

$x_1=1,752$
$x_2=4,496$

Έτσι το ελάχιστο της οικονομικής συνάρτησης είναι:

$$\min z=24x_1+18x_2=(24*1,752)+(18*4,496)=122,98$$

Συνεπώς αν ο κτηνοτρόφος θέλει το μείγμα από τις τροφές Α και Β να του κοστίζει το λιγότερο δυνατόν και να πληροί τους περιορισμούς ως προς το ελάχιστο των πρωτεϊνών, υδατανθράκων και λιπών, πρέπει να αναμίξει 1,752χλγ. της τροφής Α με 4,496χλγ. της τροφής Β. Το κόστος τότε του μείγματος αυτών θα είναι 122,98 ευρώ.

Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι εκτός από την περίπτωση που έχουμε εφικτή λύση στην επίλυση π.γ.π συμπεριλαμβάνονται η απειρία, οι απεριόριστες καθώς και οι αδύνατες λύσει όπως παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα:

Απεριόριστη Λύση:

ΥΤΠ:

$X, Y \geq 0$

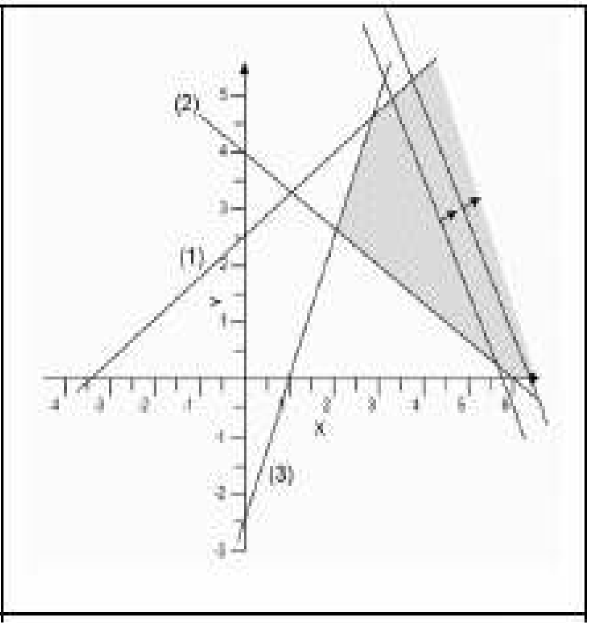
(1) $-6X + 8Y \geq 20$

(2) $2X + 3Y \geq 12$

(3) $10X - 4Y \geq 10$

ΑΣ:

$\max(4X + 2Y)$



Απειρία Λύσεων:

ΥΤΠ:

$X, Y \geq 0$

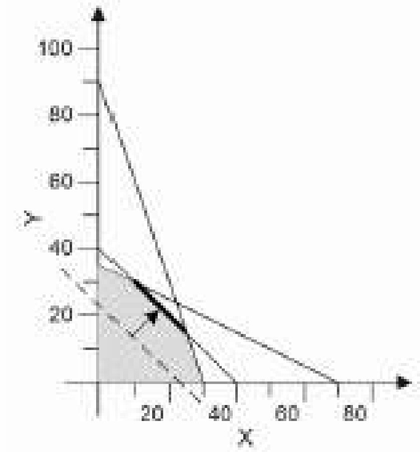
(1) $3X + Y \leq 90$

(2) $2X + 2Y \leq 80$

(3) $X + 2Y \leq 70$

ΑΣ:

$\max(6X + 6Y)$



Αδύνατη Λύση:

ΥΤΠ:

$X, Y \geq 0$

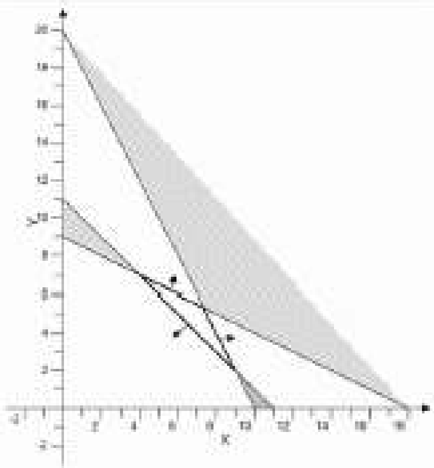
(1) $2X + Y \geq 20$

(2) $X + Y \leq 11$

(3) $X + 2Y \geq 18$

ΑΣ:

$\max(2X + 3Y)$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η Μέθοδος Simplex

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο βρίσκεται σε τυπική μορφή. Σκοπός μας είναι να παρέχουμε μια απλή και περιγραφική διαδικασία για το πώς αυτό το πρόβλημα θα λυθεί με την συγκεκριμένη μέθοδο.

$$\begin{aligned} &\max z = 6x_1 + 7x_2 \\ &s.t \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε και να αποδοθεί ως:

$$\begin{aligned} &\max z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &s.t \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 12 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 8 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Αρχικά για να σχηματίσουμε τον πίνακα Tableau του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να υπολογίσουμε –εντοπίσουμε μια βάση της λύσης. Με τον όρο βάση εννοούμε τα διανύσματα της μορφής $(1,0,0.....,0),(0,1,0,.....,0)........(0,0,....,1)$ του διανυσματικού χώρου R^n. Δηλαδή τις στήλες από τα x_j που σχηματίζουν τον nxn πίνακα. Στην δεύτερη στήλη (c_B) του Tableau εισάγουμε τους συντελεστές τους αντίστοιχους συντελεστές της βάσης όπως αυτοί εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση $z,(x_3 = 0),(x_4 = 0)$. Στην Τρίτη τώρα στήλη του Tableau (x_B) εισέρχεται η στήλη b. Τέλος στις επόμενες στήλες τοποθετούμε τους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών του προβλήματος γ.π βρισκόμενο πάντα σε τυπική μορφή.Με βάση τα παραπάνω το Tableau σχηματίζεται ως εξής:

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	
	0	8	2	1	0	1	
	z						

Στην στήλη δίπλα στο c_j εμφανίζονται οι συντελεστές όπως αυτοί βρίσκονται στην αντικειμενική συνάρτηση. Τώρα οι κενές θέσεις στο Tableau συμπληρώνονται με τα άγνωστα μέχρι στιγμής στοιχεία k_j.

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Πως όμως υπολογίζονται οι τιμές των στοιχείων αυτών. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να κάνουμε τον διαχωρισμό και να αναφέρουμε ότι για $k_j, j=1,...,5$ τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $c_b * b$. Άρα το $k_1 = 0*12+0*8=0$ ενώ τα υπόλοιπα υπολογίζονται με βάση των εξής τύπο $k_j = c_j - c_b * b$. Εάν τώρα κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις θα έχουμε ότι ο πίνακάς μας παίρνει την παρακάτω μορφή:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	$k_2 = 6-(2\cdot 0+2\cdot 0) = 6$	k_3=7–(3·0+1·0) =7	$k_4 = 0$	$k_5 = 0$	

Tableau 1

Να σημειώσουμε ότι τα υπολογισμένα στοιχεία στις θέσεις $k_4 = k_5 = 0$

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6

	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	0	6	7	0	0	

Ορισμός: Καθορίζουμε ως εισερχόμενη στην βάση μεταβλητή την μεταβλητής της οποίας η υπολογισμένη αντίστοιχα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παράδειγμά μας ουσιαστικά πρόκειται για την μεταβλητή x_2. Προφανώς μιλώντας για μεταβλητή που θα εισέλθει στην βάση μας κάποια θα πρέπει να εξέλθει.

Ορισμός: Καθορίζουμε ως εξερχόμενη μεταβλητή από την βάση την μεταβλητή η οποία έχει την μικρότερη τιμή θ.

Συνεπώς θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα για το πώς θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους k_6, k_7 που αναφέρονται στην παράμετρο θ. Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τα στοιχεία της στήλης b και της στήλης που θα εισέλθει στην βάση. Πιο συγκεκριμένα είναι ο λόγος τους συνεπώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα $k_6 = 12/3 = 4, k_7 = \frac{8}{1} = 8$.

Αρα τελικά το Tableau 1 έχει την εξής μορφή.

Tableau 1

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	4

x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z	0	6	7	0	0	

Ως οδηγό στοιχείο λοιπόν μπορούσαμε να ορίσουμε αυτό που αντιστοιχεί στο στοιχείο της γραμμής που βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή καθώς και η εισερχόμενη μεταβλητή (συνεπώς το 3). Αντικαθιστούμε λοιπόν στην πρώτη στήλη της βάσης την εξερχομένη μεταβλητή με την εισερχόμενη και προκύπτει το Tableau 2.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7						
x_4	0						
	z						

Για νε γεμίσουμε με στοιχεία το δεύτερο μας Tableau θα πρέπει να υπολογίσουμε ότι ο οδηγός στοιχείο θα πρέπει να ισούται με την μονάδα (διαιρείται με το 1/3). Οπότε στην παρούσα φάση το Tableau 2 μετατρέπεται:

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ

x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	
x_4	0						
	z						

Κάνοντας τις κατάλληλες γραμμοπράξεις επιθυμούμε το στοιχείο κάτω από τον οδηγό στοιχείο να γίνει μηδέν. Οπότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με (-1) και την προσθέτουμε στην δεύτερη οπότε το Tableau 2 έχει την παρακάτω μορφή:

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική υπολογίζουμε τις τιμές των $k_j, j=1,...,7$ και προκύπτει το παρακάτω Tableau.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6

x_4	0	4	4/3	0	- 1/3	1	k_7
	z	28	4/3	0	- 7/3	0	

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η μεγαλύτερη θετική τιμή αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1. Διαιρώντας τώρα με τις τιμές της μεταβλητής παίρνουμε τα k_6 και k_7.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	6
x_4	0	4	4/3	0	- 1/3	1	3
	z	28	4/3	0	- 7/3	0	

Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_1 ενώ η εξερχόμενη η x_4.Πολλαπλασιάζοντας με 3/4 παίρνουμε τον οδηγό στοιχείο όπως απεικονίζεται παρακάτω.

