ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ 2º ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021-2022-ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Π.Γ.Π

Βασικές Έννοιες Π.Γ.Π (1)

Ας θεωρήσουμε μια υποθετική οικονομία που παράγει $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ προϊόντα. Για την κατασκευή των συγκεκριμένων προϊόντων χρησιμοποιούνται $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots., E_{k_n}$ εργοστάσια και θεωρούμε την συγκεκριμένη οικονομία κάθετα διαρθρωμένη με κάθε εργοστάσιο να λειτουργεί λιγότερες ή ίσες με 24 ώρες. Εάν τώρα υποθέσουμε ότι το κάθε εργοστάσια απαιτεί συγκεκριμένες ώρες λειτουργίας-επεξεργασίας (π.χ. E_{k_1}, a_{11} για την παραγωγή x_1 τότε:

Βασικές Έννοιες Π.Γ.Π (2)

- Η μαθηματική απεικόνιση

Τεχνολογικοί Συντελεστές

Κέρδος ανά μονάς παραγωγής

$$\max \ or \ \min \ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{1j}x_j + & \ldots & + a_{1n}x_n + & \ldots & =,\leq,\geq & b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{2j}x_j + & \ldots & + a_{2n}x_n + & \ldots & =,\leq,\geq & b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & =,\leq,\geq & \ldots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & + a_{mj}x_j & \ldots & + a_{mn}x_n + & \ldots & =,\leq,\geq & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Μεταβλητές Απόφασης

Έχουμε m εξισώσεις με n αγνώστους. Υποθέτουμε πάντα r(A)=m<n (γιατί;)

Βασικές Έννοιες Π.Γ.Π (3)

Το παραπάνω πρόβλημα καλείται π.γ.π. καθώς:

1. Μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται μια γραμμική συνάρτηση αγνώστων μεταβλητών (η Α.Σ)
2. Οι τιμές των αγνώστων μεταβλητών ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών
3. Κάθε τιμή των αγνώστων μεταβλητών είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός

ΜΟΝΤΕΛΟ Π.Γ.Π

Το μαθηματικό μοντέλο που παρουσιάστηκε πριν συνεπώς περιλαμβάνει:

1. Τις μεταβλητές που θα πρέπει να “αλλάξουμε”για νε πετύχουμε τον στόχο μας.
2. Τους τεχνολογικούς συντελεστές (παραμέτρους) όπως η τιμή ενός προϊόντος κ.λ.π.
3. Τους περιορισμούς-συνθήκες που εμφανίζονται με την μορφή άνισο-εξισώσεων και
4. Την αντικειμενική συνάρτηση (Α.Σ)

ΣΤΑΔΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ

- Η αντιμετώπιση ενός π.γ.π περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1. Αναγνώριση και περιγραφή του προβλήματος
2. Καθορισμός των παραμέτρων του π.γ.π.
3. Εντοπισμός των περιορισμών του προβλήματος.
4. Αναζήτηση λύσεων και επιλογή της βέλτιστης λύσης
5. Δοκιμή και υλοποίηση μέσω στης εφαρμογής της βέλτιστης λύσης.

ΛΥΣΗ Π.Γ.Π (1)

- **Λύση** του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος $A\bar{x} \leq, =, \geq \bar{b}$, δηλαδή κάθε διάνυσμα x* που ικανοποιεί το σύστημα αυτό (ή ο συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού). Με άλλα λόγια κάθε συνδυασμός των μεταβλητών $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ ανεξάρτητα εάν είναι επιθυμητός ή και επιτρεπτός. Μαθηματικά μιλώντας κάθε λύση $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ του συστήματος των περιορισμών $A\bar{x} \leq, =, \geq \bar{b}$
- **Δυνατή (ή εφικτή) λύση** του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα x* που ικανοποιεί τους περιορισμούς x≥0. Μια λύση, που παραβιάζει τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς, ονομάζεται μη-εφικτή λύση και δεν είναι σημείο της εφικτής περιοχής του π.γ.π.

ΛΥΣΗ Π.Γ.Π (2)

- **Βασική λύση** του π.γ.π λέγεται κάθε λύση που οι μη μηδενικές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του Α.
- **Βέλτιστη (άριστη) δυνατή λύση** του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση αυτού, που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.
- Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος
- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτό κλειστό σύνολο.
- Κάθε βασική εφικτή λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

ΛΥΣΗ Π.Γ.Π (3)

- Το σύνολο των εφικτών λύσεων καλείται **Εφικτή περιοχή** (συνήθως συμβολίζεται με F).
- Το π.γ.π λέγεται φραγμένο εάν $\max \tilde{c}' x < \infty$

Εάν ισχύει η ισότητα τότε το π.γ.π δεν έχει άριστη λύση.

- Θυμηθείτε ότι Τάξη ενός πίνακα (*A*) λέγεται ο

αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του *A. Εάν r είναι γραμμικά ανεξάρτητες οι m-r είναι γραμμικά εξαρτημένες.*

Ιδιότητες των Λύσεων

1. Ένα σύνολο θα καλείται κυρτό όταν $\forall\ x_1, x_2 \in M, \lambda : 0 < \lambda < 1$ ισχύει $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in M$
2. Ακρότατο κυρτού συνόλου Μ είναι κάθε σημείο x:

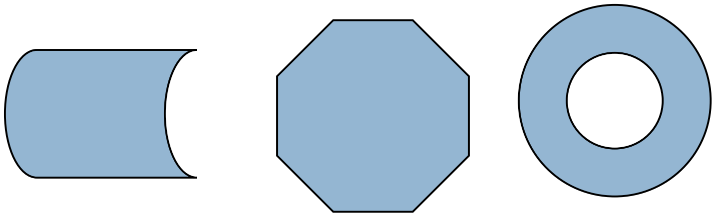
   $x_1, x_2 \in M, \lambda : 0 < \lambda < 1$ με $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

3. Κυρτό πολύεδρο είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων.
4. Υπερεπίπεδο καλείται το σύνολο των σημείων

   $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n = b$

5. Ημιεπίπεδο αντίστοιχα:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n \leq\geq b$



ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ Π.Γ.Π (1)

- **Προσθετικότητα**

  Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι άμεσα αναλογική με το επίπεδο της δραστηριότητας . Όταν το επίπεδο της δραστηριότητας αυξάνει ή μειώνεται , η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που οφείλεται στην αλλαγή μίας μονάδας της δραστηριότητας παραμένει ίδια .επίσης το ποσό των πόρων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δραστηριότητα είναι άμεσα ανάλογο με το επίπεδο της δραστηριότητας.

