ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

ΔΙΑΛΕΞΗ 6η-Η ΔΥΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με εάν άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυικό (dual) ενώ το αρχικό πρωτεύον. Η δυική θεωρία παρέχει πληροφορίες κυρίως οικονομικής φύσεως ενώ είναι διαφωτιστική για την ανάλυση των επιπτώσεων της αλλαγής των παραμέτρων c_j, a_{ij}, b .
Επίσης η άριστη λύση του δυικού είναι άρρηκτα δεμένη με την λύση του πρωτεύοντος.

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ

Σε ορισμένα εγχειρίδια χρησιμοποιείται ρητά ο όρος της ημικανονικής μορφής και την χρήσης του δυικού π.γ.π μέσω αυτής. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση της ημικανονικής μορφής η συνθήκη ότι όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές αφαιρείται και δεν ισχύει.

Πρόταση: Το δυικό π.γ. του δυικού είναι το πρωτεύον.

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ

Ας θεωρήσουμε το π.γ.π με την παρακάτω μορφή.

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{1j}x_j + & \ldots & + a_{1n}x_n + & \ldots. & \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{2j}x_j + & \ldots & + a_{2n}x_n + & \ldots & \leq b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \leq \ldots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{mj}x_j & \ldots & + a_{mn}x_n + & \ldots & \leq b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0,$$

$$c_j, b_i, a_{ij} \quad (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m},\ \mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

$$\pm \max c' x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Μορφή Πινάκων

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ

Μέσω της παρακάτω διαδικασίας μπορούμε το π.γ.π να το μετατρέψουμε σε δυικό:

$$\begin{array}{lcl} \pm \max c' x \quad (\text{Πρωτεύον}) & & \pm \min b' w \quad (\text{Δυικό}) \\ A x \leq b & \longrightarrow & A^T w \leq c \\ x \geq 0 & & w \geq 0 \end{array}$$

$$\min y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_m w_n$$

$$\begin{array}{llllllllll} a_{11} w_1 + & \ldots & \ldots & + a_{j1} w_j + & \ldots & + a_{m1} w_n + & & \ldots. & \leq & c_1 \\ a_{12} w_1 + & \ldots & \ldots & + a_{j2} w_j + & \ldots & + a_{m2} w_n + & & \ldots & \leq & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \leq & \ldots \\ a_{1n} w_1 + & \ldots & \ldots & + w_{jm} x_j & \ldots & + a_{mn} w_n + & & \ldots & \leq & c_m \end{array}$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0,$$

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ

Δηλαδή έχουν πραγματοποιηθεί τα παρακάτω:

- Μια δυική μεταβλητή ορίζεται για κάθε m περιορισμούς του πρωτεύοντος π.γ.π.
- Ένας δυικός περιορισμός ορίζεται για κάθε n μεταβλητή του πρωτεύοντος π.γ.π.
- Οι συντελεστές των μεταβλητών ενός δυικού προβλήματος ισούται με τους συντελεστές της συνδεόμενης μεταβλητής του πρωτεύοντος π.γ.π.
- Οι αντικειμενικοί συντελεστές του δυικού π.γ.π ταυτίζονται με τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος π.γ.π.

ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ

Σχηματικά:

ΠΡΩΤΕΥΟΝ Π.Γ.Π maximizeZ

ΔΥΙΚΟ Π.Γ.Π minimizeY

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1 + & \dots & \dots & + a_{1j}x_j + & \dots & + a_{1n}x_n + & \dots. & \le b_1 \\
a_{21}x_1 + & \dots & \dots & + a_{2j}x_j + & \dots & + a_{2n}x_n + & \dots & \le b_2 \\
a_{j1}x_1 & \dots & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} & \dots & \le b_j \\
a_{m1}x_1 + & \dots & \dots & + a_{mj}x_j & \dots & + a_{mn}x_n + & \dots & \le b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0, & & & & & & &
\end{array}$$