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ

x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	-
x_1	6	3	**1**	0	- 1/4	3/4	-
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

ΟΔΗΓΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε την γραμμή που αναφέρεται το στοιχείο x_1 με (-2/3) και προσθέσουμε στην από πάνω γραμμή θα έχουμε ότι:

Tableau 3

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	½	- 1/2	-
x_1	6	3	**1**	0	- 1/4	3/4	-
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των k_j

Tableau 3

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	½	-1/2	-
x_1	6	3	**1**	0	-1/4	3/4	-
	z	32	0	0	-2	-1	

Η διαδικασία μας μέσω της μεθόδου Simplex σε αυτό το σημείο έχει τελειώσει καθώς στην γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης οι υπολογισμένες ποσότητες έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός. Η κορυφή της άριστης λύσης δίνεται από τα στοιχεία της στήλης b και της πρώτης στήλης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Σε αυτό το μέρος των σημειώσεων θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια πιο θεωρητική προσέγγιση για το πώς προκύπτει μια εφικτή λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και με ποιον τρόπο επιτυγχάνεται η συγκεκριμένη λύση. Αρχικά παραθέτονται κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν βασικά στοιχεία για την κατανόηση της λύσης:

- Κυρτό Σύνολο: Ένα σύνολο C καλείται κυρτό εάν $\forall\ x_1, x_2 \in C\ \exists\ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C, \lambda \in [0,1]$

- Το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες του ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς καλείται εφικτό σημείο. Ο χώρος των εφικτών σημείων καλείται εφικτός χώρος ενώ βέλτιστο σημείο αυτό που μας δίνει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

- **εσωτερικό σημείο συνόλου**: εάν υπάρχει ανοικτή σφαίρα $(x,\varepsilon)\in C, \forall\varepsilon>0$ Ένα σημείο θα καλείται συνοριακό όταν $\exists G(x,\varepsilon)\in C, \forall\varepsilon>0 \wedge \forall\varepsilon>0, G(x,\varepsilon)\cap C=\varnothing$

- **Ακρότατο συνοριακό σημείο** καλείται αυτό που δεν μπορεί αν εκφραστεί ως γραμμικό κυρτός συνδυασμός δύο διακεκριμένων σημείων του συνόλου.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού οι εξισώσεις των περιορισμών μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & \dots\ \dots & +a_{1j}x_j + & \dots & +a_{1n}x_n + & \dots & +a_{1n+m}x_{n+m} = b_1 \\
a_{21}x_1 + & \dots\ \dots & +a_{2j}x_j + & \dots & +a_{2n}x_n + & \dots & +a_{2n+m}x_{n+m} = b_2 \\
\dots & \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1}x_1 + & \dots\ \dots & +a_{mj}x_j & \dots & +a_{mn}x_n + & \dots & +a_{m,n+m}x_{n+m} = b_m
\end{array}
$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν με την μορφή πινάκων ως εξής: $A\cdot x=b$ όπου

$$
A=\begin{bmatrix}
a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n+m} \\
a_{21} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2n+m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & \dots & a_{m,n+m}
\end{bmatrix},
x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix},
b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},
$$

Εάν θελήσουμε τώρα να δώσουμε τον πίνακα Α υπό την μορφή ενός διανύσματος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι $A = \left[a_1, a_2, ..., a_j, ..., \overset{\square}{a_{n+m}} \right]$. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι κάποιες από τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε ορισμένα από τα n διανύσματα του πίνακα Α ισούται με μηδέν τότε θα έχουμε ,μια μόνη λύση από τις εναπομείνουσες μεταβλητές (βασικές) εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα[1].

Εάν επιστρέψουμε τώρα στο πρόβλημά μας του γραμμικού προγραμματισμού όπως αυτό αναγράφεται σε τυπική μορφή θα έχουμε ότι

Όπως έχουμε ήδη πει η κανονική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να δοθεί με την ακόλουθη μορφή:

$$
\begin{array}{llllllll}
\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \\
a_{11}x_1 + & ... & ... & +a_{1j}x_j + & ... & +a_{1n}x_n + & ... & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & ... & ... & +a_{2j}x_j + & ... & +a_{2n}x_n + & ... & = b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & = ... \\
a_{m1}x_1 + & ... & ... & +a_{mj}x_j & ... & +a_{mn}x_n + & ... & = b_m \\
x_1, x_2, ..., x_n \geq 0
\end{array}
$$

Ωστόσο το συγκεκριμένο πρόβλημα με την εισαγωγή των αρνητικών m στον αριθμό περιθωρίων μεταβλητών μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

[1] Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα καλούνται αυτά που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$\sum_{i=1}^{N} a_i u_i = 0, u_1 = u_2 = ... = u_N = 0$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & ... & ... & +a_{1j}x_j + & ... & +a_{1n}x_n + & ... & +a_{1n+m}x_{n+m} = b_1 \\
a_{21}x_1 + & ... & ... & +a_{2j}x_j + & ... & +a_{2n}x_n + & ... & +a_{2n+m}x_{n+m} = b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
a_{m1}x_1 + & ... & ... & +a_{mj}x_j & ... & +a_{mn}x_n + & ... & +a_{m,n+m}x_{n+m} = b_m \\
x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 & & & & & & &
\end{array}$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας μια ισοδύναμη μορφή και ως:
$$\begin{array}{l} \max z = c^T x \\ s.t \ \left[A / I\right] x = b \\ x_j \geq 0 \end{array}.$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο ότι το διάνυσμα x περιέχει και τις m περιθώριες μεταβλητές. Ενώ το διάνυσμα των συντελεστών του x στην αντικειμενική συνάρτηση c_j για τις μεταβλητές από $j = n+1, n+2, ..., n+m$ έχει μηδενικές τιμές. Με βάση το εξής θεώρημα:

Θεώρημα: Το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος $\begin{array}{l} \max z = c^T x \\ s.t \ \left[A / I\right] x = b \\ x_j \geq 0 \end{array}$ είναι κυρτό.

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εάν το πρόβλημα έχει λύση τότε δεν υπάρχει σημείο του χώρου των λύσεων όπου η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη των τιμών που λαμβάνει στα ακρότατα σημείου του χώρου αυτού.

Για να μιλήσουμε για λύση στο παραπάνω πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να προσδιορίσουμε μια λύση τουλάχιστον του πολυέδρου που σχηματίζουν (κυρτό ασφαλώς) του χώρου των εφικτών λύσεων. Έστω ότι έχουμε προσδιορίσει την λύση x^1. Για καθαρούς λόγους συμβολισμού και στην προσπάθεια μας να θυμίσουμε την έννοια του διανύσματος θα θέσουμε την λύση ως $\tilde{x}^1$.Πως προκύπτει η λύση $\tilde{x}^1$; Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό $\left[A/I\right]x=b$ και θεωρώντας τις συντεταγμένες του διανύσματος A ως εξής $\tilde{a}_j=(a^1,a^2,...,a_{n+m})$ δηλαδή να αποτελούν τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα $\left[A/I\right]$ μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία του διανύσματος $\tilde{x}$ με τέτοιον τρόπο ώστε τα πρώτα m στοιχεία να αντιστοιχούν στις m βασικές μεταβλητές. Συνεπώς το διάνυσμα $\tilde{x}$ μπορεί να γραφεί ως εξής $\tilde{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ ... \\ x_n \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_B \\ \_ \\ 0 \end{bmatrix}$

με m-διάστατο το διάνυσμα των μη μηδενικών γραμμών και n-διάστατο των μηδενικών.

Με την ίδια λογική μπορούμε να διατάξουμε τις στήλες $\tilde{a}_j=(a^1,a^2,...,a_{n+m})$ του πίνακα $\left[A/I\right]$ με ανάλογο τρόπο. Δηλαδή $\tilde{a}_j=\left[a^1,a^2,...,a_m,0,...,0\right]=\left[A|C\right]$. Αρα η εξίσωση $\left[A/I\right]x=b$ μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως $\left[A|C\right]\begin{bmatrix} x_B \\ \_ \\ 0 \end{bmatrix}=b$. Συνεπώς εάν κάνουμε προσεκτικά τις πράξεις θα έχουμε ότι $Ax_B+C0=b$ και στην περίπτωση που υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A θα έχουμε την λύση $\tilde{x}^1=A^{-1}\tilde{b}$.

