ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

ΕΠΙΧΕΙΡΙΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ-ΜΑΘΗΜΑ ΤΡΙΤΟ ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π (1)

- ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα π.γ.π θα είναι σε τυπική μορφή όταν:

1. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
2. Όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς τους όρους
3. Όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές

Συμβαίνει πάντα αυτό;

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π (2)

- Ελαχιστοποίηση:

Όταν ζητείται ο προσδιορισμός του ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης f(x) θέτουμε g(x)=-f(x) και μεγιστοποιούμε την συνάρτηση g(x) (δηλαδή minz=-maxw).

- Αρνητικοί σταθεροί οροί :

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1).

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Π.Γ.Π (3)

- Ανισώσεις στους περιορισμούς:

Εισάγουμε περιθώριες μεταβλητές (slack variables).Όταν ο περιορισμός είναι της μορφής <= τότε προστίθεται μια μεταβλητή (χαλαρή) και αντίστροφα (>=) αφαιρείται μια μεταβλητή (πλεονάζουσα).

- Περιορισμός Προσήμου :

Όταν μια μεταβλητή x_j είναι αρνητική θέτουμε $x_j = -x'_j$ ενώ όταν δεν υπόκειται σε κάποιο περιορισμό θέτουμε $x_j = x'_j - x''_j, x'_j x''_j \geq 0$. Ισχύει πάντα;

$x'_j = max\{0, x_j\}, x''_j = min\,\{0, x_j\},$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

- Η κανονική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να δοθεί με την ακόλουθη μορφή:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{1j}x_j + & \ldots & + a_{1n}x_n + & \ldots & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{2j}x_j + & \ldots & + a_{2n}x_n + & \ldots & = b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & = \ldots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{mj}x_j & \ldots & + a_{mn}x_n + & \ldots & = b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

- Ωστόσο με την εισαγωγή περιθωρίων:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{1j}x_j + & \ldots & + a_{1n}x_n + & \ldots & + a_{1n+m}x_{n+m} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{2j}x_j + & \ldots & + a_{2n}x_n + & \ldots & + a_{2n+m}x_{n+m} & = b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{mj}x_j & \ldots & + a_{mn}x_n + & \ldots & + a_{m,n+m}x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η τυπική μορφή των παρακάτω π.γ.π

$$\begin{aligned}
&\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\
&s.t \quad x_1 + x_2 = 10 \\
&\quad -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -5 \\
&\quad 7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6 \\
&\quad x_1 \in R,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{x_1, x_2, , x_3} Z : 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\
&s.t. \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\
&2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 40 \\
&2x_1 - 6x_2 = 25 \\
&\left|3x_1 - x_2 + 2x_3\right| \leq 60 \\
&x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2, , x_3} Z : x_1 - x_2 - 3x_3 \\
&s.t. \\
&2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\
&x_2 + x_3 \geq 2 \\
&x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

ΛΥΣΕΙΣ Π.Γ.Π (1)

- Λύση ενός π.γ.π καλείται κάθε διάνυσμα που επαληθεύει την σχέση: $Ax = b$
- Εφικτή (δυνατή) λύση καλείται κάθε λύση που ικανοποιεί τις σχέσεις: $$Ax = b$$ $$x \geq 0$$
- Βάση καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα Α που αποτελείται από m γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του Α.

ΛΥΣΕΙΣ Π.Γ.Π (2)

- Βασική Εφικτή (δυνατή) λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων ως προς μια βάση, καλείται μία δυνατή λύση η οποία έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές θετικές κι όλες τις μη βασικές μηδέν (όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές). Η βασική λύση θα έχει την μορφή:

$$x = (0, \ldots, x_{i1}, 0, \ldots, x_{i2}, 0, \ldots x_{im}, 0, \ldots 0)$$

ΛΥΣΕΙΣ Π.Γ.Π (3)

- Εκφυλισμένη Βασική Εφικτή (δυνατή) λύση καλείται μια βασική εφικτή λύση με μια τουλάχιστον από τις βασικές της μεταβλητές ίση με μηδέν.
- Αρίστη λύση καλείται αυτή που μεγιστοποιεί-ελαχιστοποιεί την Α.Σ.