w_1

w_j

w_m

$$\ge c_1 \qquad \ge c_j \qquad \ge c_n$$

j περιορισμός του δυικού π.γ.π

j περιορισμός του πρωτεύοντος π.γ.π

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΤΕΡΑ

ΠΡΩΤΕΥΟΝ	ΔΥΙΚΟ
Πρόβλημα μεγιστοποίησης	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμός τύπου i $\geq$	Μεταβλητή $u_i \leq 0$
Περιορισμός τύπου i $\leq$	Μεταβλητή $u_i \geq 0$
Περιορισμός τύπου i $=$	Μεταβλητή u_i χωρίς περιορισμό
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός τύπου j $\geq$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός τύπου j $\leq$
Μεταβλητή x_j χωρίς περιορισμό	Περιορισμός τύπου j $=$
Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης	Συντελεστής δεύτερου μέλους
Συντελεστής δεύτερου μέλους	Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ορισμός: Ένας περιορισμός π.γ.π χαρακτηρίζεται ως δεσμευτικός-αποτελεσματικός αν και μόνο εάν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση καλείται χαλαρός. Έστω x^* βέλτιστη λύση ενός π.γ.π και w^* του δυικού του. Τότε:

- Οι μεταβλητές του ενός π.γ.π που αντιστοιχούν σε χαλαρούς περιορισμούς του άλλου είναι μη βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.
- Οι μεταβλητές του ενός π.γ.π που αντιστοιχούν σε αποτελεσματικούς περιορισμούς του άλλου είναι βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.
- Εάν σε κάποιο δεσμευτικό περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί δυική μεταβλητή με τιμή μηδέν στην βέλτιστη λύση του δυικού τότε το πρωτεύον π.γ.π έχει άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να μετατραπεί στο δυικό του το παρακάτω π.γ.π:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
s.t \quad & x_1 \leq 8 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 18 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Απάντηση:

$$\min z = 8w_1 + 6w_2 + 15w_3 + 18w_4$$

$$s.t \qquad w_1 + w_3 + 2w_4 \geq 4$$

$$w_2 + 2w_3 + w_4 \geq 3$$

$$w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

	x_1	x_2		
w_1	1	0	$\leq$	8
w_2	0	1	$\leq$	6
w_3	1	2	$\leq$	15
w_4	2	1	$\leq$	18

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μόνοι σας!!!

$$\min z = 25x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + 6x_4 + 12x_5$$

$$s.t \quad 0.1x_1 + 0.05x_3 + x_5 = 0.084$$

$$0.8x_1 + 0.05x_2 + 0.06x_3 + 0.3x_4 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Παράδειγμα 3

Πρωτεύον πρόβλημα	Πρωτεύον πρόβλημα σε κανονική μορφή	Μεταβλητές δυϊκού
$\max z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3$	$\max z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 0x_4$	
Περιορισμοί:	**Περιορισμοί:**	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 11$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 6$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Παράδειγμα 4

Πρωτεύον πρόβλημα	Πρωτεύον πρόβλημα σε κανονική μορφή	Μεταβλητές δυϊκού
$\min z = 13x_1 + 9x_2$	$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
Περιορισμοί:	**Περιορισμοί:**	
$x_1 + 2x_2 \geq 2$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 2$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 8$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Παράδειγμα 5

Πρωτεύον πρόβλημα	Πρωτεύον πρόβλημα σε κανονική μορφή	Μεταβλητές δυϊκού
$\min z = 3x_1 + 2x_2$	Αντικαθιστώ $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ $\min z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
Περιορισμοί:	**Περιορισμοί:**	
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 5$	y_1
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$-x_1^+ + x_1^- + 5x_2 - x_3 = 3$	y_2
$4x_1 + 7x_2 \leq 9$	$4x_1^+ - 4x_1^- + 7x_2 + x_4 = 9$	y_3
x_1 χωρίς πρόσημο, $x_2 \geq 0$	$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Οικονομική Ερμηνεία Δυικού

