ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

Μέθοδοι Μ & Δύο Φάσεων

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ (1)

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα μαθήματα η ποσότητα $\frac{\partial z}{\partial x_j} = c_j - z_j$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολή της Α.Σ όταν μεταβληθεί η τιμή μιας μη βασικής μεταβλητής. Άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε την αξία του κάθε μη βασικού διανύσματος και να επιλέξουμε εκείνο που θα εισέλθει στην βάση βελτιώνοντας την Α.Σ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ (2)

Η σκιώδης τιμή του i-πόρου ορίζεται ως η οριακή αξία του πόρου το ποσό βελτίωσης της Α.Σ κατά την μεταβολή μιας μονάδας του πόρου.

$$w_i \rightarrow z_i - c_i, \forall x_i$$

Το ευκαιριακό κόστος της j μη βασικής μεταβλητής είναι το ποσό ελάττωσης της Α.Σ εάν η ποσότητα αυξηθεί κατά μία μονάδα.

ΜΕΘΟΔΟΣ Μ

Η υλοποίηση και εφαρμογή της μεθόδου Simplex, σε π.γ.π απαιτεί το να είναι στην τυπική μορφή αλλά και την ύπαρξη του μοναδιαίου πίνακα. Στην περίπτωση που δεν περιέχεται ο μοναδιαίος πίνακας μέσα στον πίνακα A χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας (κυρίως με τους περιορισμούς $"\geq"$ **και** $"="$). Η εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών διευρύνει την εφικτή περιοχή του προβλήματος. Συνεπώς μια εφικτή λύση στο αναθεωρημένο πρόβλημα είναι εφικτή λύση και για το αρχικό πρόβλημα αν και μόνον αν οι τιμές όλων των τεχνητών μεταβλητών είναι μηδέν.

ΜΕΘΟΔΟΣ Μ

Η Μ-μέθοδος εισάγει τις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστή για κάθε μεταβλητή το $-M$, όπου M αυθαίρετα πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. Η λύση του αναθεωρημένου προβλήματος πρέπει να είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, όπου x οι λύσεις των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος και όπου 0 οι λύσεις των τεχνητών μεταβλητών οι οποίες πρέπει να είναι 0. Δεν υπάρχει κάποια φυσική ερμηνεία για τις μεταβλητές αυτές και συνεπώς μέσω της Simplex θα πάρει την μηδενική τιμή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (1)

Να λυθεί το παρακάτω π.γ.π

$$\min z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Μια πρώτη απόπειρα παραγωγής το σε τυπική μορφή:

$$-\max z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (2)

Ποιος είναι ο πίνακας Α; Τι παρατηρείται;

Προφανώς ο πίνακας b δεν μπορεί να αποτελέσει την αρχική βασική λύση. Αρα………

$$
\begin{aligned}
-\max z &= -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\
s.t \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = 60 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + \quad + x_7 = 20 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 1

			-2	3	4	0	0	-M	-M	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_4	0	30	1	1	1	1	0	0	0	30
x_6	-M	60	2	1	3	0	-1	1	0	20
x_7	-M	20	1	-1	2	0	0	0	1	10
	Z	-80M	-2+3M	3	4 +5M	0	-M	0	0	

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 4

			-2	3	4	0	0	-M	-M	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_5	0	10/3	1/3	0	0	5/3	1			
x_2	3	40/3	1/3	1	0	2/3	0			
x_3	4	50/3	2/3	0	1	1/3	0			
	Z	320/3								

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (1)

Να λυθεί το παρακάτω π.γ.π

$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\
s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\
& x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\
& 2x_3 - 3x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Είναι σε πρότυπη μορφή;

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 1

			2	-3	1	2	-M	-M	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_1	2	8	1	2	1	2	0	0	8
x_5	-M	6	0	1	1	1	1	0	6
x_6	-M	3	0	0	2	-3	0	1	3/2
	Z	16-9M	0	-7+M	-1+3M	-2+2M	0	0	

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 2

			2	-3	1	2	-M	-M	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_1	2	13/2	1	2	0	7/2	0	0	13/7
x_5	-M	9/2	0	1	0	5/2	1	0	9/5
x_3	1	3/2	0	0	1	-3/2	0	1	-
	Z	29/2-9M/2	0	-7+M	0	-7/2+5M/2	0	0	

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 3

			2	-3	1	2	-M	-M	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_1	2	1/5	1	3/5	0	0			
x_4	2	9/5	0	2/5	0	1			
x_3	1	21/5	0	3/5	1	0			
	Z	41/5	0	-28/5	0				