Για να είναι ένα σημείο $\tilde{x} \in W$ ακρότατο σημείο ενός χώρου W θα πρέπει το διάνυσμα $\tilde{x}$ να αποτελεί μια βασική εφικτή λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &\max z = c^T x \\ s.t\ &\left[A/I\right]x = b \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

ΤΕΧΝΙΚΗ SIMPLEX-ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ

Ξεκινάμε από μια κορυφή και πηγαίνουμε σε άλλες. Μετά από κ-επαναλήψεις θα έχουμε υπολογίσει τις συντεταγμένες της x^k κορυφής στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει τιμή $\tilde{z}^k = \left(\tilde{c}_k\right)^t \tilde{x}^k$. Έστω ότι $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \ldots \\ x_m^k \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B^k \\ \_ \\ 0 \end{bmatrix}$ όπου με επαναδιάταξη τοποθετούμε στο τέλος τα μηδενικά στοιχεία. Θα πρέπει να θυμίσουμε ότι το διάνυσμα αυτό αντιστοιχεί στις παραμέτρους $a_i = (a_1^k, a_2^k, ..., a_m^k, a_{m+1}^k, ..., a_j^k, ...a_{n+m}^k)$. Προφανώς θα μπορούσαμε να γράψουμε και την αντίστοιχη σχέση όπου $\sum_{i=1}^{m} x_i^k a_i^k = b^k$. Όπως πράξαμε και πριν για την λύση $\tilde{x}^1$ θα μπορούσαμε ομοίως να υπολογίσουμε και λύση για την κ-κορυφή. Αφού κάθε βασική λύση πρέπει να περιλαμβάνει m βασικές μεταβλητές μια νέα βασική λύση μπορεί να κατασκευασθεί θέτοντας στην βασική εφικτή λύση μιας από τις m βασικές μεταβλητές ίση με το μηδέν και αντικαθιστώντας την με κάποια από τις μη βασικές μεταβλητές. Προφανώς θα πρέπει να απαιτήσουμε η προκύπτουσα βασική λύση να είναι εφικτή αλλά και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με την νέα λύση να είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα.

Ας εναλλάξουμε τώρα την θέση μιας βασικής μεταβλητής με μια μη βασική εισάγοντας στην βάση την μεταβλητή x_j^k. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να θυμίσουμε ότι σε αυτήν την μη βασική μεταβλητή αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\tilde{a}_j^k$. Το διάνυσμα αυτό μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός βασικών διανυσμάτων του χώρου μια και τα m-διανύσματα της τρέχουσας βάσης $(a_1^k, a_2^k, ..., a_m^k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δηλαδή θα μπορούσε να εκφραστεί ως $\tilde{a}_j^k = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i^k \tilde{u}_{ij}^k$ με ένα από τα $\tilde{u}_{ij}^k$[2] τουλάχιστον διαφορετικό του μηδενός. Εάν $\tilde{u}_j^k = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1j}^k \\ \ldots \\ \tilde{u}_{ij}^k \\ \ldots \\ \tilde{u}_{mj}^k \end{bmatrix}$ τότε θα μπορούσαμε να έχουμε ότι

$$\tilde{a}_j^k = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i^k \tilde{u}_{ij}^k = \left[\tilde{a}_1^k, \tilde{a}_2^k, ..., \tilde{a}_m^k \right] \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1j}^k \\ \ldots \\ \tilde{u}_{ij}^k \\ \ldots \\ \tilde{u}_{mj}^k \end{bmatrix} = B^k \tilde{u}_j^k$$ [3]

καθώς $\tilde{u}_j^k = \left[\tilde{u}_{1j}^k, ..., \tilde{u}_{ij}^k, ..., \tilde{u}_{mj}^k \right]^t$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια πραγματική παράμετρο τ^k. Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση με την παράμετρο αυτή θα έχουμε ότι $\tau^k B^k \tilde{u}_j^k = \tau^k \tilde{a}_j^k$. Αφαιρώντας τις

[2] Ο δείκτης i αναφέρεται στο βασικό διάνυσμα ενώ ο j στο μη βασικό διάνυσμα.

[3] Θυμίζουμε ότι $\left[\tilde{a}_1^k, \tilde{a}_2^k, ..., \tilde{a}_m^k \right] \equiv B$ λόγω της διαμέρισης του πίνακα $\left[A | I \right]$.

σχέσεις $\tau^k B^k \tilde{u}_j^k = \tau^k \tilde{a}_j^k \; B^k \tilde{x}_B^k = b^k$ θα έχουμε ότι

$$B^k\left(\tilde{x}_B^k - \tau^k \tilde{u}_j^k\right) + \tau^k \tilde{a}_j^k = b^k \Leftrightarrow$$

$$\left(\tilde{x}_1^k - \tau^k \tilde{u}_{1j}^k\right)\tilde{a}_1^k + \left(\tilde{x}_2^k - \tau^k \tilde{u}_{2j}^k\right)\tilde{a}_2^k + \ldots\ldots + \left(\tilde{x}_m^k - \tau^k \tilde{u}_{mj}^k\right)\tilde{a}_m^k + \tau^k \tilde{a}_j^k = b^k$$

Θα πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι η λύση αυτή είναι μη βασική καθώς περιλαμβάνει m+1 μεταβλητές δηλαδή τις τρέχουσες m και την εισερχόμενη μεταβλητή $x_j^k = \tau^k$. Άρα θα πρέπει να βρούμε τ^k τέτοιο ώστε μια από τις τρέχουσες βασικές μεταβλητές να λαμβάνει μηδενική τιμή στην νέα λύση. Επιπλέον για να είναι και εφικτή η συγκεκριμένη λύση θα πρέπει $x_m^k - \tau^k u_{mj}^k \geq 0$. Η περίπτωση όπου η παραπάνω συνθήκη παραβιάζεται είναι όταν $u_{mj}^k > 0$ ενώ στην αντίθετη περίπτωση ο εφικτός χώρος είναι μη φραγμένος. Μάλιστα σε μη φραγμένο εφικτό χώρο η λύση δύναται να είναι μη φραγμένη. Η σχέση που καθιστά την νέα λύση βασική και εφικτή δίνεται ως εξής: $\tau^k = \min\left(x_i^k / u_{ij}^k , u_{ij}^k > 0 \right)$.

Η συγκεκριμένη λύση προκύπτει εάν εξετάσουμε τα θετικά u_{ij}^k και ισχύουν οι περιορισμοί $\dfrac{x_m^k}{u_{ij}^k} \geq \tau^k, u_{ij}^k > 0$. Προφανώς θα πρέπει να συναληθεύουν οπότε $\tau^k = \min\left(x_i^k / u_{ij}^k , u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ x_i^k / u_{rj}^k , u_{rj}^k > 0 \right\}$[4]. Άρα η νέα βασική λύση x_r^k παίρνει την τιμή μηδέν γιατί $\tilde{x}_r^k - \tau^k \tilde{u}_{rj}^k = \tilde{x}_r^k - \dfrac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{rj}^k = 0$. Συνεπώς το σημείο

[4] Ο δείκτης r αναφέρεται στην βασική μεταβλητή με τον ελάχιστο των λόγων.

$\left(\tilde{x}_1^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{1j}^k\right), \left(\tilde{x}_2^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{2j}^k\right), \ldots\ldots, \left(\tilde{x}_m^k - \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}\tilde{u}_{mj}^k\right), \ldots 0, \ldots, \frac{\tilde{x}_r^k}{\tilde{u}_{rj}^k}, 0, \ldots)$ έχει τουλάχιστον n-μηδενικά στοιχεία.

Κριτήριο Εφικτότητας:

Το κριτήριο $\tau^k = \min\left(x_i^k \big/ u_{ij}^k, u_{ij}^k > 0\right) = \left\{x_i^k \big/ u_{rj}^k, u_{rj}^k > 0\right\}$ καλείται κριτήριο εφεκτικότητας και προσδιορίζει την τιμή της τ^k η οποία θα μηδενίζει την βασική μεταβλητή και θα δίνει ενδεχομένως μια μη μηδενική τιμή στην μη βασική μεταβλητή.

Παρατηρήσεις:

1. Στην περίπτωση όπου η τ^k με την τιμή που παίρνει μηδενίζει δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές ονομάζεται δεσμός.

2. Εάν σε μία κορυφή μα ή περισσότερες βασικές μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν τότε αυτή η βασική λύση και κατ' επέκταση η κορυφή ονομάζεται εκφυλισμένη.

3. Εάν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν για το ίδιο τ^k τότε βγάζουμε μια από τις δύο βασικές μεταβλητές και η κορυφή μας έχει μια βασική μεταβλητή ίση με το μηδέν δηλαδή είναι εκφυλισμένη.

4. Το τ^k μπορεί να ισούται με το μηδέν όταν κάποια βασική μεταβλητή ισούται με το μηδέν και το αντίστοιχο $u_{ij}^k > 0$

Υπολογισμός Βέλτιστης λύσης

Ο υπολογισμός της βέλτιστης λύσης γίνεται ως εξής:

$z^k = (c)^t \tilde{x}^k \Leftrightarrow \left[\left(c_B^K\right)^t \middle| \left(c_E^K\right)^t \right] \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \left(c_B^K\right)^t x_B^k = c_B^K \left(B_k\right)^{-1} b^k$. Εάν τώρα εισάγουμε στην βάση την μεταβλητή που αντιστοιχεί στη θέση a_{ij} θα έχουμε ότι

$$z^{k+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i^k \left(x_i^k + \tau^k u_{ij}^k\right) + c_j^k \tau^k = \sum_{i=1}^{m} c_i^k x_i^k + \sum_{i=1}^{m} \tau^k c_i^k x_i^k + b^k c_j^k =$$
$$= z^k - \tau^k \left[\left(c_B^k\right)^t u_{ij}^k - c_j^k \right] \Leftrightarrow$$
$$z^{k+1} = z^k - \tau^k \left[s_j^k - c_j^k \right]$$

Το κριτήριο αριστότητας όπως προκύπτει από τα παραπάνω δίνεται από την τελευταία σχέση $z^{k+1} = z^k - \tau^k \left[s_j^k - c_j^k \right]$.

Παρατηρήσεις:

1. Εάν $s_j^k - c_j^k \geq 0$ τότε η τρέχουσα κορυφή είναι βέλτιστη.