Γενικότερα θα λέγαμε ότι τα π.γ.π ασχολούνται με προβλήματα κατανομής περιορισμού αριθμού πόρων σε διαφορετικές εναλλακτικές και ανταγωνιστικές δραστηριότητες. Εάν α είναι η ποσότητα του πόρου i για την παραγωγή j μονάδων, cj η αύξηση στο μέτρο αποδοτικότητας z από την αύξηση κατά μία μονάδα της τότε:

1. Η αντικειμενική συνάρτηση παριστάνει το συνολικό κέρδος

2. Το $\sum a_{ij} x_j$ των περιορισμών (αριστερό μέλος) παριστάνει την συνολική ποσότητα πόρων που θα χρησιμοποιηθούν και θα είναι μικρότεροι των διαθέσιμων πόρων b.

Οικονομική Ερμηνεία Δυικού

Σε κάθε π.γ.π μπορούμε να θεωρήσουμε τα εξής:

$x_j : \mu o \nu \acute{\alpha} \delta \varepsilon \varsigma$ προιόντος

$c_j : \alpha \xi \acute{\iota} \alpha$

$b_i : \mu o \nu \acute{\alpha} \delta \varepsilon \varsigma$ διαθέσιμου πόρου

$\mathrm{a}_{ij} : \chi \rho \eta \sigma \iota \mu o \pi o \iota o \acute{\upsilon} \mu \varepsilon \nu o \varsigma$ πόρος ανά μονάδα προιόντος

Συνεπώς:

Οικονομική Ερμηνεία Δυικού

Άρα το πρωτεύον π.γ.π μας δείχνει με ποιον τρόπο θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε

$$\pm \max \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right) \pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}$$

$$s.t \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\pi\acute{o}\rho o\varsigma_{\mathrm{i}}}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right) \pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}$$

$$\longrightarrow$$

$$\pm \max \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right) \pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}} \equiv \alpha\xi\acute{\iota}\alpha$$

$$s.t \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\pi\acute{o}\rho o\varsigma_{\mathrm{i}}}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right) \pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}} \equiv \pi\acute{o}\rho o\varsigma$$

Τι μας δείχνει το δυικό;

$$\pm \max \sum_{j=1}^{n} \left(\pi\acute{o}\rho o\varsigma_{\mathrm{i}} \right) \mathrm{w}_{\mathrm{i}}$$

$$s.t \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\pi\acute{o}\rho o\varsigma_{\mathrm{i}}}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right) \mathrm{w}_{\mathrm{i}} \geq \left(\frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right)$$

$$\longrightarrow$$

$$w_i \equiv \left(\frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\rho o\iota\acute{o}\nu_{\mathrm{j}}} \right)$$

Οικονομική Ερμηνεία Δυικού

"…… Σε ποιες τιμές πρέπει η επιχείρηση να αγοράσει τους πόρους (πρώτες ύλες) ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος αγοράς αλλά και να προσφέρει καλύτερες τιμές προϊόντων προκειμένου να έχει οικονομικό κίνητρο πώλησης των αποθεμάτων της;"

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΥΙΚΟΥ Π.Γ.Π

- **Θεώρημα 1**

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού τότε $c'x \leq b'w$ (ασθενής δυικότητα)