ΛΥΣΕΙΣ Π.Γ.Π (4)

- Βάση

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & . & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΜΗ ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΥΣΕΩΝ (1)

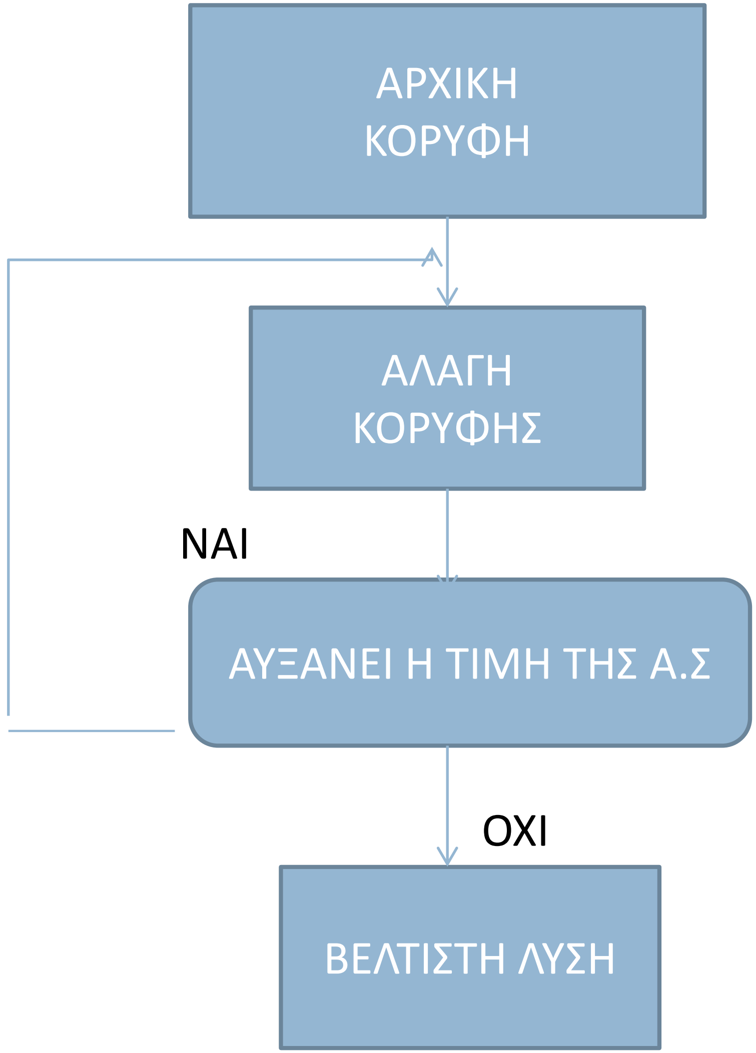
- Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος
- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτό κλειστό σύνολο.
- Κάθε βασική εφικτή λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΥΣΕΩΝ (2)

- Αν υπάρχει μια εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε υπάρχει και μια βασική εφικτή λύση αυτού.
- Αν υπάρχει μια βέλτιστη εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική εφικτή λύση.
- Αν υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη εφικτή λύση, που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν οι βασικές λύσεις του παρακάτω π.γ.π.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4$$

$$s.t \qquad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$4x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 11$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Το π.γ.π είναι σε τυπική μορφή. Θέτουμε 2 μεταβλητές ίσες με 0 και λύνουμε ως προς τις υπόλοιπες:

	ΒΑΣΙΚΕΣ	ΜΗ ΒΑΣΙΚΕΣ	ΒΑΣΙΚΗ ΛΥΣΗ
1.	x_3, x_4	x_1, x_2	(0,0,1/2,9/2)
2.	x_2, x_4	x_1, x_3	(0,1,0,6)
3.	x_2, x_3	x_1, x_4	(0,-3,2,0)
4.	x_1, x_4	x_2, x_3	(1/2,0,0,9/2)
5.	x_1, x_3	x_2, x_4	-
6.	x_1, x_2	x_3, x_4	(2,-3,0,0)

ΜΙΑ ΔΕΥΤΕΡΗ ΛΥΣΗ

Πριν προχωρήσουμε σε μια αναλυτική λύση μέσω της μεθόδου **Simplex** ας προσεγγίσουμε το π.γ.π με βάση τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n+m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & \dots & a_{m,n+m} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ΜΙΑ ΔΕΥΤΕΡΗ ΛΥΣΗ

Να λυθεί το παρακάτω π.γ.π.