2. Κάνομε την υπόθεση ότι υπάρχει μια βασική μεταβλητή τέτοια ώστε $u_{ij}^k \leq 0$. Τότε ο χώρος είναι μη φραγμένος και για αυτή την βασική μεταβλητή έστω ότι το αντίστοιχο $s_j^k - c_j^k < 0$. Τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ***απειρίζεται.***

3. Για μια εκφυλισμένη κορυφή το $\tau^k = 0$ και ενδέχεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι η ίδια. Τότε έχουμε το φαινόμενο της ***ανακύκλωσης*** και η τεχνική Simplex μας παρέχει τις ίδιες κορυφές.

4. Για να έχουμε μα ***εναλλακτική βέλτιστη λύση*** εξετάζουμε κατά πόσον υπάρχουν μη βασικές μεταβλητές τέτοιες ώστε να δίνουν $s_j^k - c_j^k = 0$ ενώ για τις υπόλοιπες μεταβλητές ισχύει $s_j^k - c_j^k > 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Ας προχωρήσουμε τώρα στην αναλυτική επίλυση του παρακάτω παραδείγματος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
&s.t \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10 \\
&\qquad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 15 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

1. Κάτω από τις μη βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3 οι οποίες ονομάζονται και μη βασικές μεταβλητές είναι οι συντελεστές των μεταβλητών αυτών όπως δίνονται από τους περιορισμούς $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10$ και $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 15$. Εν συνεχεία παραθέτω και τις περιθώριες μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν στον μοναδιαίο πίνακα $\begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ και θα έχουν την προηγούμενη μορφή. Άρα μετά την προσθήκη των περιθωρίων μεταβλητών οι οποίες και βρίσκονται σε πλήρη ταύτιση με τον αριθμό των περιορισμών το π.γ.π διαμορφώνεται ως εξής:

$$
\begin{array}{llr}
\max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & (1) \\
s.t \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & =10 & (2) \\
\quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + \quad + x_5 & = 15 & (3) \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & (4)
\end{array}
$$

2. Η στήλη κάτω από το b συμπληρώνεται από την τιμή (-ες) των περιορισμών (1) και (2). Επειδή στον περιορισμό (1) έχουμε προσθέσει την περιθώρια μεταβλητή x_4 σε αυτήν την μεταβλητή και κάτω από το b θα βάζουμε την αντίστοιχη τιμή του περιορισμού. Ομοίως για τον περιορισμό (2) στον οποίο έχει εισέρθει ως περιθώρια η μεταβλητή x_5 θα αντιστοιχίσουμε την τιμή του περιορισμού δηλαδή το 15. Άρα η στήλη θα διαμορφωθεί ως εξής: $\begin{array}{c} \text{b} \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \end{array}$.

3. Η γραμμή πάνω από τις βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 συμπληρώνεται από τους αντίστοιχους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτοί παρουσιάζονται στην αντικειμενική συνάρτηση $\max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Συνεπώς θα έχουμε το πρώτο Tableau ως εξής:

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ

x_4	0	10	1	**2**	2	1	0	5
x_5	0	15	2	**4**	3	0	1	3,75
	z	$s_j - c_j$	3	**5**	2	0	0	

Αρχικά και όπως ήδη γνωρίζουμε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδέν. Η γραμμή δεξιά του $s_j - c_j$

συμπληρώνεται με βάση τον παρακάτω τύπο $s_j - c_j = c_B^T u_j - c_j = c_B^T B^{-1} a_j - c_j$.

Δηλαδή για το στοιχείο της γραμμής $s_j - c_j$ το οποίο βρίσκεται κάτω από την μεταβλητή x_1 πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο του c_B με το αντίστοιχο στοιχείο του x_1 και τα αποτελέσματα τα προσθέτουμε μεταξύ τους. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα το αφαιρούμε από τον αριθμό που βρίσκεται πάνω από την αντίστοιχη μεταβλητή x_1.Όμοια συμπληρώνονται και τα υπόλοιπα στοιχεία που ανήκουν στην γραμμή $s_j - c_j$.Από όλα τα ευρισκόμενα στοιχεία επιλέγουμε αυτό με την μεγαλύτερη θετική τιμή. Εάν κατά τους υπολογισμούς μας όλα τα στοιχεία που ανήκουν στην συγκεκριμένη γραμμή είναι μηδενικά ή και μικρότερα του μηδενός τότε έχουμε υπολογίσει της βέλτιστη κορυφή τις οποίας οι συντεταγμένες θα δίνονται από τα στοιχεία του c_B.

Η στήλη κάτω από το θ συμπληρώνεται ως εξής: Είδαμε ότι το στοιχείο της γραμμής με την τιμή 5 είναι το στοιχείο που επιλεγούμε. Αυτό αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_2. Η πρώτη τιμή που βρίσκεται κάτω από το θ προκύπτει από την πρώτη τιμή που βρίσκεται κάτω από το b εάν την διαιρέσω με τον πρώτο αριθμό που βρίσκεται κάτω από την μεταβλητή x_2. Ομοίως συνεχίζω με τις υπόλοιπες και επιλέγω την τιμή με την μικρότερη τιμή. Σε αυτή την φάση αντικαθιστούμε την μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο στοιχείο της γραμμής $s_j - c_j$ με την μεταβλητή που αντιστοιχεί στην μικρότερη τιμή της στήλης θ. Άρα θα αντικαταστήσουμε την μεταβλητή x_5 με την μεταβλητή x_2. Συνεπώς προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_4	0	2,5	**0**	0	0,5	1	-0,5	-
x_2	5	3,75	**0,5**	1	0,75	0	0,25	7,5
	z	$s_j - c_j$	**0,5**	0	-5,75	0	-1,25	

Συνεχίζουμε με την ίδια λογική έως ότου στην συγκεκριμένη γραμμή $s_j - c_j$ προκύψουν μηδενικές ή και αρνητικές τιμές. Στην συνέχεια ακολουθούν ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Στην περίπτωση όπου σε ένα Simplex tableau όλοι οι λόγοι θ που υπολογίζουμε για να εκτιμήσουμε το ποια μεταβλητή θα εισέλθει είναι αρνητικοί τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Η τιμή που θα υπολογίσουμε για την αντικειμενική μας συνάρτηση θα τείνει στο άπειρο και το πρόβλημα μας χαρακτηρίζεται ως μη φραγμένο.

Παράδειγμα

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{aligned}
&\min z = x_1 + x_2 - x_3 && (1)\\
&s.t \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 && (2)\\
&\quad\quad -x_1 - 7x_2 + 2x_3 \le 2 && (3)\\
&\quad\quad 7x_1 + x_2 - x_3 \le 10 && (4)\\
&\quad\quad 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 6 && (5)\\
&\quad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Το τελικό Taubleau είναι

		c_j	-1	**-1**	1	0	0	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_4	0	2,5	3/2	**-3/2**	0	1	1/2	0	0	-
x_3	1	3,75	-0,5	**-7/2**	1	0	1/2	0	0	7,5
x_6	0		13/2	**-5/2**	0	0	1/2	1	0	
x_7	0		3	**-1**	0	0	1	0	1	
	z	$s_j - c_j$	-0,5	**5/2**	0	0	-1/2	0	0	

Οι λόγοι θ είναι όλοι αρνητικοί συνεπώς καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μη φραγμένο.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Εάν κάποια βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε Z=0 τότε αύξηση της τιμής αυτής δεν αλλάζει την τιμή της αντικειμενικής της συνάρτησης. Υπό την προϋπόθεση μάλιστα ότι η λύση είναι μη εκφυλισμένη η εισαγωγή της μεταβλητής αυτής στην βάση θα μας οδηγήσει σε τιμή αντικειμενικούς συνάρτησης της ίδιας αξίας οπότε το πρόβλημα θα έχει άπειρες λύσεις. Οι άπειρες αυτές λύσεις δύναται να εμφανίζονται με την μορφή ενός γραμμικού συνδυασμού λύσεων.

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Σε ένα Simplex tableau όταν κάποια (-ες) από την τρέχουσα (-ες) βασική (-ες) λύσεις περιέχουν μεταβλητή με τιμή μηδέν τότε μπορούμε να μιλήσουμε για εκφυλισμένη λύση. Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να συνεχιστεί με την αντικατάσταση αυτής με μια αυθαίρετη και πάρα πολύ μικρή ποσότητα ε θετική μέχρι το τελικό tableau και θέτοντας στην άριστη λύση ε=0.