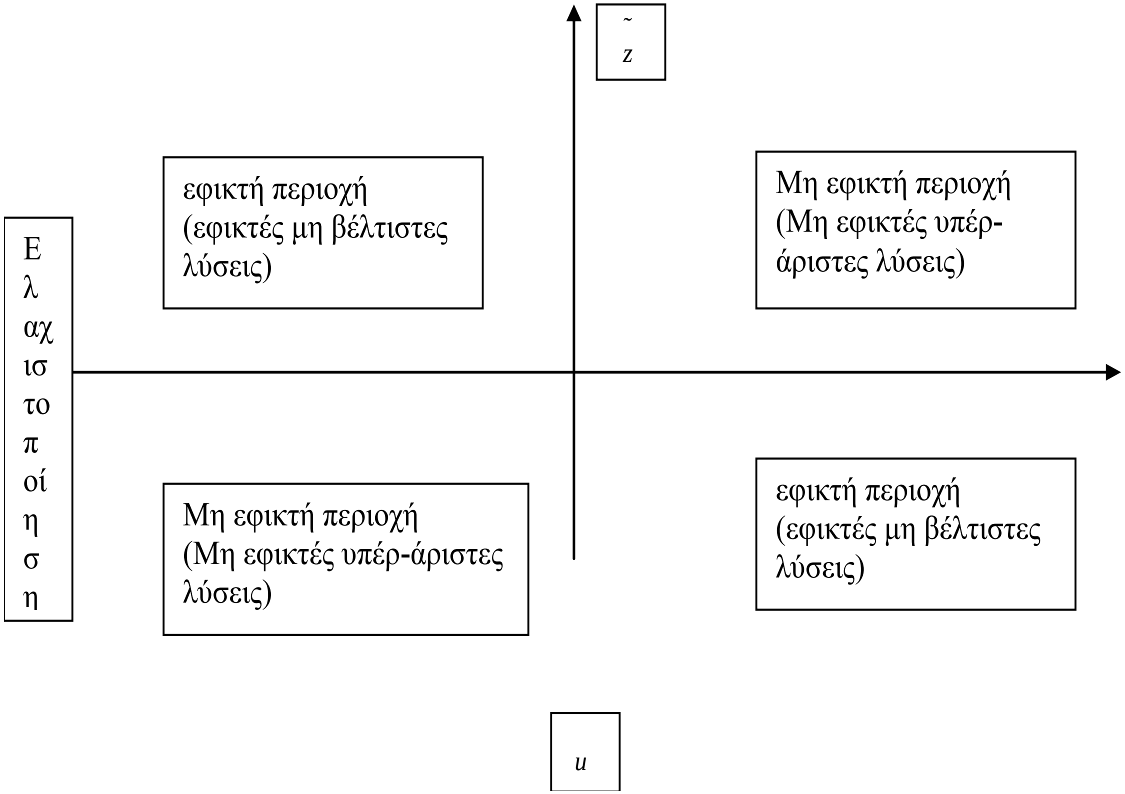
- **Θεώρημα 2**

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού έτσι ώστε $c'x = b'w$ τότε τα x και w είναι άριστες λύσεις των Π και Δ αντίστοιχα

- **Θεώρημα 3**

Εάν το πρωτεύον π.γ.π είναι μη φραγμένο τότε το δυικό του δεν έχει εφικτές λύσεις.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΥΙΚΟΥ Π.Γ.Π Θεώρημα 2



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΥΙΚΟΥ Π.Γ.Π

- **Θεώρημα** 4

Εάν το δυικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις τότε το πρωτεύον είτε δεν έχει εφικτές λύσεις είτε είναι μη φραγμένο.

- **Θεώρημα Δυισμού**

Εάν το πρωτεύον π.γ.π έχει άριστη λύση τότε το δυικό του έχει άριστη λύση και μάλιστα οι τιμές των αντικειμενικών του συναρτήσεων είναι ίσες. (Gale, Kuhn and Tucker, 1950).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΥΙΚΟΥ Π.Γ.Π

- **Θεώρημα 5**

Έστω $w' = c' B^{-1}$. Εάν $z_i - c_i \geq 0, \forall i$ η λύση w είναι μια βασική εφικτή λύση του δυικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