$$\max z = 25x_1 + 20x_2 + 16x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$s.t \qquad x_1 + x_4 = 7$$

$$1.5x_2 + x_2 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + x_6 \leq 6$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, .., 6$$

ΜΙΑ ΔΕΥΤΕΡΗ ΛΥΣΗ

Ο πίνακας Α δίνεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 \\ 2 & 1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

με την ορίζουσα $A^{*} = -0.25$. Ο αντίστροφος του Α* δίνεται ως εξής:

$$A^{-1*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \\ 12 & 4 & -6 \end{bmatrix},$$

Άρα οι λύσεις

$$x_B = A^{-1*} b = \begin{bmatrix} 7 \\ 24 \\ 24 \end{bmatrix}, z = c_B^{'} x_B = \begin{bmatrix} 25 & 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 24 \\ 24 \end{bmatrix} = 1039$$

ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑ

Dantzig (1963) επινόησε την βελτίωση της λύσης σε ένα π.γ.π βγάζοντας μια στήλη από τις βασικές μεταβλητές $x^{*}_{N,j}$ και αντικαθιστώντας την με μία από τις μη βασικές $x^{*}_{B,j}$. Απόδειξε επίσης την πρόταση κατά την όποια εάν ένα μη βασικό διάνυσμα αντικαταστήσει ένα βασικό διάνυσμα στην βάση A τότε το νέο σύνολο διανυσμάτων αποτελεί επίσης βάση.

ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑ

Ορίζουμε την εξής ποσότητα: $c_j^* = z_j - c_j = c_B' A^{-1} x_{N,j}^* - c_j$
που εκφράζει το πόσο αυξάνει η Α.Σ εάν εισέλθει στην βάση η αντίστοιχη μεταβλητή $x_{N,j}^*$.
Με βάση λοιπόν τα παραπάνω θα πρέπει να αναζητήσουμε μεταβλητής εκτός βάσης για την οποία η παραπάνω ποσότητα θα πρέπει να είναι αρνητική.

ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑ

Η εφικτότητα συνδέεται με την νέα λύση που ικανοποιεί την σχέση $x \geq 0$.

Το κριτήριο $\tau^k = \min\left(x_i^k / u_{ij}^k , u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ x_i^k / u_{rj}^k , u_{rj}^k > 0 \right\}$

καλείται κριτήριο εφικτότητας και προσδιορίζει την τιμή της η οποία θα μηδενίζει την βασική μεταβλητή και θα δίνει ενδεχομένως μια μη μηδενική τιμή στην μη βασική μεταβλητή.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων σε ένα π.γ.π είναι πεπερασμένος $\binom{n}{m}$
2. Το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι κυρτό

(Ένα σύνολο C καλείται κυρτό εάν $\forall\; x_1, x_2 \in C \;\exists\; x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C, \lambda \in [0,1]$)

3. Κάθε βασική δυνατή λύση είναι μια κορυφή του υπερπολύεδρου και αντίστροφα.
4. Εάν υπάρχει μια δυνατή λύση υπάρχει και μια βασική δυνατή λύση.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

5. Εάν έχουμε μια βέλτιστη εφικτή λύση τότε η Α.Σ παίρνει την βέλτιστη τιμή της σε ένα ακραίο σημείο του συνόλου των εφικτών λύσεων.
6. Εάν ένα π.γ.π έχει ένα μη κενό σύνολο εφικτών λύσεων τότε το σύνολο περιέχει τουλάχιστον. Μια βασική λύση.
7. Εάν σε ένα π.γ.π υπάρχει ένα μη κενό σύνολο λύσεων το οποίο είναι και φραγμένο τότε έχει άριστη λύση.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ- ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ (1)

Ξεκινάμε από μια κορυφή και πηγαίνουμε σε άλλες. Μετά από κ-επαναλήψεις θα έχουμε υπολογίσει τις συντεταγμένες της x^k κορυφής στην οποία η Α.Σ θα έχει τιμή $\tilde{z}^k = (\tilde{c}_k)^t x^k$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \cdots \\ x_m^k \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad a_i = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k, a_{m+1}^k, \ldots., a_j^k, \ldots. a_{n+m}^k)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^k a_i^k = b^k$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ- ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ (2)

Κάθε βασική λύση πρέπει να περιλαμβάνει m βασικές μεταβλητές και συνεπώς μια νέα βασική λύση μπορεί να κατασκευασθεί θέτοντας στην βασική εφικτή λύση μιας από τις m βασικές μεταβλητές ίση με το μηδέν και αντικαθιστώντας την με κάποια από τις μη βασικές μεταβλητές. Προφανώς θα πρέπει να απαιτήσουμε η προκύπτουσα βασική λύση να είναι εφικτή αλλά και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με την νέα λύση να είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ- ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ (3)