ΜΕΘΟΔΟΣ Μ-ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Όπως είδαμε η μέθοδος Μ επιτρέπει την εμφάνιση στην Α.Σ ενός π.γ.π ενός Μ αυθαίρετα πολύ μεγάλου αριθμού. Εάν τώρα θεωρήσουμε το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών ως $a = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ και Α* τον επαυξημένο πίνακα που θα προκύψει το π.γ.π μπορεί να παρουσιαστεί ως: $\max z = c' x - M' a$

$$A^* \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} = b$$

$$x, a \geq 0$$

ΜΕΘΟΔΟΣ Μ-ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Εάν x μια εφικτή λύση του αρχικού π.γ.π τότε η $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ θα είναι εφικτή λύση του νέου π.γ.π και καλύτερη από κάθε άλλη εφικτή λύση που έχει μια τεχνητή μεταβλητή με θετική τιμή. Άρα η εφικτή λύση του π.γ.π θα έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με το μηδέν με την μορφή: $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί το παρακάτω π.γ.π

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= -x_1 + 3x_2 \\
s.t \quad & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Μεγάλο μειονέκτημα της Μ-μεθόδου ο μη καθορισμός του πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το Μ, όταν χρησιμοποιούμε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επιλεγούμε το Μ αυθαίρετα μεγάλο το οποίο όμως μπορεί να προκαλέσει προβλήματα ακρίβειας στην υπολογιστική μηχανή (σφάλματα στρογγυλοποίησης). Τα προβλήματα αυτά μπορούμε να τα αποφύγουμε με την μέθοδο των 2 φάσεων.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Στην πρώτη φάση εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές που χρειάζονται για να δημιουργηθεί ο μοναδιαίος πίνακας. Λύνουμε το βοηθητικό πρόβλημα min (τεχνητές μεταβλητές) το οποίο θέλουμε να έχει άριστη λύση μηδέν, δηλαδή, όλες οι τεχνητές να είναι μηδέν. Το σύνολο των άλλων μεταβλητών σε αυτή την περίπτωση αποτελούν βασική εφικτή λύση για το αρχικό πρόβλημα. Αν το βοηθητικό πρόβλημα έχει άριστη λύση θετική, τότε το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση.

Στην δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας σαν αρχική βασική εφικτή λύση του προβλήματος την άριστη λύση της 1ης φάσης.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Εάν τώρα θεωρήσουμε το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών ως $a = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ και A* τον επαυξημένο πίνακα που θα προκύψει το π.γ.π ξεκινάμε λύνοντας το

$$z_1 = 1' a$$

$$A^* \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} = b$$

$$x, a \geq 0$$

Στην δεύτερη φάση λύνουμε το αρχικό π.γ.π χρησιμοποιώντας σαν αρχική λύση την άριστη λύση της προηγούμενης φάσης.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Να λυθεί το παράδειγμα 2 με βάση την μέθοδο των δύο φάσεων.

Λύνουμε λοιπόν το π.γπ

$$z_1 = \min(x_5 + x_6) = -\max(-x_5 - x_6)$$

κάτω από τις νέες συνθήκες και στην δεύτερη φάση το αρχικό μας πρόβλημα.

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 1

			0	0	0	0	-1	-1	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_1	0	8	1	2	1	2	0	0	8
x_5	-1	6	0	1	1	1	1	0	6
x_6	-1	3	0	0	2	-3	0	1	3/2
	Z	9	0	1	3	-2	0	0	

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Tableau 1

			0	0	0	0	-1	-1	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_1	0	13/2	1	2	0	7/2	0		13/7
x_5	-1	9/2	0	1	0	5/2	1		9/5
x_3	0	3/2	0	0	1	-3/2	0		-
	Z	9/2	0	1	0	5/2	0		

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$x = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 21/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$

Tableau 1

			0	0	0	0	-1	-1	
Βάση			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_1	0	1/5	1	3/5	0	0	0		13/7
x_4	0	9/5	0	2/5	0	1	1		9/5
x_3	0	21/5	0	3/5	1	0	0		-
	Z	0	0	0	0	0	0		

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να λυθεί το παρακάτω π.γ.π

$$\max\ z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 304 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης Ι

Περιορισμοί τύπου ≥ και =

Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους : $Z = 90X1 + 75X2 + 80X3$

υπό τους περιορισμούς:

(Ποσότητα):	$X1 + X2 + X3 = 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0{,}40X1 + 0{,}25X2 + 0{,}20X3 \geq 325$
(Υδατάνθρακες):	$0{,}60X1 + 0{,}20X2 + 0{,}40X3 \geq 400$
	$X1 , X2 , , X3 \geq 0$

- Σε όλα τα προβλήματα ελαχιστοποίησης υπάρχει περιορισμός τύπου ≥ (αλλιώς η ελαχιστοποίηση θα οδηγούσε όλες τις μεταβλητές σε μηδενικές τιμές
- Σε πολλά προβλήματα ΓΠ υπάρχουνε περιορισμοί ισότητας