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			140	100	0	0	0	
Βάση	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

x_B								
	0	80	0	0	1	2	-4	
	140	90	1	0	0	3/4	-1/2	
	100	20	0	1	0	-1	1	

Το οποίο μετά τις ανάλογες πράξεις μετατρέπεται στο εξής βέλτιστο τελικό tableau

			140	100	0	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		80	0	0	1	2	-4	
		90	1	0	0	3/4	-1/2	
		20	0	1	0	-1	1	

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΜΗ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			140	100	0	0	0				
	Βάση	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			

	x_B										
	0	500	0	0.75	1	5	0			0	
	1	500	1	0.25	0	-5	0			0	
	M	**100**	**0**	**-0.2**	**0**	**0**	**-1**			**1**	

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η λύση μας περιλαμβάνει και τεχνητές μεταβλητές στην βάση. Αυτό ουσιαστικά δεν είναι δυνατό και έρχεται σε αντίφαση με τον ρόλο των τεχνητών μεταβλητών και συνεπώς η λύση μας χαρακτηρίζεται ως μη εφικτή.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ Μ

Η υλοποίηση και εφαρμογή της μεθόδου Simplex, αλλά και των Simplex tableau, απαιτεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού να είναι στην τυπική μορφή αλλά και την ύπαρξη του μοναδιαίου πίνακα μέσα από τις στήλες του πίνακα Α. Στην περίπτωση που δεν περιέχεται ο μοναδιαίος πίνακας μέσα στον πίνακα Α χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας. Η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών διευρύνει την εφικτή περιοχή του προβλήματος. Βλέπουμε ότι μια εφικτή λύση στο αναθεωρημένο πρόβλημα είναι εφικτή λύση και για το αρχικό πρόβλημα αν και μόνον αν οι τιμές όλων των τεχνητών μεταβλητών είναι μηδέν. Η Μ-μέθοδος εισάγει τις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή για κάθε μεταβλητή το $-M$, όπου M αυθαίρετα πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. Η λύση του αναθεωρημένου προβλήματος πρέπει να είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, όπου x οι λύσεις των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος και όπου 0 οι λύσεις των τεχνητών μεταβλητών οι οποίες πρέπει να είναι 0.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Μεγάλο μειονέκτημα της Μ-μεθόδου ο μη καθορισμός του πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το Μ, όταν χρησιμοποιούμε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επιλεγούμε το Μ αυθαίρετα μεγάλο το οποίο όμως μπορεί να προκαλέσει προβλήματα ακρίβειας στην υπολογιστική μηχανή (σφάλματα στρογγυλοποίησης). Τα προβλήματα αυτά μπορούμε να τα αποφύγουμε με την μέθοδο των 2 φάσεων. Στην πρώτη φάση εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές που χρειάζονται για να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας. Λύνουμε το βοηθητικό πρόβλημα $\min\left(\text{τεχνητές μεταβλητές}\right)$ το οποίο θέλουμε να έχει άριστη λύση μηδέν, δηλαδή, όλες οι τεχνητές να είναι μηδέν. Το σύνολο των άλλων μεταβλητών σε αυτή την περίπτωση αποτελούν βασική εφικτή λύση για το αρχικό πρόβλημα. Αν το βοηθητικό πρόβλημα έχει άριστη λύση θετική, τότε το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση. Στην δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας σαν αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος την άριστη λύση της $1_{ης}$ φάσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Δυική Θεωρία

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με εάν άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυικό (dual) ενώ το αρχικό πρωτεύον. Η δυική θεωρία παρέχει πληροφορίες κυρίως οικονομικής φύσεως ενώ είναι διαφωτιστική για την ανάλυση των επιπτώσεων της αλλαγής των παραμέτρων c_j, a_{ij}, b. Επίσης η άριστη λύση του δυικού είναι άρρηκτα δεμένη νε την λύση του πρωτεύοντος.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να θυμίσουμε ότι ένα π.γ.π είναι σε κανονική μορφή όταν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
2. Όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις της μορφής $\leq$
3. όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Σε ορισμένα εγχειρίδια χρησιμοποιείται ρητά ο όρος της ημικανονικής μορφής και την χρήσης του δυικού π.γ.π μέσω αυτής. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση της ημικανονικής μορφής η συνθήκη 3 αφαιρείται και δεν ισχύει.

Στην περίπτωση που οι παραπάνω συνθήκες δεν ισχύουν προχωρούμε μέσα από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού κανονικής μορφής. Οι μετασχηματισμοί αυτοί περιλαμβάνουν τα παρακάτω:

1. Την μετατροπή του προβλήματος μεγιστοποίησης σε ελαχιστοποίησης και αντίστροφα.
2. Την μετατροπή της ανισώσεις της μορφής $\geq$ με πολλαπλασιασμό της γραμμής της με (-1).

3. Την μετατροπή μιας αρνητικής μεταβλητής x_i και αντικατάστασης της μέσα από την $x_i^{'} = -x_i$.

4. Την μετατροπή μιας μεταβλητής ελευθέρου πρόσημου $x_i \in R$ όπως αποκαλείται μέσω της $x_i = x_i^{'} - x_i^{''}, x_i^{'}, x_i^{''} \geq 0$.

Αα θεωρήσουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την παρακάτω μορφή.

$$
\begin{array}{l}
\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
a_{11}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{1j}x_j + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n + \quad \ldots. \quad \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{2j}x_j + \quad \ldots \quad + a_{2n}x_n + \quad \ldots \quad \leq b_2 \\
\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \leq \ldots \\
a_{m1}x_1 + \quad \ldots \quad \ldots \quad + a_{mj}x_j \quad \ldots \quad + a_{mn}x_n + \quad \ldots \quad \leq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \\
c_j, b_i, a_{ij} \text{ (i=1,2,...,m, j=1,2,...,n)}
\end{array}
$$

Ή σε μορφή πινάκων: $\begin{array}{l} \pm \max c^{'}x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$ όπου

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & \ldots & a_{1n+m} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & \ldots & a_{2n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & \ldots & a_{m,n+m} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_j \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ένα π.γ.π θα μπορεί να μετατραπεί σε δυικό μέσω της διαδικασίας.

$$\pm \max c' x \quad (\text{Πρωτεύον}) \qquad\qquad \pm \min b' \mathrm{w} \quad (\text{Δυικό})$$

$$\begin{array}{lcl} Ax \le b & & A^T w \le c \\ x \ge 0 & \longrightarrow & w \ge 0 \end{array}$$

Σε ανοιγμένη τώρα μορφή το δυικό π.γ.π αποδίδεται ως εξής:

$$\begin{array}{l} \min y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + ... + b_n w_n \\ a_{11} w_1 + \ \ ... \ \ ... \ \ + a_{j1} w_j + \ \ ... \ \ + a_{m1} w_n + \ \ .... \ \ \le c_1 \\ a_{12} w_1 + \ \ ... \ \ ... \ \ + a_{j2} w_j + \ \ ... \ \ + a_{m2} w_n + \ \ ... \ \ \le c_2 \\ \quad ... \quad ... \ \ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \ \ \le ... \\ a_{1n} w_1 + \ \ ... \ \ ... \ \ + w_{jm} x_j \ \ ... \ \ + a_{mn} w_n + \ \ ... \ \ \le c_m \\ w_1, w_2, ..., w_n \ge 0, \end{array}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Μια δυική μεταβλητή ορίζεται για κάθε m περιορισμούς του πρωτεύοντος π.γ.π.

2. Ένας δυικό περιορισμός ορίζεται για κάθε n μεταβλητή του πρωτεύοντος π.γ.π.

3. Οι συντελεστές των μεταβλητών ενός δυικού προβλήματος ισούται με τους συντελεστές της συνδεόμενης μεταβλητής του πρωτεύοντος π.γ.π.

4. Οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυικού π.γ.π ταυτίζονται με τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος π.γ.π.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει σχηματικά το μετασχηματισμό του πρωτεύοντος σε δυικό καθώς και την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει σχηματικά το μετασχηματισμό του πρωτεύοντος σε δυικό καθώς και την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους.

ΠΡΩΤΕΥΟΝ Π.Γ.Π maximizeZ

ΔΥΙΚΟ Π.Γ.Π minimizeY

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
w_1 & a_{11}x_1 + & \dots & \dots & +a_{1j}x_j + & \dots & +a_{1n}x_n + & \dots. & \le b_1 \\
 & a_{21}x_1 + & \dots & \dots & +a_{2j}x_j + & \dots & +a_{2n}x_n + & \dots & \le b_2 \\
w_j & a_{j1}x_1 & \dots & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} & \dots & \le b_j \\
w_m & a_{m1}x_1 + & \dots & \dots & +a_{mj}x_j & \dots & +a_{mn}x_n + & \dots & \le b_m \\
 & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0,} \\
\hline
 & \ge c_1 & & & \ge c_j & & \ge c_n & &
\end{array}$$

j περιορισμός του δυικού π.γ.π

j περιορισμός του πρωτεύοντος π.γ.π

Αναλυτικότερα η σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε δυικό και πρωτεύον φαίνεται παρακάτω:

ΠΡΩΤΕΥΟΝ	ΔΥΙΚΟ
Πρόβλημα μεγιστοποίησης	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμός τύπου $i \ \ge$	Μεταβλητή $u_i \le 0$
Περιορισμός τύπου $i \ \le$	Μεταβλητή $u_i \ge 0$
Περιορισμός τύπου $i =$	Μεταβλητή u_i χωρίς περιορισμό
Μεταβλητή $x_j \ge 0$	Περιορισμός τύπου j $\ge$
Μεταβλητή $x_j \le 0$	Περιορισμός τύπου j $\le$
Μεταβλητή x_j χωρίς περιορισμό	Περιορισμός τύπου j =
Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης	Συντελεστής δεύτερου μέλους

Συντελεστής δεύτερου μέλους	Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης

Ορισμός: Ένας περιορισμός π.γ.π χαρακτηρίζεται ως δεσμευτικός-αποτελεσματικός αν και μόνο εάν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση καλείται χαλαρός.

Έστω x^* η βέλτιστη λύση ενός π.γ.π και w^* του δυικού του.

1. Οι μεταβλητές του ενός π.γ.π που αντιστοιχούν σε χαλαρούς περιορισμούς του άλλου είναι μη βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.
2. Οι μεταβλητές του ενός π.γ.π που αντιστοιχούν σε αποτελεσματικούς περιορισμούς του άλλου είναι βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.
3. Εάν σε κάποιο δεσμευτικό περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί δυική μεταβλητή με τιμή μηδέν στην βέλτιστη λύση του δυικού τότε το πρωτεύον π.γ.π έχει άπειρες λύσεις.