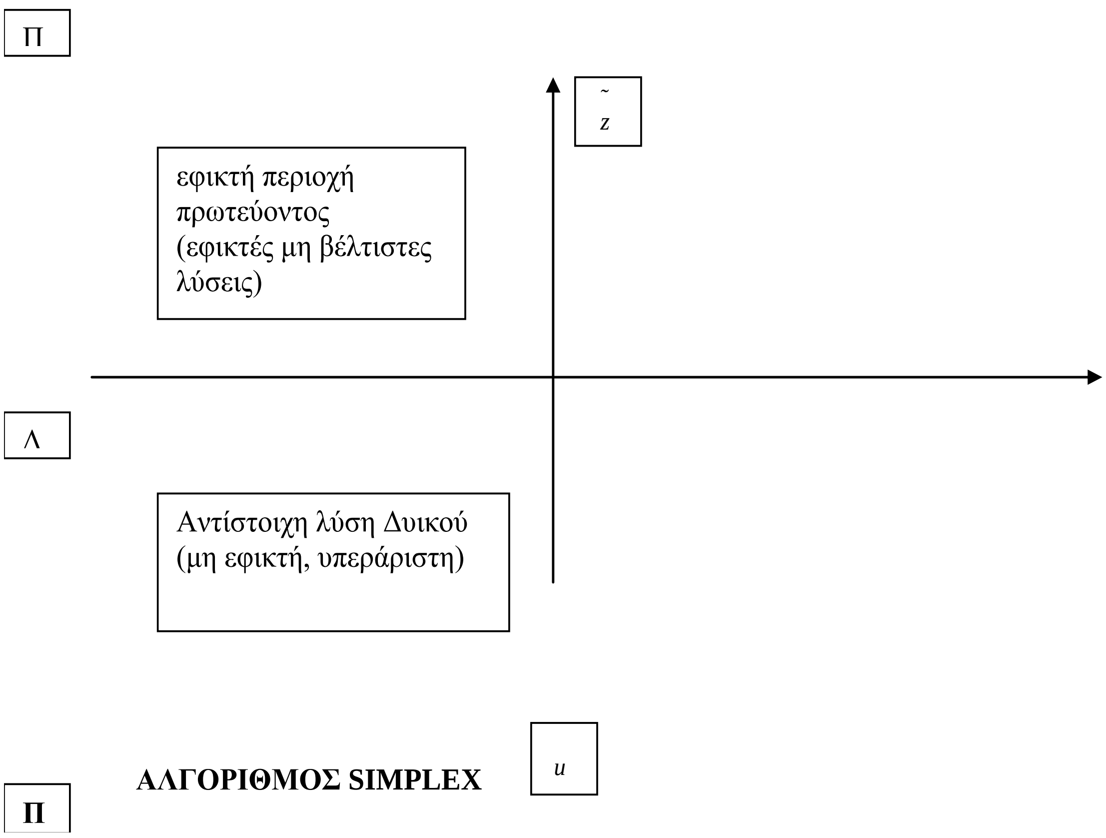
- **Θεώρημα Συμπληρωματικού Περιθωρίου**

Εάν στο ένα πρόβλημα ένας περιορισμός του είναι αδρανής η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου προβλήματος είναι μηδέν και επίσης εάν μια μεταβλητή είναι θετική τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ενεργός (έχει την μορφή εξίσωσης).