- **Αναλογικότητα**

  Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το άθροισμα της συνεισφοράς κάθε μίας δραστηριότητας. Όμοια, το συνολικό ποσό των πόρων που χρησιμοποιείται από όλες τις δραστηριότητες είναι το άθροισμα του ποσού των πόρων που κάθε μία δραστηριότητα χρησιμοποιεί ανεξάρτητα.

ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ Π.Γ.Π (2)

- **Διαιρετότητα**

  Όλες οι δραστηριότητες είναι συνεχείς και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Δηλαδή ο Γ.Π. δεν είναι κατάλληλος για προβλήματα που οι μεταβλητές λήψης απόφασης είναι ακέραιοι.

- **Καθοριστικότητα**

  Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού καταγράφονται και ως καθοριστικά υποδείγματα. Με άλλα λόγια δεν λαμβάνουν υπόψη ότι όλοι οι συντελεστές είναι προσεγγίσεις , όταν υπολογίζει μία συγκεκριμένη λύση. Γι’αυτό πρέπει να γίνεται ανάλυση ευαισθησίας.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Π.Γ.Π

Στην περίπτωση που το π.γ.π περιέχει μόνο δύο μεταβλητές τότε εκτός από την αναλυτική μέθοδο που θα παρουσιαστεί σε επόμενα μαθήματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την γραφική μέθοδο και την απεικόνιση του προβλήματος στις δύο διαστάσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένα εργοστάσιο παράγει δυο προϊόντα, τα προϊόντα 1 και 2. Η έρευνα αγοράς περιορίζει την παράγωγη του προϊόντος 1 στους 10 τόνους κάθε μήνα και του προϊόντος 2 στους 8 τόνους. Για την παράγωγη των προϊόντων χρησιμοποιούνται δυο πρώτες ύλες, οι Α και Β. Για την παραγωγή ενός τόνου προϊόντος 1 απαιτούνται 1 τόνος πρώτης ύλης Α και 3 τόνοι πρώτης ύλης Β, ενώ για την παραγωγή ενός τόνου προϊόντος 2 απαιτούνται 2 τόνοι πρώτης ύλης Α και 1 τόνος πρώτης ύλης Β. Οι μηνιαίες διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών Α και Β είναι αντίστοιχα 14 και 16 τόνοι. Η πώληση ενός τόνου προϊόντος 1 αφήνει καθαρό κέρδος 5 χιλιάδες ευρώ ενώ το καθαρό κέρδος για το προϊόν 2 είναι 4 χιλιάδες ευρώ κάθε μήνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Πρώτη υλη	Προϊόν 1, τόνοι	Προϊόν 2, τόνοι	Διαθέσιμο, τόνοι/μήνα
Α	1	2	14
Β	3	1	16
Κέρδος, χιλ. ευρώ	5	4	

- Η μαθηματική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max \; (5x_1 + 4x_2)$$
$$x_1 \leq 10$$
$$x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 14$$
$$3x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ Π.Γ.Π-ΒΗΜΑΤΑ (1)

Για την επίλυση π.γ.π με την βοήθεια της απεικόνισης τους σε ένα γράφημα καλό θα ήταν να γνωρίζουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Σχεδιάζουμε σε άξονες τις ευθείες όλων των περιορισμών αγνοώντας τις ανισότητες.
2. Για κάθε ευθεία περιορισμό καθορίζουμε την περιοχή που παριστά λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες (ορίζουμε έτσι την εφικτή περιοχή ή το εφικτό χωρίο).

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ Π.Γ.Π-ΒΗΜΑΤΑ (2)

3. Για αυθαίρετες τιμές της αντικειμενικής μας συνάρτησης σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες ευθείες.
4. Με βάση το εφικτό χωρίο εντοπίζουμε προς ποια κατεύθυνση η Α.Σ μειώνεται ή αυξάνει.
5. Βρίσκουμε το ακραίο σημείο που αποτελεί σημείο τομής της Α.Σ και του εφικτού χωρίου καθώς η Α.Σ εγκαταλείπει το χωρίο.
6. Υπολογίζουμε τις συνιστώσες του ακραίου σημείου που αποτελεί την άριστη λύση του προβλήματος.
7. Υπολογίζουμε την τιμή της Α.Σ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια βιοτεχνία παραγωγής κρουασάν διοχετεύει στην αγορά δύο διαφορετικά είδη (με σοκολάτα και με μαρμελάδα φράουλα). Το περιθώριο κέρδους για κάθε προϊόν ανέρχεται σε 3 και 4.5 ευρώ αντίστοιχα. Για την παραγωγή των δύο διαφορετικών ειδών κρουασάν χρησιμοποιείται ένα μείγμα υλικών ως εξής:

1. Για το κρουασάν με σοκολάτα χρειάζονται 500 γραμμάρια ζύμης και 125 γραμμάρια σοκολάτας ενώ
2. Για το κρουασάν με μαρμελάδα 500 γραμμάρια ζύμης και 250 γραμμάρια φράουλας.
3. Για την επόμενη μέρα παραγωγής η βιοτεχνία έχει στην διάθεσής της 75 κιλά ζύμης και 25 κιλά μείγματος υλικών ενώ έχει εξασφαλίσει παραγγελίες για 50 κρουασάν σοκολάτας και 25 κρουασάν μαρμελάδας.