Οικονομική Ερμηνεία του δυικού προβλήματος

Γενικότερα θα λέγαμε ότι τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με προβλήματα κατανομής περιορισμού αριθμού πόρων σε διαφορετικές εναλλακτικές και ανταγωνιστικές δραστηριότητες. Εάν a_{ij} είναι η ποσότητα του πόρου i για την παραγωγή j μονάδων, c_j η αύξηση στο μέτρο αποδοτικότητας ζ από την αύξηση κατά μία μονάδα της x_j τότε

1. Το $\sum a_{ij}x_j$ των περιορισμών (αριστερό μέλος) παριστάνει την συνολική ποσότητα πόρων που θα χρησιμοποιηθούν και θα είναι μικρότεροι των διαθέσιμων πόρων b_i.

2. Η αντικειμενική συνάρτηση παριστάνει το συνολικό κέρδος

Άρα το πρωτεύον π.γ.π μας δείχνει με ποιον τρόπο θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε

$$\begin{array}{l} \pm\max\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}} \\ s.t\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\text{πόρος}_{\text{i}}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \pm\max\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}} \equiv \text{αξία} \\ s.t\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\text{πόρος}_{\text{i}}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{προιόν}_{\text{j}} \equiv \text{πόρος} \end{array}$$

Τι ουσιαστικά μας δείχνει το δυικό;

Το δυικό

$$\begin{array}{l} \pm\max\sum_{j=1}^{n}\left(\text{πόρος}_{\text{i}}\right)\text{w}_{\text{i}} \\ s.t\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\text{πόρος}_{\text{i}}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)\text{w}_{\text{i}} \geq \left(\dfrac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right) \end{array} \longrightarrow \quad w_i \equiv \left(\dfrac{\text{αξία}}{\text{προιόν}_{\text{j}}}\right)$$

Ιδιότητες του Δυικού Προβλήματος γραμμικού Προγραμματισμού

Θεώρημα1

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού τότε $c'x \leq b'w$ (ασθενής δυικότητα)

Απόδειξη

Εάν πολλαπλασιάσουμε τον i-περιορισμό του πρωτεύοντος προβλήματος επί $w_i \geq 0$ δηλαδή $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$ και αντίστοιχα τον j-περιορισμό του δυικού προβλήματος με $x_j \geq 0$ δηλαδή έχοντας $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} c_j x_j$ και συνδυάσουμε τις σχέσεις που έχουμε θα δούμε ότι

$$c'x = \sum_{i=1}^{m} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_i a_{ij} x \leq \sum_{i=1}^{m} b_i w_i = b'w$$

Θεώρημα 2

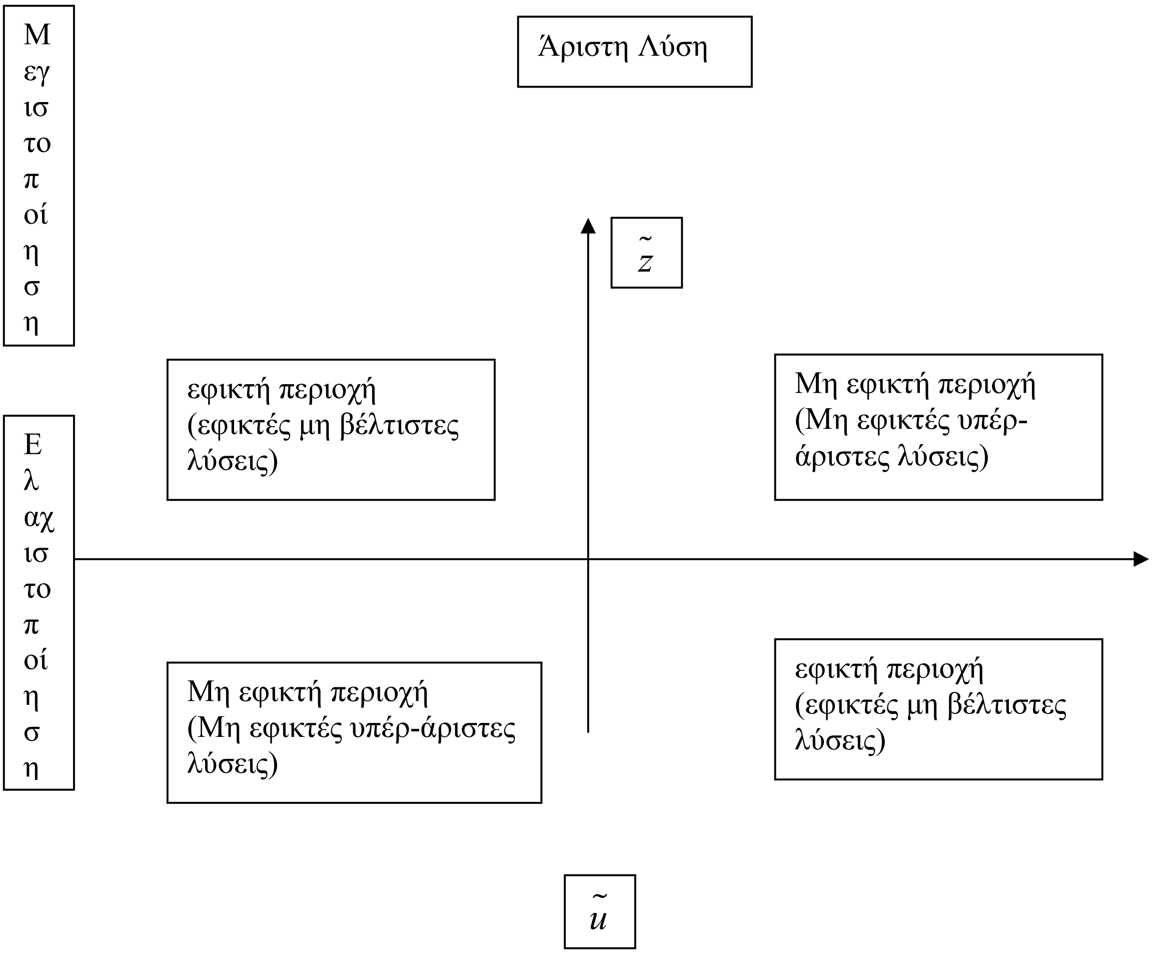
Εάν $\tilde{x}$ μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και $\hat{w}$ του δυικού έτσι ώστε $\hat{z} = c'\tilde{x} = b'\hat{w}$ τότε τα $\tilde{x}$ και $\hat{w}$ είναι άριστες λύσεις των Π και Δ αντίστοιχα

Απόδειξη

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού τότε θα έχουμε ότι $c'x \leq b'\hat{w} = c'\tilde{x} = \max\{c'x : x,$ εφικτή λύση $\Pi\} \Rightarrow \tilde{x}$ 'αριστη λύση του Π και

$b'w \geq c'\tilde{x} = b'\hat{w} = \min\{c'x : x,$ εφικτή λύση $D\} \Rightarrow \hat{w}$ 'αριστη λύση του D

Επομένως μπορούμε να συνοψίσουμε αυτά που έχουμε αποδείξει στο παρακάτω διάγραμμα και να ισχυριστούμε ότι κάθε τιμή της Α.Σ του προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι άνω φράγμα της Α.Σ του προβλήματος μεγιστοποίησης και αντίστροφα. Οι άριστες αυτές λύσεις είναι τα καλύτερα φράγματα που υπάρχουν.



Θεώρημα 3

Εάν το πρωτεύον π.γ.π είναι μη φραγμένο τότε το δυικό του δεν έχει εφικτές λύσεις.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ως G_x το σύνολο των εφικτών λύσεων του πρωτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού και G_w του δυικού του και έχοντας ότι το πρωτεύον πρόβλημα είναι μη φραγμένο δηλαδή $\max\{c'x : x \in G_x\} = \infty$. Εάν υποθέσουμε ότι το δυικό πρόβλημα έχει μια λύση εφικτή w τότε από το θεώρημα 2 θα ισχύει ότι $b^{'}w \geq c^{'}x$ και με βάση το γεγονός ότι $\max\{c^{'}x : x \in G_x\} = \infty$ θα έχουμε ότι $b^{'}w = \infty$ που είναι όμως άτοπο.

(*Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα*).

Θεώρημα 4

Εάν το δυικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις τότε το πρωτεύον είτε δεν έχει εφικτές λύσεις είτε είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα Δυισμού

Εάν το πρωτεύον π.γ.π έχει άριστη λύση τότε το δυικό του έχει άριστη λύση και μάλιστα οι τιμές των αντικειμενικών του συναρτήσεων είναι ίσες. (Gale, Kuhn and Tucker, 1950).