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης II

- Για τη μετατροπή του προβλήματος σε κανονική μορφή χρησιμοποιούνται μεταβλητές πλεονασμού:
  - S2, S3: Ποσότητες Πρωτεϊνών και Υδατανθράκων που υπερβαίνουν τα ελάχιστα όρια των 325 και 400 μονάδων αντίστοιχα

Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους : $Z = 90X1 + 75X2 + 80X3$

υπό τους περιορισμούς:

(Ποσότητα):	$X1 + X2 + X3$	$= 1000$
(Πρωτεΐνες):	$0{,}40X1 + 0{,}25X2 + 0{,}20X3 - S2$	$= 325$
(Υδατάνθρακες):	$0{,}60X1 + 0{,}20X2 + 0{,}40X3 - S3$	$= 400$
	$X1, X2, X3, S1, S2 \geq 0$	

- Πρόβλημα: Δεν προκύπτει εύκολα μία αρχική λύση για τον πίνακα Simpex αν θέσουμε X1, X2, X3 =0 (οι τιμές των S1, S2 θα είναι ≤ 0.

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης ΙΙΙ

Τεχνητές μεταβλητές (Artificial variables)

- Για τον προσδιορισμό μιας «βολικής» πρώτης λύσης στη μέθοδο Simplex, θέτουμε όπου δεν υπάρχουν μεταβλητές περιθωρίου (slack variables) τεχνητές μεταβλητές (artificial variables).
  - Στο συγκεκριμένο πρόβλημα A1, A2, A3 αντίστοιχα για κάθε περιορισμό
- Οι τιμές των τεχνητών μεταβλητών πρέπει να οδηγηθούν στο μηδέν
  - Αυτό επιτυγχάνεται βάζοντας μεγάλους (Μ) συντελεστές κόστους στις τεχνητές μεταβλητές

Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους : $Z = 90X1 + 75X2 + 80X3 + MA1 + MA2 + MA3$

υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(Ποσότητα):} & X1 + X2 + X3 + A1 = 1000 \\
\text{(Πρωτεΐνες):} & 0{,}40X1 + 0{,}25X2 + 0{,}20X3 - S1 + A2 = 325 \\
\text{(Υδατάνθρακες):} & 0{,}60X1 + 0{,}20X2 + 0{,}40X3 - S2 + A3 = 400 \\
 & X1, X2, X3, S1, S2, A1, A2, A3 \geq 0
\end{array}
$$

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης IV

Συντ. Κόστους C_j →		90	75	80	0	0	M	M	M	Ποσότητα	
↓		X1	X2	X3	S2	S3	A1	A2	A3	B_i	
M	A1	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	1000/1=1000
M	A2	0,4	0,25	0,2	-1	0	0	1	0	325	325/0,4=812,5
M	A3	0,6	0,2	0,4	0	-1	0	0	1	400	400/0,6=666,7 →
Z_j		2M	1,45M	1,6M	-M	-M	M	M	M	1725M	
C_j - Z_j		90 – 2M ↑	75– 1,45M	80– 1,6M	M	M	0	0	0		

- Οι βασικές μεταβλητές στον αρχικό πίνακα είναι οι A1, A2, και A3.
- Οι υπόλοιπες μεταβλητές X1, X2, X3 και S1, S2 έχουν μηδενικές τιμές
- Όσο υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στη βάση η διαδικασία δεν έχει φτάσει σε σημείο να προσδιορίσει μια εφικτή λύση.
- Κριτήριο εισόδου νέας μεταβλητής στη βάση:
  - Η μεταβλητή με τη μικρότερη τιμή στη σειρά C_j - Z_j
  - Αν οι τιμές περιλαμβάνουν το M, αυτή με τον μικρότερο (αρνητικό) συντελεστή του M
- Κριτήριο εξόδου παραμένει το ίδιο

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης V

- Η μεταβλητή A3 αντικαταστάθηκε στη βάση από την X1
- Οι τεχνητές μεταβλητές δεν επανέρχονται στη βάση
  - Παραλείπονται οι αντίστοιχες στήλες.