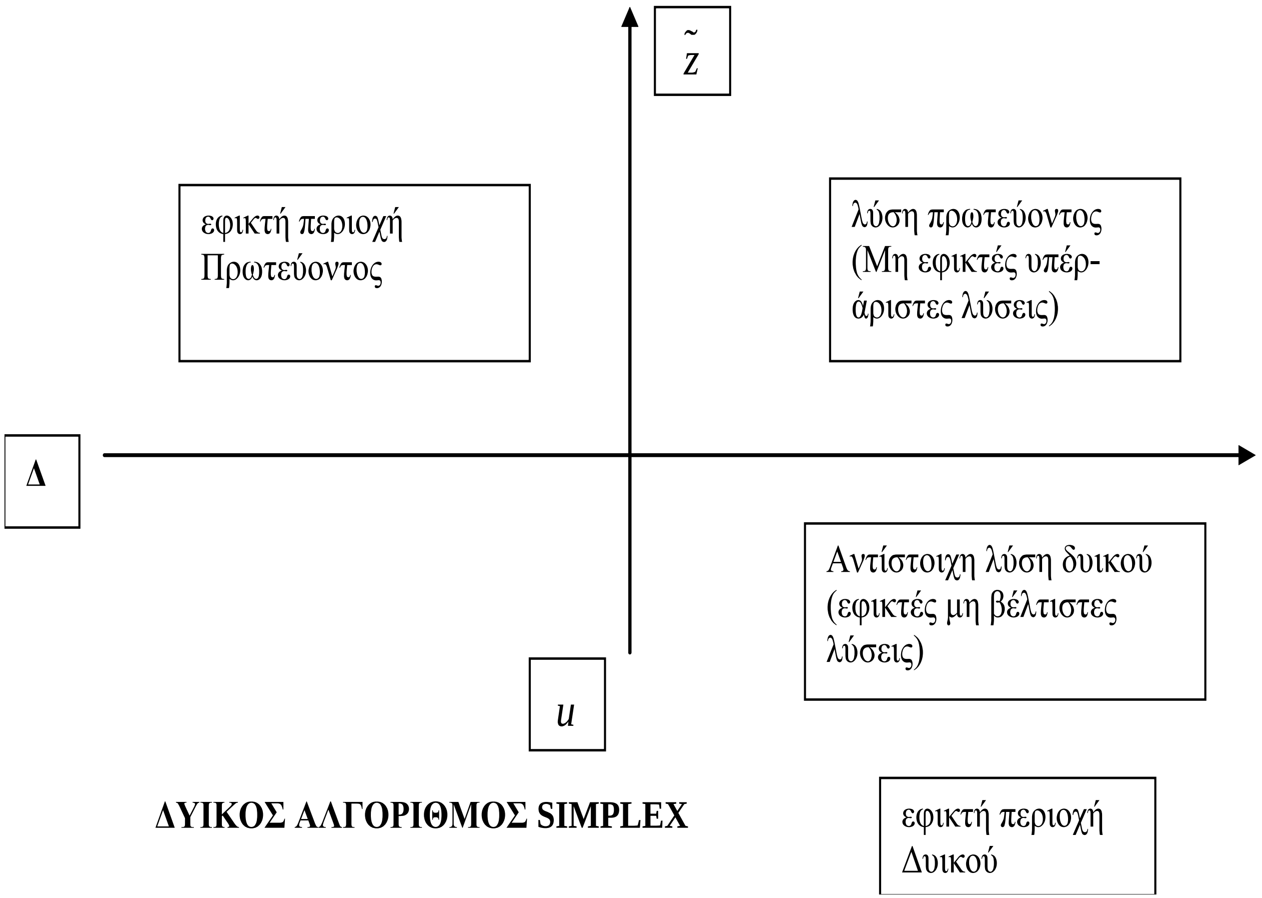
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΥΙΚΟΥ Π.Γ.Π

- **Θεώρημα 6:** Μια εφικτή λύση του ενός προβλήματος θέτει ένα φράγμα στην βέλτιστη λύση του άλλου.
- **Θεώρημα 7:** Έστω δύο w^*, x^* εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυικού προβλήματος για τις οποίες ισχύει . Τότε οι λύσεις αυτές είναι y^*, z^* αντίστοιχα βέλτιστες και για τα δύο προβλήματα.

ΓΡΑΦΙΚΑ


Π
z̃
εφικτή περιοχή πρωτεύοντος (εφικτές μη βέλτιστες λύσεις)
Λ
Αντίστοιχη λύση Δυικού (μη εφικτή, υπεράριστη)
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX
u
Π