Ποιο το σχέδιο παραγωγής που θα τις εξασφαλίσει τα περισσότερα κέρδη;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

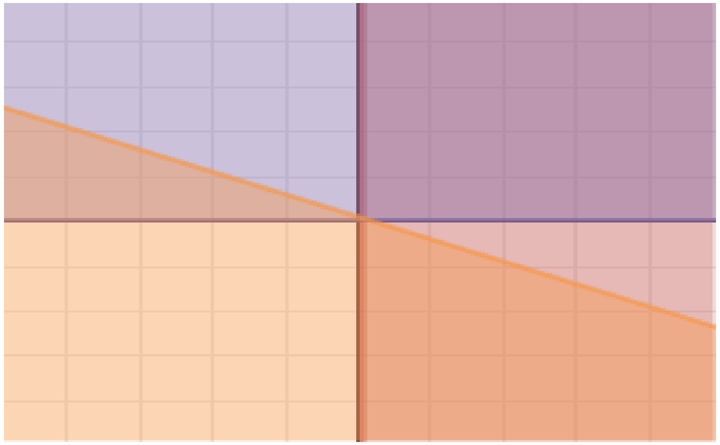
Συνεπώς το μαθηματικό μοντέλο επίλυσης του π.γ.π έχει την εξής μορφή:

$$\max z = (3x_1 + 4.5x_2)$$
$$500x_1 + 500x_2 \leq 75000$$
$$x_1 \geq 50$$
$$x_2 \geq 25$$
$$125x_1 + 250x_2 \leq 25000$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Χαράσσουμε τις περιοριστικές ευθείες που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του π.γ.π

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

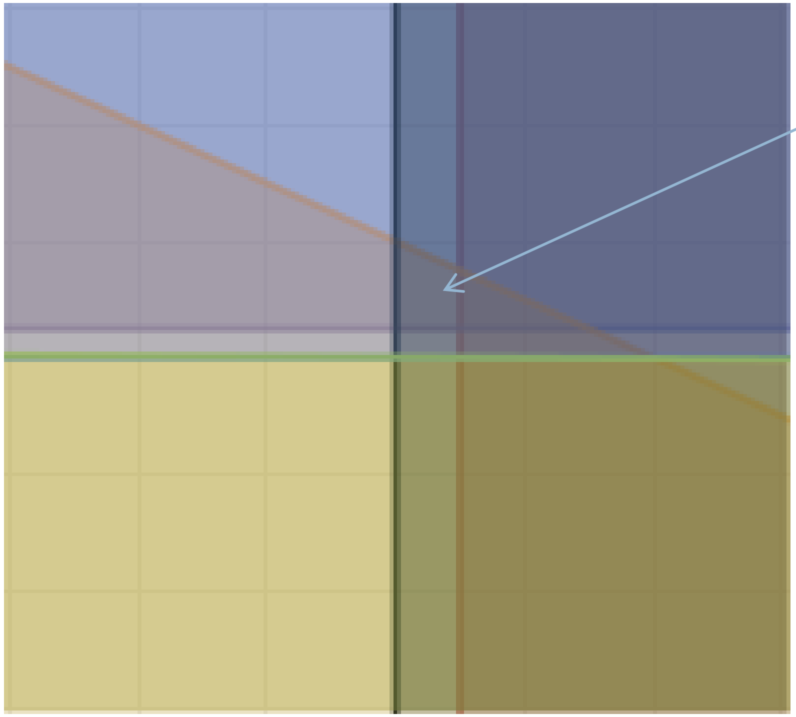
$$x_1 \geq 50$$
$$x_2 \geq 25$$
$$125x_1 + 250x_2 \leq 25000$$



Για παράδειγμα το σχήμα που θα μας προκύψει είναι το παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

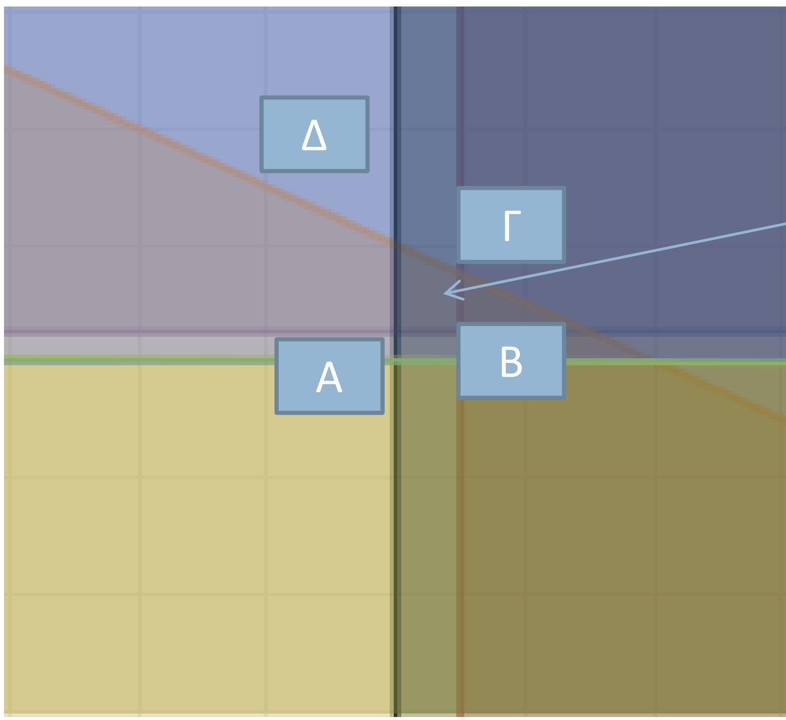
Για το σύνολο των περιορισμών το γράφημα δίνεται ως εξής



Το χωρίο που θέλουμε
να υπολογίσουμε.
Με ποιον τρόπο;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Οι κορυφές του πολυγώνου ΑΒΓΔ είναι οι υποψήφιες λύσεις για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης και αποτελούν την εφικτή περιοχή.