2ος Πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους C_j →		90	75	80	0	0	M	M	Ποσότητα	
↓		X1	X2	X3	S2	S3	A1	A2	B_i	
M	A1	0	2/3	1/3	0	5/3	1	0	1000/3	*(1000/3)/(5/3) = 200*
M	A2	0	7/60	-4/60	-1	2/3	0	1	175/3	*(175/3)/(2/3)=87,5* →
90	X1	1	1/3	2/3	0	-5/3	0	0	2000/3	*Αρνητικός συντελεστής στην S3*
Z_j		90	30 +(47/60)M	60 +(16/60)M	-M	-30 +(7/3)M	M	M	60000 +(1175/3)M	
C_j - Z_j		0	45 – (47/60)M	20 – (16/60)M	M	30 – (7/3)M ↑	0	0		

- Η μεταβλητή A2 αντικαθίσταται από την S3

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης VI

3ος Πίνακας Simplex

Συντ. Κόστους C_j →		90	75	80	0	0	M	Ποσότητα	
↓		X1	X2	X3	S2	S3	A1	B_i	
M	A1	0	3/8	1/2	5/2	0	1	1125/6	*Μοναδικός θετικός συντελεστής στην S2* ➔
0	S3	0	7/40	-1/10	-3/2	1	0	175/2	*Αρνητικός συντελεστής στην S2*
90	X1	1	5/8	1/2	-5/2	0	0	4875/6	*Αρνητικός συντελεστής στην S2*
Z_j		90	450/8+(3/8)M	45+(1/2)M	-225 +(5/2)M	0	M	73125 + (1125/6)M	
$C_j - Z_j$		0	150/8- (3/8)M	35- (1/2)M	225– (5/2)M ↑	0	0		

- Η μεταβλητή Α1 αντικαθίσταται από την S2
- Στον επόμενο πίνακα δεν θα υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης VII

4ος Πίνακας Simplex

- Όλες οι τεχνητές μεταβλητές έχουν απαλειφθεί
- Πρώτη εφικτή λύση στο πρόβλημα ΒΙΟΤΡΟΦΕΣ

Συντ. Κόστους C_j →		90	75	80	0	0	Ποσότητα	
↓		X1	X2	X3	S2	S3	B_i	
0	S2	0	3/20	1/5	1	O	75	*75/(3/20)= 500*➔
0	S3	0	4/10	2/10	0	1	200	*200/(4/10)= 500*
90	X1	1	1	1	0	0	1000	*1000/1000=1*
Z_j		90	90	90	0	0	90000	
C_j - Z_j		0	-15	-10	0	0		
			🡅					

- Η X2 αντικαθιστά την S2

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης VIII

Τελικός *Πίνακας Simplex*

- Όλες οι τιμές της σειράς $C_j - Z_j$ είναι μη αρνητικές

Συντ. Κόστους C_j →		90	75	80	0	0	Ποσότητα
↓		X1	X2	X3	S2	S3	B_i
75	X2	0	1	20/15	20/3	0	500
0	S3	0	0	-1/3	-8/3	1	0
90	X1	1	0	-1/3	-20/3	0	500
Z_j		90	75	70	-100	0	82500
$C_j - Z_j$		0	0	10	100	0	

Κριτήριο Βέλτιστης λύσης για προβλήματα ελαχιστοποίησης

- Όλες οι τιμές της C_j-$Z_j \geq 0$.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν μπορεί να βελτιωθεί (μειωθεί) περαιτέρω

Βέλτιστη λύση

- X1=500, X2=500, X3=0, S2=100, S3=0

Μέθοδος Simplex - Προβλήματα Ελαχιστοποίησης IX

Βέλτιστη λύση του προβλήματος

Συντ. Κόστους C_j →		90	75	80	0	0	Ποσότητα
↓		X1	X2	X3	S2	S3	B_i
75	X2	0	1	20/15	20/3	0	500
0	S3	0	0	-1/3	-8/3	1	0
90	X1	1	0	-1/3	-20/3	0	500
Z_j		90	75	70	-100	0	82500
$C_j - Z_j$		0	0	10	100	0	

Ποσότητες (Μεταβλητές):
Ποσότητα Εισαγόμενης Τροφής (Χ1) *500 κιλά (βασική)*
Ποσότητα Ιχθυάλευρου (Χ2) *500 κιλά (βασική)*
Ποσότητα Δημητριακών (Χ3) *0 κιλά (μη-βασική)*
Αντικειμενική Συνάρτηση:
Συνολικό κόστος *500(90) + 500(75) + 0(80) = 82500 (ή 825 €)*
Περιορισμοί:
Συνολική Ποσότητα: *1000 κιλά* *- δεσμευτικός περιορισμός*
Περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες (S2 = 0): *300 κιλά (30%)* *- δεσμευτικός περιορισμός*
Περιεκτικότητα σε υδατάνθρακες (S3=0): *400 κιλά (40%)* *- δεσμευτικός περιορισμός*

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ;

- Κεφάλαιο 4ο από το βιβλίο Χατζησταμούλου-Κουνετάς.
- Σημειώσεις από το e-class.
- Κεφάλαιο 8ο από το βιβλίο του Σίσκου.
- Κεφάλαιο 4ο Τσάντας-Βασιλείου
- Κεφάλαια 5-7ο από το βιβλίο του Κολέτσου-Στογιάννη