ΓΡΑΦΙΚΑ



ΔΥΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Παράδειγμα

Εάν οι λύσεις του παρακάτω π.γ.π

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\
s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\
& x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\
& 2x_3 - 3x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Είναι $x = (1/5, 0, 21/5, 9/5)'$ να βρεθεί η άριστη λύση του δυικού του.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Τα δύο προβλήματα το δυικό αλλά και το πρωτεύον ως π.γ.π μπορούν αν επιλυθούν με την μέθοδο SIMPLEX. Μάλιστα επειδή στο τελικό Tableau των λύσεων ενός π.γ.π περιέχεται και η λύση του άλλου προβλήματος συνηθίζεται να επιλύετε όποιο πρόβλημα φαίνεται να έχει την ευκολότερη λύση. Επιπρόσθετα θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι κάθε βήμα στην διαδικασία Simplex συνδέεται με ένα ανάλογο βήμα στην επίλυση του αντίστοιχου δυικού προβλήματος δηλαδή επιφέρει και την λύση του άλλου στην δική του διάσταση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Η γενική ιδέα της SIMPLEX υποστηρίζει ότι αρχίζουμε με μία βάσει λύση του πρωτεύοντος π.γ.π η οποία παρεμπιπτόντως αντιστοιχεί σε μια βασική μη εφικτή λύση του δυικού. Συνεπώς βελτιώνουμε βαθμιδόν την λύση αυτή διατηρώντας την εφικτότητα στο πρωτεύον και φτάνουμε στη άριστη λύση όταν επιτύχει εφικτότητα και στο δυικό. Στην δυική μέθοδο SIMPLEX αρχίζουμε με μια βασική μη εφικτή λύση του πρωτεύοντος π.γ.π (υπεράριστη λύση) και άρα η αντίστοιχη δυική είναι εφικτή. Η πρώτη βασική λύση εφικτή για το πρωτεύον είναι η άριστη του δυικού.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Συνεπώς η δυική μέθοδος SIMPLEX επιλύει το Δυικό πρόβλημα πάνω στα tableau του πρωτεύοντος και μετακινούμαστε από μια βασική εφικτή λύση του δυικού σε μία καλύτερη βασική εφικτή λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί με την δυική μέθοδο Simplex το π.γ.π

$$\max z = 5x_1 - 4x_2$$

$$s.t \qquad x_1 - x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 24$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_5 = -4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Παράδειγμα (Κολέτσος)

Περιορισμοί μηχανημάτων	**Τύπος προϊόντος**			Διαθέσιμη ποσότητα
	Α	**Β**	**Γ**	
Μ1	0	2	8	480
Μ2	6	4	2	720
Μ3	3	0	5	660
Κέρδος	4	3	5	

Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
& & 2x_2 & + 8x_3 \le 480 & \left(1^{o}\ \mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha\right) \\
6x_1 & + & 4x_2 & + 2x_3 \le 720 & \left(2^{o}\ \mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha\right) \\
3x_1 & & & + 5x_3 \le 660 & \left(3^{o}\ \mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Κανονική μορφή του προβλήματος:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 2x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & & & & & = & 480 \\
6x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 720 \\
3x_1 & & & + & 5x_3 & & & & & + & x_6 & = & 660
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Αρχικό Simplex tableau:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Βασικές μεταβλητές (Λύση)**
x_4	0	2	8	1	0	0	480
x_5	6	4	2	0	1	0	720
x_6	3	0	5	0	0	1	660
z	-4	-3	-5	0	0	0	**0**

1η επανάληψη:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Βασικές μεταβλητές (Λύση)**
x_3	0	1/4	1	1/8	0	0	60
x_5	6	7/2	0	-1/4	1	0	600
x_6	3	-5/4	0	-5/8	0	1	360
z	-4	-7/4	0	5/8	0	0	**300**

2η επανάληψη:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Βασικές μεταβλητές (Λύση)**
x_3	0	1/4	1	1/8	0	0	60
x_1	1	7/12	0	-1/24	1/6	0	100
x_6	0	-3	0	-1/2	-1/2	1	60
z	0	7/12	0	11/24	2/3	0	**700**

Λύση αρχικού προβλήματος

- Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας.
- Βέλτιστη λύση: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (100, 0, 60, 0, 0, 60)$
- Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη βέλτιστη λύση: z=700
- Συνεπώς, η εταιρία επιτυγχάνει το μέγιστο κέρδος των 700 χρηματικών μονάδων, όταν παράγει 100 μονάδες προϊόντος Α, 60 μονάδες προϊόντος Γ και καθόλου μονάδες προϊόντος Β ημερησίως.
- Η τιμή της χαλαρής μεταβλητής x6=60 στη βέλτιστη λύση, υποδηλώνει ότι σύμφωνα με το συγκεκριμένο πλάνο παραγωγής 60 ώρες του τρίτου μηχανήματος δε χρησιμοποιούνται.