Α(50,25)
Β(125,25)
Γ(100,50)
Δ(50,75)

Use Graph 4.4.2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στο επόμενο βήμα χαράσσουμε την Α.Σ για κάποια τυχαία τιμή του z και ακολούθως την μετακινούμε προς την κατεύθυνση αύξησης της τινές του z (προς τα πάνω και δεξιά). Η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται στο σημείο Γ. Συνεπώς η βέλτιστη λύση είναι (100,50) και η τιμή της Α.Σ ανέρχεται στα 525 ευρώ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε τον παρακάτω πίνακα:

Κορυφή εφικτής περιοχής	Συντεταγμένες σημείων	Τιμή της Α.Σ
Α	(50,25)	262.5
Β	(125,25)	487.5
Γ	(100,50)	525
Δ	(50,75)	487.5

Σημειώσεις στο Παράδειγμα 1

- Περιορισμοί οι οποίοι στην άριστη λύση ισχύουν ως ισότητες καλούνται ενεργοί ή δεσμευτικοί.
- Από την άλλη πλευρά καλούνται αδρανείς ή μη δεσμευτικοί. Ο αδρανής περιορισμός συνήθως εκφράζει ένα πόρο ο οποίος δεν έχει καταναλωθεί πλήρως και άρα υπάρχει περίσσευμα του συγκεκριμένου πόρου (περιθώρια τιμή ή χαλαρή τιμή).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Θεωρήστε το παρακάτω διυλιστήριο με 2 τύπους
αργού πετρελαίου που χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές χημικές διεργασίες. Πώς θα χρησιμοποιηθούν οι διεργασίες αυτές για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Είσοδος		Έξοδος		Κέρδος
A	B	X	Y	
6	4	5	2	2
3	5	2	4	3
180	200	100	80	
Απόθεμα				

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το π.γ.π διαμορφώνεται ως εξής:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 180$$

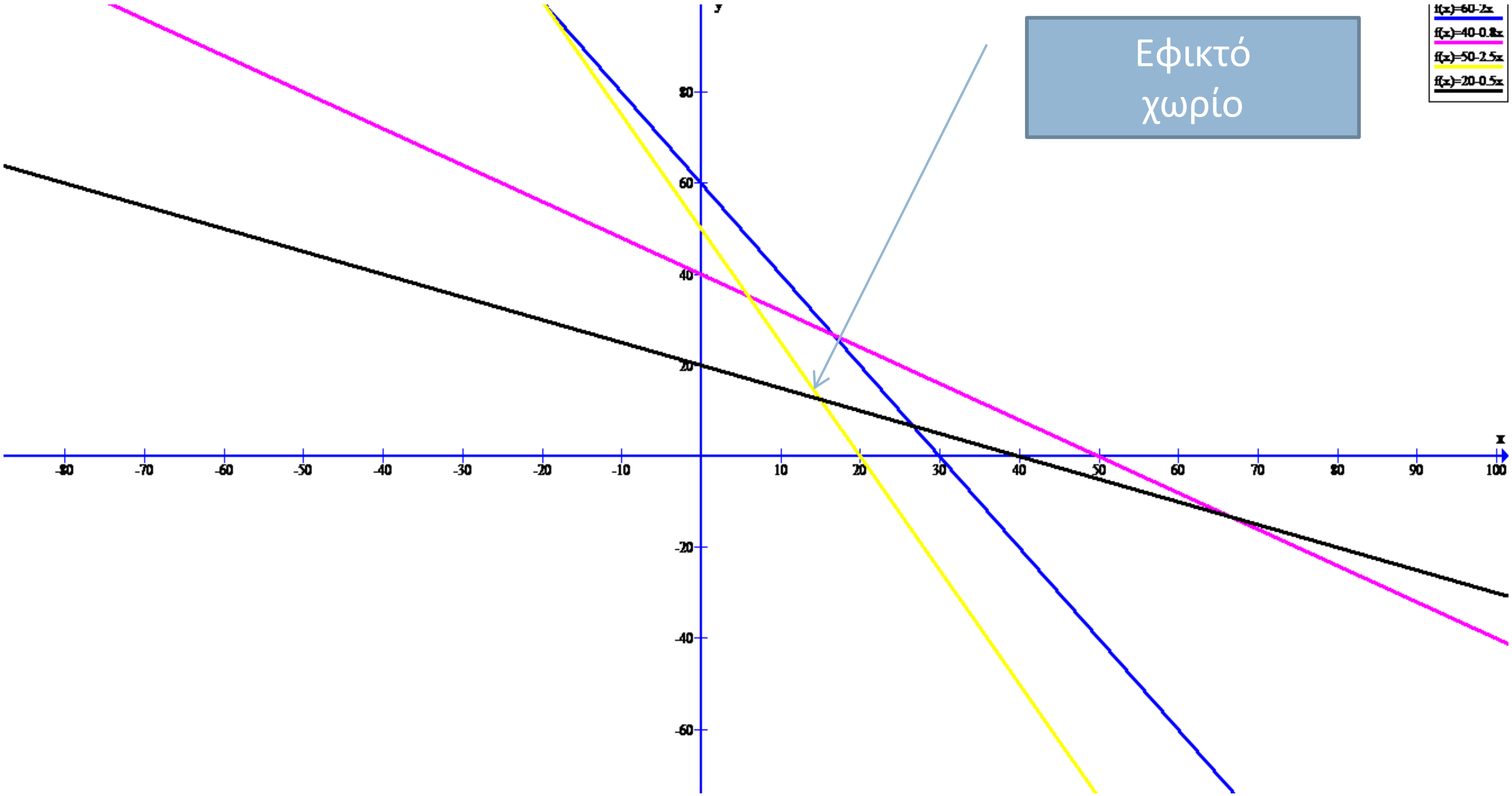
$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 100$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ένας κτηνοτρόφος θέλει να προετοιμάσει ένα μείγμα από τις τροφές A και B. Κάθε κιλό της τροφής A περιέχει 120 γρ. πρωτεΐνες, 56 γρ. υδατάνθρακες, 103 γρ. λίπη και κοστίζει 24 ευρώ. Κάθε κιλό της τροφής B περιέχει 60 γρ. πρωτεΐνες, 112γρ. υδατάνθρακες και 120γρ. λίπη και κοστίζει 18 ευρώ. Το μείγμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 480 γρ. πρωτεΐνες, 448 γρ. υδατάνθρακες και 720 γρ. λίπη. Ο κτηνοτρόφος θέλει να παρασκευάσει το μείγμα κατά τέτοιο τρόπο που να πληρούνται οι περιορισμοί και να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λυθεί γραφικά το παρακάτω π.γ.π.