Ας εναλλάξουμε τώρα την θέση μιας βασικής μεταβλητής με μια μη βασική εισάγοντας στην βάση την μεταβλητή $x_j^k \to a_j^k \to (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k)\ \gamma.\alpha \to a_j^k = \sum_{i=1}^{m} a_i^k u_{ij}^k$

Εάν $u_j^k = \begin{bmatrix} u_{1j}^k \\ \ldots \\ u_{ij}^k \\ \ldots \\ u_{mj}^k \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_j^k = \sum_{i=1}^{m} a_i^k u_{ij}^k = \left[a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k \right] \begin{bmatrix} u_{1j}^k \\ \ldots \\ u_{ij}^k \\ \ldots \\ u_{mj}^k \end{bmatrix} = B^k u_j^k$

Επιλέγω $\tau^k B^k u_j^k = \tau^k a_j^k$ και αφαιρώντας

$$B^k \left(x_B^k - \tau^k u_j^k \right) + \tau^k a_j^k = b^k \Leftrightarrow$$

$$\left(x_1^k - \tau^k u_{1j}^k \right) a_1^k + \left(x_2^k - \tau^k u_{2j}^k \right) a_2^k + \ldots .. + \left(x_m^k - \tau^k u_{mj}^k \right) a_m^k + \tau^k a_j^k = b^k$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ- ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ (4)

Η λύση αυτή είναι μη βασική καθώς περιλαμβάνει m+1 μεταβλητές δηλαδή τις τρέχουσες m και την εισερχόμενη μεταβλητή και πρέπει να βρούμε τ^k τέτοιο ώστε μια από τις τρέχουσες βασικές μεταβλητές να λαμβάνει μηδενική τιμή στην νέα λύση. Επιπλέον για να είναι και εφικτή η συγκεκριμένη λύση θα πρέπει $x_m^k - \tau^k u_{mj}^k \geq 0$.

$$\tau^k = \min\left(x_i^k / u_{ij}^k , u_{ij}^k > 0 \right) = \left\{ x_i^k / u_{rj}^k , u_{rj}^k > 0 \right\}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ- ΕΥΡΕΣΗ Κ-ΚΟΡΥΦΗΣ (5)

Η βέλτιστη (άριστη) λύση δίνεται ως εξής:

$$z^k = (c)^t x^k \Leftrightarrow \left[(c_B^K)^t \middle| (c_E^K)^t \right] \begin{bmatrix} x_B^k \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = (c_B^K)^t x_B^k = c_B^K (B_k)^{-1} b^k$$

a_{ij}

$$z^{k+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i^k \left(x_i^k + \tau^k u_{ij}^k \right) + c_j^k \tau^k = \sum_{i=1}^{m} c_i^k x_i^k + \sum_{i=1}^{m} \tau^k c_i^k x_i^k + b^k c_j^k =$$

$$= z^k - \tau^k \left[(c_B^k)^t u_{ij}^k - c_j^k \right] \Leftrightarrow$$

$$z^{k+1} = z^k - \tau^k \left[s_j^k - c_j^k \right]$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

Να λυθούν τα παρακάτω π.γ.π.

$$\begin{aligned}
&\max Z : 5x_1 - 4x_2 \\
&\boldsymbol{s.t.} \\
&-x_1 + x_2 \geq -6 \\
&3x_1 - 2x_2 \leq 24 \\
&-2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{x_1, x_2, , x_3} Z : -x_1 - x_2 + x_3 \\
&\boldsymbol{s.t.} \\
&2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\
&-x_1 - 7x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
&7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\
&4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2, , x_3} Z : x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\
&\boldsymbol{s.t.} \\
&-7x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\
&-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2, , x_3} Z : x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\
&\boldsymbol{s.t.} \\
&x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\
&-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\
&4x_2 - 3x_3 - 8x_5 \geq -10 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο 3ο Κουνετάς-Χατζησταμούλου
- Κεφάλαια 5ο-6ο από το βιβλίο του Σίσκου.
- Κεφάλαιο 2ο από το βιβλίο των Τσάντα-Βασιλείου.
- Σημειώσεις από το e-class.