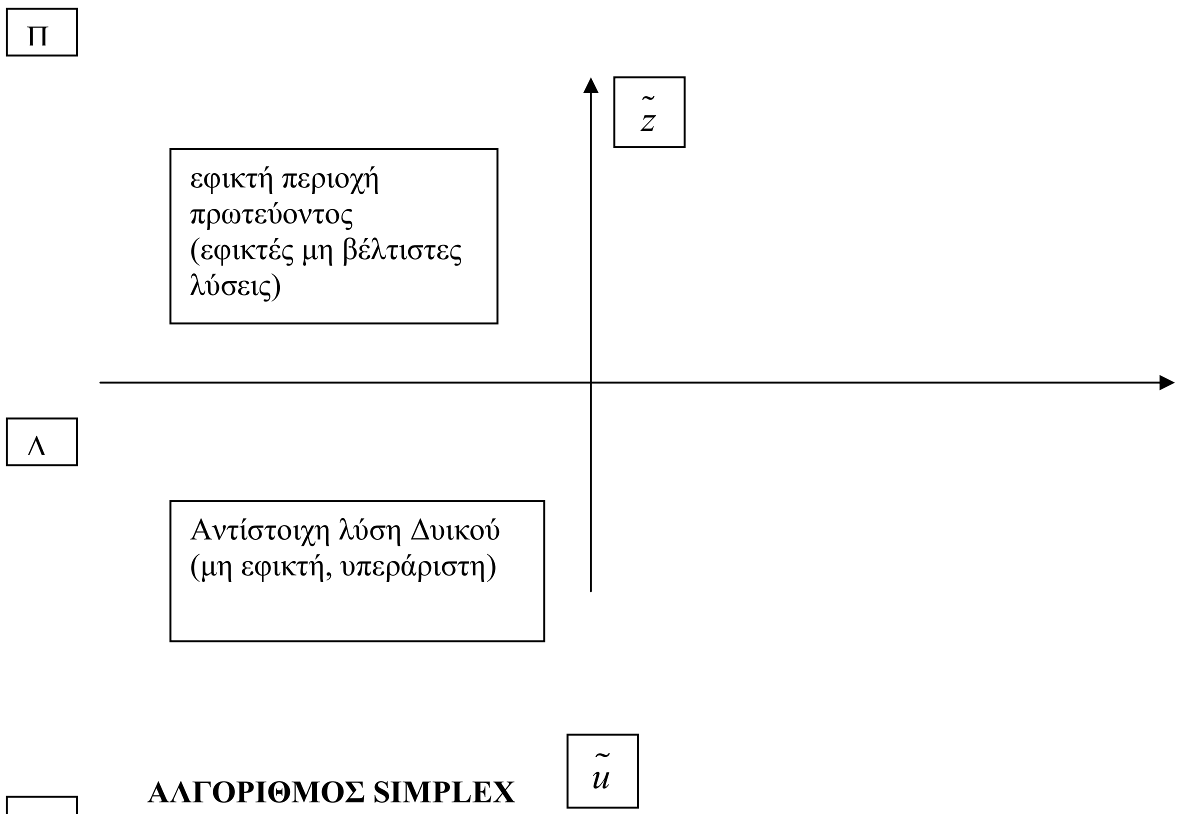
Για παράδειγμα έως θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με άριστη λύση $x = (1/5, 0, 21/5, 9/5)$. Να υπολογίσουμε την λύση του δυικού του προβλήματος.

ΔΥΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

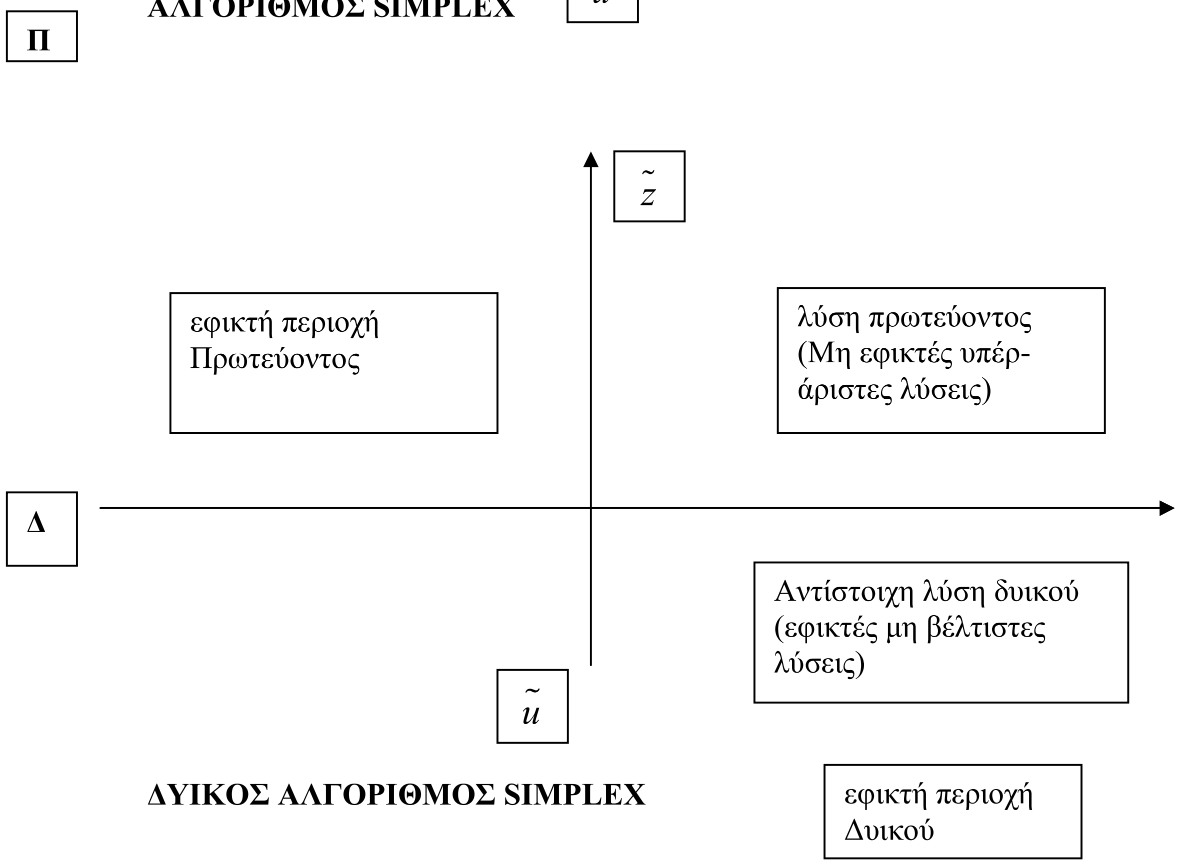
Τα δύο προβλήματα το δυικό αλλά και το πρωτεύον ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού μπορούν αν επιλυθούν με την μέθοδο SIMPLEX όπως αυτή έχει αναπτυχθεί στο παρόν μάθημα. Μάλιστα επειδή στο τελικό Tableau των λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού περιέχεται και η λύση του άλλου προβλήματος συνηθίζεται να επιλύετε όποιο πρόβλημα φαίνεται να έχει την ευκολότερη λύση. Επιπρόσθετα θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι κάθε βήμα στην διαδικασία Simplex συνδέεται με ένα ανάλογο βήμα στην επίλυση του αντίστοιχου δυικού προβλήματος δηλαδή επιφέρει και την λύση του άλλου στην δική του διάσταση.

Η γενική ιδέα της μεθόδου SIMPLEX υποστηρίζει ότι αρχίζουμε με μία βάσει λύση του πρωτεύοντος π.γ.π η οποία παρεμπιπτόντως αντιστοιχεί σε μια βασική μη εφικτή λύση του δυικού. Με βάση την συγκεκριμένη τεχνική βελτιώνουμε βαθμιδόν την λύση αυτή διατηρώντας την εφικτότητα στο πρωτεύον και φτάνουμε στη άριστη λύση όταν επιτύχει εφικτότητα και στο δυικό. Στην δυική μέθοδο SIMPLEX αρχίζουμε με μια βασική μη εφικτή λύση του πρωτεύοντος π.γ.π (υπεράριστη λύση) και συνεπώς η αντίστοιχη δυική είναι εφικτή. Η πρώτη βασική λύση εφικτή για το πρωτεύον είναι η άριστη του.

Συνεπώς η δυική μέθοδος SIMPLEX επιλύει το δυικό πρόβλημα πάνω στα tableau του πρωτεύοντος και μετακινούμαστε από μια βασική εφικτή λύση του δυικού σε μία καλύτερη βασική εφικτή λύση.



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX



ΔΥΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Θεώρημα 5

Έστω $w' = c'B^{-1}$. Εάν $z_i - c_i \geq 0, \forall i$ η λύση w είναι μια βασική εφικτή λύση του δυικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Παράδειγμα

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ & 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{aligned}$$

με άριστη λύση $\tilde{x} = [1/5, 0, 21/5, 9/5]$. Ποια η άριστη λύση του δυικού;

Λύση

Το δυικό πρόβλημα έχει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} \min y &= 8w_1 + 6w_2 + 3w_3 \\ s.t \quad & w_1 \geq 2 \\ & 2\mathrm{w}_1 + w_3 \geq -3 \\ & \mathrm{w}_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\ & 2\mathrm{w}_1 + w_2 - 3w_3 \geq 2 \end{aligned}$$

. Η ‘άριστη λύση του δυικού προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} & w_1 = 2 \\ & \mathrm{w}_1 + w_2 + 2w_3 = 1 \\ & 2\mathrm{w}_1 + w_2 - 3w_3 = 2 \end{aligned}$$

οπότε $w = [2, -7/5, 1/5]$

Άσκηση

Εάν μια μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι ελεύθερη πρόσημου τότε ο αντίστοιχος δυικός μετασχηματισμός έχει την μορφή εξίσωσης

Πρωτεύον		**Δυικό**
max		min
≥ 0	➔	≥ 0
≤ 0		≤ 0
ελεύθερη προσήμου		=

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Πρωτεύον		**Δυικό**
max		min
≥ 0	➔	≥ 0
≤ 0		≤ 0
=		**ελεύθερη προσήμου**

Θεώρημα Συμπληρωματικού Περιθωρίου

Εάν στο ένα πρόβλημα ένας περιορισμός του είναι αδρανής η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου προβλήματος είναι μηδέν και επίσης εάν μια μεταβλητή είναι θετική τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ενεργός (έχει την μορφή εξίσωσης).