$$\min z = 4x_1 + x_2$$
$$2x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Αλλά και το

$$\max z = x_1^2 + x_2^2$$
$$x_1 x_2 \geq 10$$
$$2x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Το πρόβλημα σε μαθηματική μορφή:

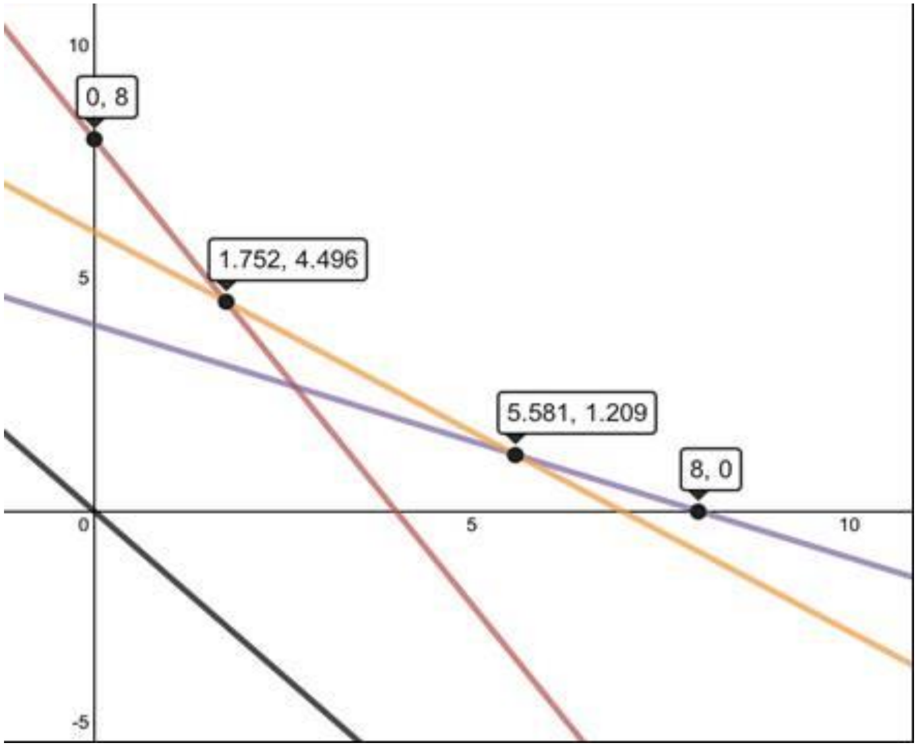
$$\min Z = 24x_1 + 18x_2$$

$$120x_1 + 60x_2 \geq 480$$

$$56x_1 + 112x_2 \geq 448$$

$$103x_1 + 120x_2 \geq 720$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Συνεπώς ο κτηνοτρόφος στην προσπάθεια του να μειώσει το κόστος των τροφών Α και Β πληρώντας τους περιορισμούς ως προς τις προδιαγραφές της ελάχιστης ποσότητας πρωτεϊνών, υδατανθράκων και λιπών, πρέπει να αναμίξει 1,752χλγ τροφής Α με 4,496χλγ τροφής Β.Το κόστος του συγκεκριμένου μείγματος θα φτάσει τα 122,98 ευρώ.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

1) $\max z = 200x_1 + 300x_2$

$x_1 + x_2 \leq 4000$

$2x_1 + x_2 \leq 7000$

$x_2 \geq 2000$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2) $\max z = 10x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

3) $\max z = 1000x_1 + 1000x_2$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