Δυϊκό πρόβλημα - Μαθηματική μοντελοποίηση

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min w = 480y_1 + 720y_2 + 660y_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 6y_2 & + & 3y_3 & \geq & 4 \\ 2y_1 & + & 4y_2 & & & \geq & 3 \\ 8y_1 & + & 2y_2 & + & 5y_3 & \geq & 5 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Δυϊκό πρόβλημα - Κανονική μορφή:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min w = 480y_1 + 720y_2 + 660y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + My_7 + My_8 + My_9$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
 & & 6y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & & & & & + & y_7 & & & & & = & 4 \\
2y_1 & + & 4y_2 & & & & & - & y_5 & & & & & + & y_8 & & & = & 3 \\
8y_1 & + & 2y_2 & + & 5y_3 & & & & & - & y_6 & & & & & + & y_9 & = & 5
\end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9 \geq 0$$

Αρχικό Simplex tableau:

Βάση	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	**Βασικές μεταβλητές (Λύση)**
y_7	0	6	3	-1	0	0	1	0	0	4
y_8	2	4	0	0	-1	0	0	1	0	3
y_9	8	2	5	0	0	-1	0	0	1	5
w	-480	-720	-660	0	0	0	-M	-M	-M	**0**

Διόρθωση της ασυνέπειας της z-γραμμής:

Βάση	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	**Βασικές μεταβλητές (Λύση)**
y_7	0	6	3	-1	0	0	1	0	0	4
y_8	2	4	0	0	-1	0	0	1	0	3
y_9	8	2	5	0	0	-1	0	0	1	5
w	-480 +10M	-720 +12M	-660 +8M	-M	-M	-M	0	0	0	**12M**

1η επανάληψη:

Βάση	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	**(Λύση)**
y_2	0	1	1/2	-1/6	0	0	1/6	0	0	2/3
y_8	2	0	-2	2/3	-1	0	-2/3	1	0	1/3
y_9	8	0	4	1/3	0	-1	-1/3	0	1	11/3
w	-480 +10M	0	-300 +2M	-120 +M	-M	-M	120 -2M	0	0	480+4M

2η επανάληψη:

Βάση	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	**(Λύση)**
y_2	0	1	1/2	-1/6	0	0	1/6	0	0	2/3
y_1	1	0	-1	1/3	-1/2	0	-1/3	1/2	0	1/6
y_9	0	0	12	-7/3	4	-1	7/3	-4	1	7/3
w	0	0	-780 +12M	40 -7/3M	-240 +4M	-M	-40 +4/3M	240 -5M	0	560+ 7/3M

3η επανάληψη:

Βάση	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	(Λύση)
y_2	0	1	0	-5/72	-1/6	1/24	5/72	1/6	-1/24	41/72
y_1	1	0	0	5/36	-1/6	-1/12	-5/36	1/6	1/12	13/36
y_3	0	0	1	-7/36	1/3	-1/12	7/36	-1/3	1/12	7/36
w	0	0	0	-335/3	20	-65	335/3 -M	-20 -M	65 -M	2,135/3

4η επανάληψη:

Βάση	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	(Λύση)
y_2	0	1	1/2	-1/6	0	0	1/6	0	0	2/3
y_1	1	0	1/2	1/24	0	-1/8	-1/24	0	1/8	11/24
y_5	0	0	3	-7/12	1	-1/4	7/12	-1	1/4	7/12
w	0	0	-60	-100	0	-60	100 -M	-M	60 -M	**700**

- Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας.
- Βέλτιστη λύση: $\left(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{7}{12}, 0, 0, 0, 0\right)$
- Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη βέλτιστη λύση: z=700

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ;

- Κεφάλαιο 5ο από το βιβλίο των Χατζησταμούλου-Κουνετάς
- Κεφάλαιο 7ο από το βιβλίο του Σίσκου.
- Κεφάλαιο 3ο Τσάντας-Βασιλείου
- Κεφάλαιο 7ο από το βιβλίο του Κολέτσου-Στογιάννη
- Σημειώσεις από το e-class.