Άσκηση 1

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα
$$\begin{aligned}&\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3\\&x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5\\&2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

Οι μεταβλητές x_1, x_2 αντιστοιχούν σε ανισοτικό περιορισμός του τύπου $\ge$ άρα στο περιορισμό που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε $\ge$. Η μεταβλητή x_3 είναι ελεύθερη προσήμου και τότε στον περιορισμό που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε ισότητα. Το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα
$$\begin{aligned}&\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4\sigma_3 - 4\rho_3\\&x_1 + 2x_2 + \sigma_3 - \rho_3 \le 5\\&2x_1 - x_2 + 3\sigma_3 - 3\rho_3 \ge 2\\&-2x_1 + x_2 - 3\sigma_3 + 3\rho_3 \le -2\\&x_1, x_2, \sigma_3, \rho_3 \ge 0\end{aligned}$$

Θεώρημα: Μια εφικτή λύση του ενός προβλήματος θέτει ένα φράγμα στην βέλτιστη λύση του άλλου.

Θεώρημα: Έστω w^*, x^* δύο εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυικού προβλήματος για τις οποίες ισχύει y^*, z^*. Τότε οι λύσεις αυτές είναι αντίστοιχα βέλτιστες και για τα δύο προβλήματα.

Άσκηση 2

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 - x_2 - 30x_3 + 11x_4 + 2x_5 - 3x_6 \\
&-2x_1 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_6 + x_7 = 20 \\
&-4x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 - 3x_6 = 10 \\
&-5x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

με βέλτιστο tableau

1. Ποια η αρχική βάση;

2. Ποιος ο αντίστροφος πίνακας της βέλτιστης λύσης;

3. Ποιο το δυικό πρόβλημα

Λύση

Η αρχική βάση είναι η Ο αντίστροφος της βέλτιστης λύσης δίνεται ως

$$\left(B^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & -7/24 & 1/24 \\ -1/6 & 1/12 & 5/14 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Ενώ το δυικό δίνεται ως
$$\begin{aligned} &\max z = 4x_1 - x_2 - 30x_3 + 11x_4 + 2x_5 - 3x_6 \\ &-2x_1 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_6 + x_7 = 20 \\ &-4x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 - 3x_6 = 10 \\ &-5x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα
$$\begin{aligned} &\max z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le b_1 \\ &x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le b_2 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

με βέλτιστο tableau

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_1	5	30	1	b	2	1	0	
x_5	0	10	0	c	-8	-1	1	
	z		0	a	7	d	e	

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Η ανάλυση ευαισθησία μελετά την μεταβολή της άριστης λύσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού όταν αλλάξουν μερικά από τα αρχικά δεδομένα του. Πιο συγκεκριμένα έχει νόημα να εξετάζουμε ξεχωριστά τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Διαταραχή-Μεταβολή των συντελεστών κόστους c_j .
2. Διαταραχή-Μεταβολή των σταθερών όρων b_i .
3. Διαταραχή-Μεταβολή των συντελεστών του συστήματος τω περιορισμών a_{ij} .
4. Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών.
5. προσθήκη ή αφαίρεση περιορισμών.

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
&\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
&s.t \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\
&\qquad\quad\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad\quad\ x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

το οποίο κατά την λύση του παράγει το παρακάτω βέλτιστο tableau.

		c_j						

Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	12	8/5	0	**1**	-1/5	2/5	-1/5	
x_1	5	9/5	1	**0**	7/5	1/5	2/5	
	z		0	**0**	-3/5	**-29/5**	**-M-2/9**	

Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι ο αντίστροφος της βέλτιστης βάσης είναι αυτός που αρχικά ήταν ο μοναδιαίος πίνακας απο τα στοιχεία κατω απο τις μεταβλη΄τες x_4, x_5

$$\left(B^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Διαταραχή του σταθερού όρου c_B

Μια μεταβολή του c_B συνεπάγετια και μεταβολή της αριστότηας εάν θυμηθούμε ότι εισέρχεται στον τύπο $s_j - c_j = c_B^T B^{-1} a_j - c_j$. Η μεταβολή λοιπον μας προσφέρει μια επιπλέον λορυφή η οποία είναι πιθανόν να μην είναι πλεον εφικτή και συνεπώς και βέλτιστη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια διαταραχή του διανύσματος κόστους $c_B = \left[c_1 = -2, c_2 = 4\right]$. Προφανώς με βάση την μέθοδο SIMPLEX θα πρέπει να προχωρήσουμε αφού αντικαταστήσουμε στο τελικό tableau τις τιμές των διανυσμάτων κόστους στον υπολογισμό των k_j's.

		c_j						
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	8/5	0	**1**	-1/5	2/5	-1/5	
x_1	-1	9/5	1	**0**	7/5	1/5	2/5	
	z		0	**0**	-3/5	**-29/5**	**-M-2/9**	

Στην περίπτωση όπου δεν έχουμε άριστη λύση προχωρούμε κανονικά στην επίλυς τους π.γ.π όπως γνωρίζουμε.

Διαταραχή του σταθερού όρου b_i

Ας θεωρήσουμε $\hat{b} = b + \delta_b$ που ικανοποιεί το κριτήριο της αριστότητας. Η συγκερκιμένη λύση θα πρέπει να είναι και εφικτή συνπώς θα πρέπει να ισχύει ότι $\hat{x}_B = B^{-1}b = B^{-1}b + B^{-1}\delta_b$. Αρα $\hat{x}_B = x_B + \sum_{i=1}^{m} \delta_b \beta_i$ καθώς

$$B^{-1} = \left[\beta_1, ..., \beta_i, ...\beta_m\right], \delta_b = \begin{bmatrix} \delta_{b_1} \\ \cdot \\ \delta_{bm} \end{bmatrix}.$$

Εάν τώρα γυρίσουμε στο παράδειγμα μας θα δούμε ότι αλλάζοντας την συνθήκη των διαθέσιμων πόρων κατά $b_i = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$ επιβάλλεται απο την πλευρά μας να υπολογίσουμε τις νέες τιμές $\bar{b}_i^* = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$ οπότε μπορούμε ν έχουμε και τις βασικές λύσεις $\hat{z} = \begin{bmatrix} 12/5 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} > 0$ και να ελέγχουμε εάν ιακνοποιύν τις ανάλογες συνθήκες.

Διαταραχή του σταθερού όρου a_{ij}

Στην περίπτωση αυτή αλλάζει ο πίνακας $A = a_{ij}$ των περιορισμών με αποτέλεσμα να υπεισέρχονται και αλλαγές στο βέλτιστο tableau.Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου προσθέτουμε δύο μεταβλητές με $c_6 = 3, c_7 = -4$ και αντίστοιχα διανύσματα $\bar{x}_6 = [4\ 1]', \bar{x}_7 = [0\ 3]'$.

Υπολογίζουμε τώρα

$$\bar{\bar{x}}_6 = B^{-1}\bar{x}_6 = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{x}}_7 = B^{-1}\bar{x}_7 = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

τις οποίες και προσθέτουμε στην βάση

		c_j								
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_2	4	8/5	0	**1**	-1/5	2/5	-1/5	7/5	-3/5	
x_1	-1	9/5	1	**0**	7/5	1/5	2/5	6/5	6/5	
	z									

Από αυτό το σημείο και μετά η διαδικασία είναι γνωστή.

Προσθήκη ή αφαίρεση μεταβλητών

Πρόκειται για ειδική περίπτωση της προηγούμενης μεταβολής. Θεωρητικά κάθε νέα μεταβλητή που εισάγεται σε ένα π.γ.π θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπήρχε και προηγούμενα στο αρχικό π.γ.π με όλους τους συντελεστές της ίσο με μηδέν. Ομοίως και κάθε μεταβλητή που αφαιρείται με την ίδια λογική θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι υπάρχει στο παρόν π.γ.π. Αρα για τις μή βασικές μεταβλητές διαγράφουμε την αντίστοιχη στήλη του tableau ενώ για τις βασικές πρέπει να βγάλουμε απο την βάση τις αντίστοιχε στήλες και μετά να τις διαγράψουμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γ. Σίσκος – Γραμμικός Προγραμματισμός, 2η έκδοση, Αθήνα 2000

Β. Κώστογλου – Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2003

Σ. Κουνιάς, Δ. Φακίνος – Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεσσαλονίκη 1988

Π. Μηλιώτης – Εισαγωγή στο Μαθηματικό Προγραμματισμό, Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα – Πειραιάς 1994

Γ. Αβδέλας, Θ. Σίμου - Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.

Βασιλείου Παναγιώτης - Χρήστος, Τσάντας Νίκος Ι (2000) Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα Εκδότης Ζήτη & Σια Ο.Ε.

ΠΑΠΑΡΡΙΖΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ (1999) ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Εκδόσεις ΖΥΓΟΣ .

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Leonard W. Swanson – Linear Programming: Basic Theory and Applications, 1980

D. Yudin, E. Golshtein – Linear Programming, Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1965.

Lieberman, H., 2005. Operations research (8^{th} edition). McGraw-Hill edition.

Gass, σ., (2010) Linear Programming: Methods and Applications: Fifth Edition

Varderbei (2011) Linear Programming: Foundations and extensions.Third Edition. Princeton University. http://www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/

Matousek, Jiri, Gärtner, (2007) Understanding and Using Linear Programming Springer.

ΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

http://www.informs.org/Resources/Courses/

http://www-classes.usc.edu/engr/ise/330/2003/

http://commerce.concordia.ca/bourjolly/lp.html

http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/

http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/ (Michael Trick)

http://www.lehigh.edu/~tkr2/teaching/

http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/(P.Jensen)

http://www.brunel.ac.uk/depts/ma/research/jeb/or/contents.html
(J.E. Beasley)

http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/

http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/ (NEOS)

http://mathworld.wolfram.com/