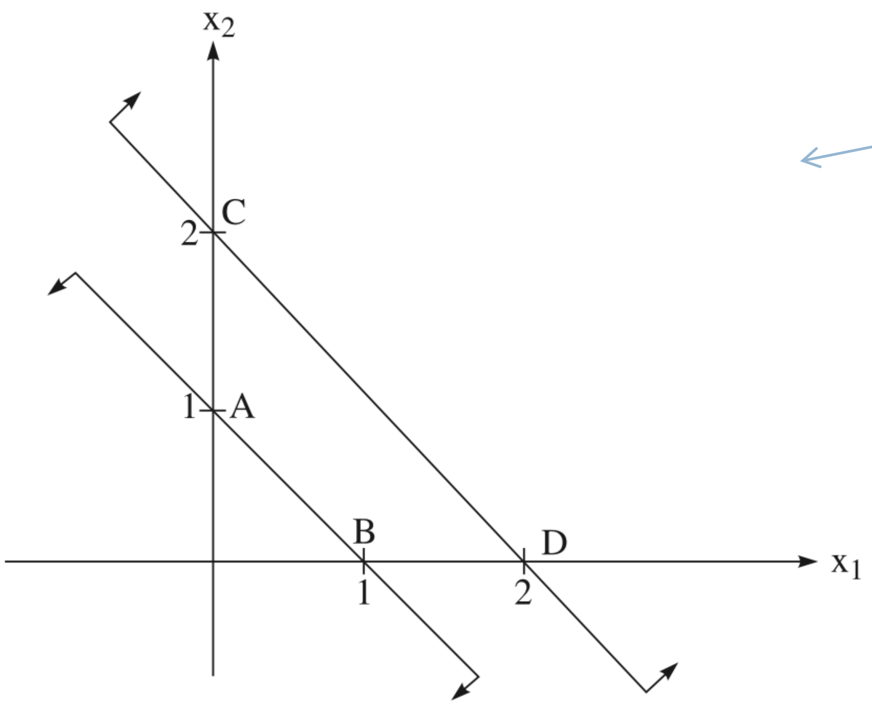
4) $\max z = 2000x_2$

$x_1 - x_2 \geq 0$

$x_2 \leq 5$

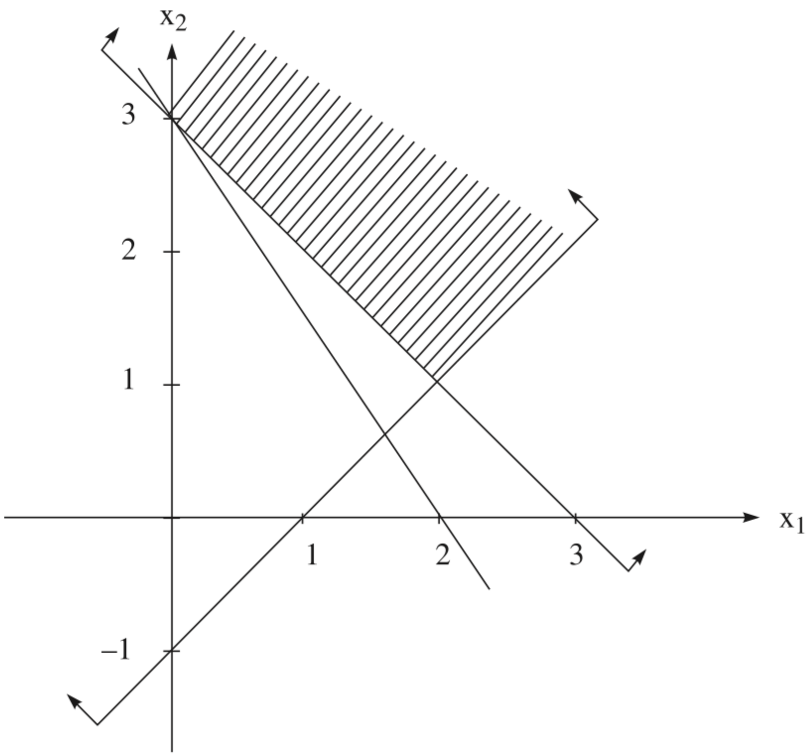
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ-ΑΝΕΦΙΚΤΟ



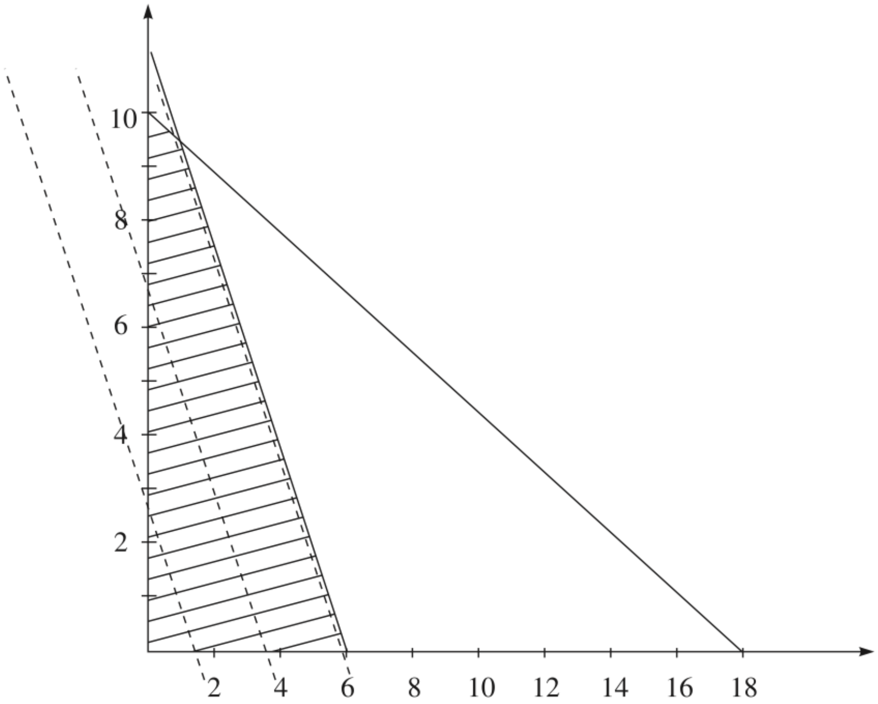
ΑΝΕΦΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ- ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟ



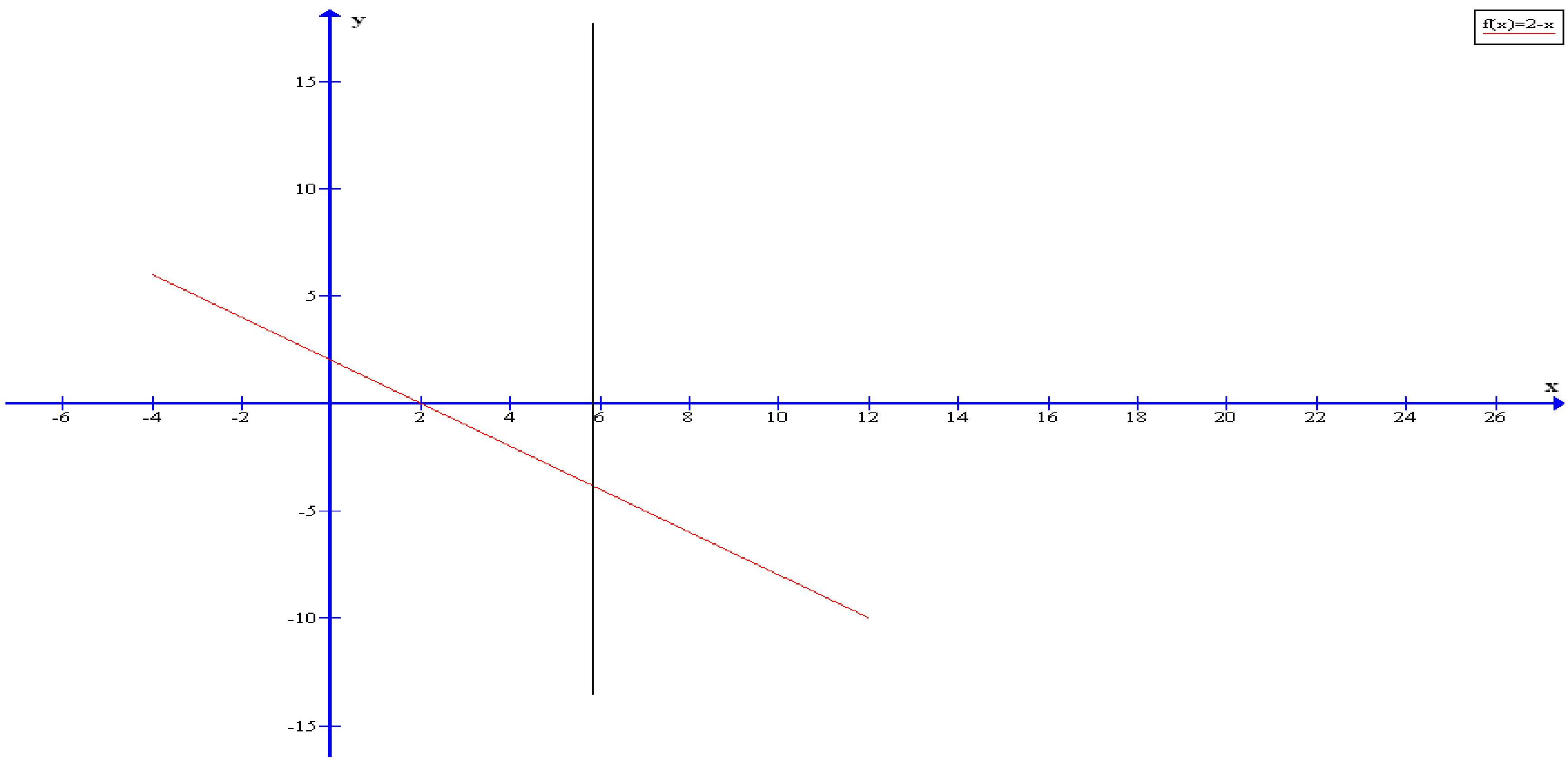
ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ-ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

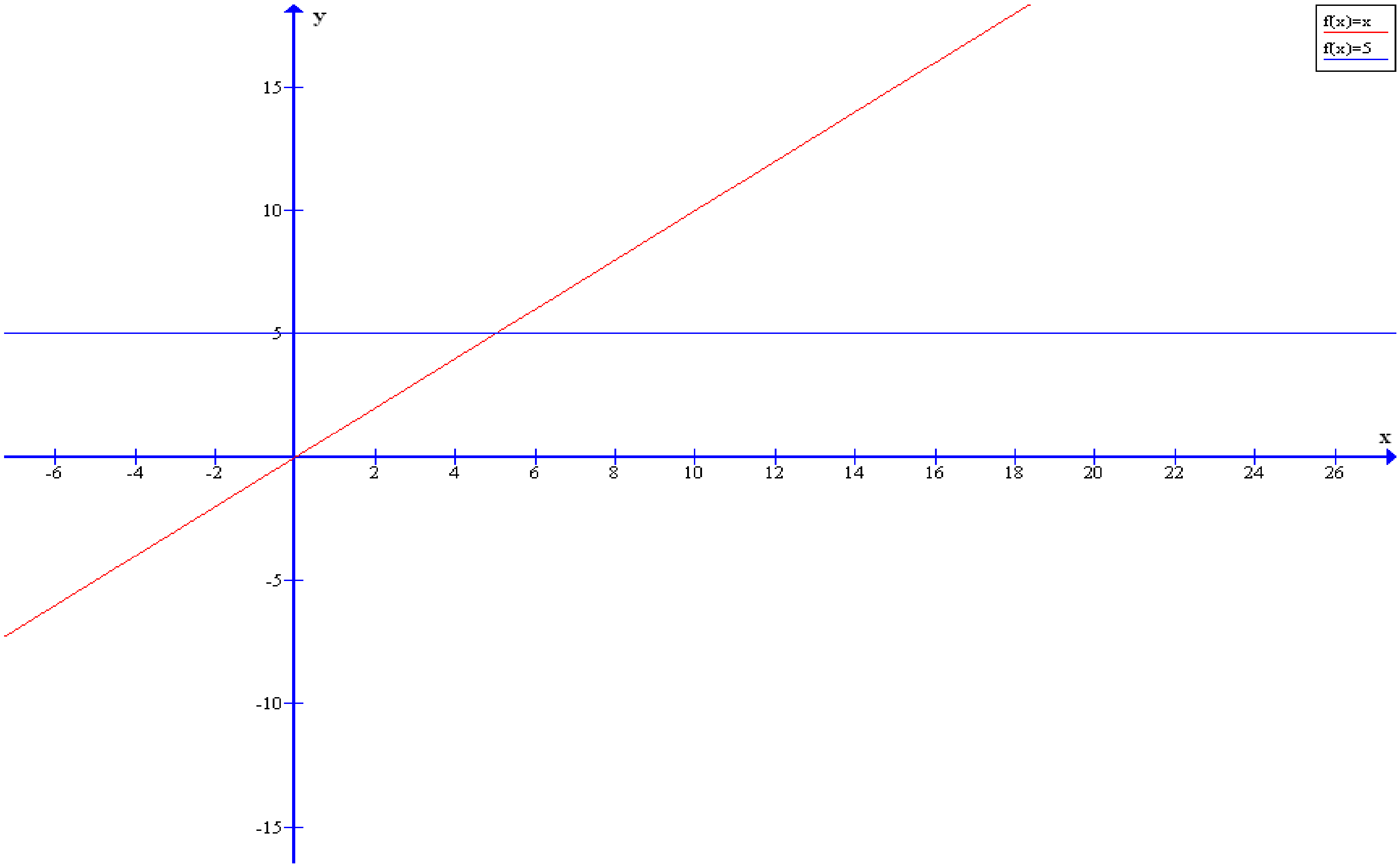


ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ-ΑΔΥΝΑΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ



ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ-ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παραγωγός που καλλιεργεί βαμβάκι και τεύτλα θέλει να πετύχει το μέγιστο δυνατό ακαθάριστο κέρδος. Στη διάθεση του έχει 50 στρέμματα έδαφος, 237 ώρες εργασίας το μήνα Σεπτέμβριο, 98 ώρες εργασίας το μήνα Δεκέμβριο και 45000 ευρώ αναλώσιμο κεφάλαιο. Οι απαιτήσεις ανά στρέμμα σε εργασία Δεκεμβρίου και κεφάλαιο για το βαμβάκι είναι 2,8 ώρες και 730 ευρώ αντίστοιχα ενώ οι απαιτήσεις ανά στρέμμα σε εργασία Σεπτεμβρίου και κεφάλαιο για τα τεύτλα είναι 7,9 ώρες και 1120ευρώ αντίστοιχα. Το ακαθάριστο κέρδος ανέρχεται σε 2950ευρώ/στρ και 2390 ευρώ/στρ. αντίστοιχα για το βαμβάκι και τα τεύτλα. Να βρεθεί το μέγιστο ακαθάριστο κέρδος της εκμετάλλευσης διαγραμματικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

ΛΥΣΗ

Ονομάζουμε x_1 τα στρέμματα του βαμβακιού και x_2 τα στρέμματα των τεύτλων που πρέπει να καλλιεργήσει η εκμετάλλευση ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό ακαθάριστο κέρδος. Το συνολικό ακαθάριστο κέρδος για το βαμβάκι τότε θα είναι $2950x_1$ και για τα τεύτλα $2390x_2$. Έτσι το συνολικό ακαθάριστο κέρδος της επιχείρησης θα είναι $Z=2950x_1+2390x_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Στο πρόβλημα αυτό θα έχουμε ένα σύστημα περιορισμών με τέσσερις ανισώσεις:

- Περιορισμός εδάφους: $x_1+x_2\leq 50$
- Περιορισμός εργασίας Σεπτεμβρίου: $0x_1+7{,}9x_2\leq 237$
- Περιορισμός εργασίας Δεκεμβρίου: $2{,}8x_1+0x_2\leq 98$
- Περιορισμός κεφαλαίου: $730x_1+1120x_2\leq 45000$

Αρχικά κάνουμε τη γραφική επίλυση του συστήματος των περιορισμών. Λόγω του γεγονότος ότι $x_1,x_2\geq 0$, θα εργασθούμε μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Επομένως κάνουμε τη γραφική παράσταση (σχήμα 2.1) των ευθειών:

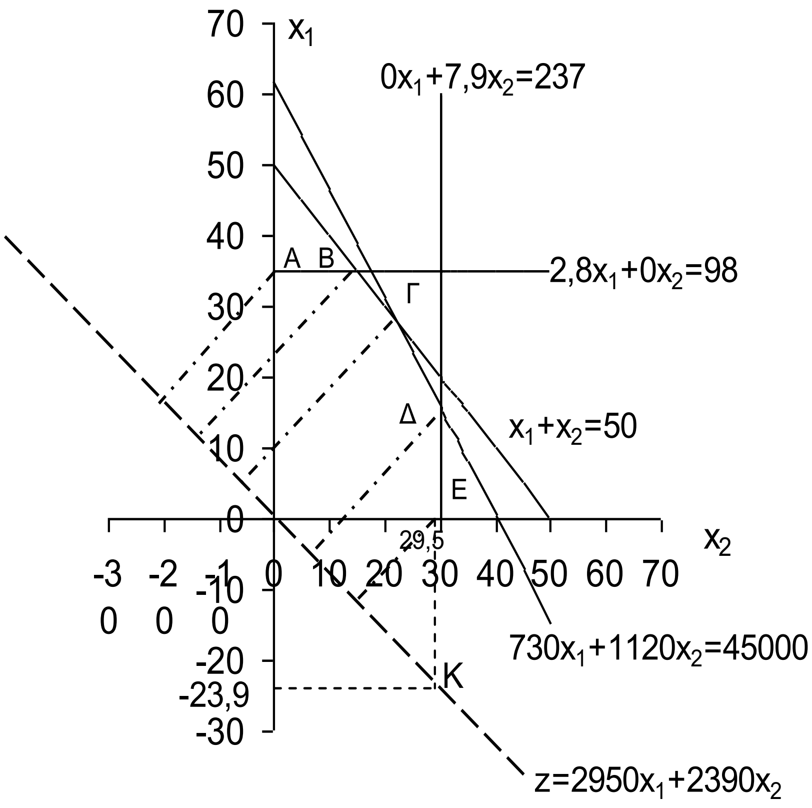
- $x_1+x_2=50$
- $0x_1+7{,}9x_2=237$
- $2{,}8x_1+0x_2=98$
- $730x_1+1120x_2=45000$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Το σύστημα των περιορισμών έχει λύσεις όλα τα σημεία τα εσωτερικά του εξαγώνου ΟΑΒΓΔΕ καθώς και αυτά που βρίσκονται πάνω στις πλευρές του. Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, ή υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί των x_1 και x_2 που να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Διαγραμματική επίλυση μεγίστου



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο είναι ο συνδυασμός αυτός των x_1και x_2 που να κάνει μέγιστη την τιμή της συνάρτησης $Z=2950x_1+2390x_2$.Ο άριστος αυτός συνδυασμός, σύμφωνα με τον Γραμμικό Προγραμματισμό είναι μία από τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε, του πολύγωνου ΟΑΒΓΔΕ. Άρα θα πρέπει να βρούμε την κλίση της ευθείας $Z=2950x_1+2390x_2$. Για το λόγο αυτό έχουμε: $2950x_1=Z-2390x_2$ και συνεπώς η κλίση είναι- 29.5/23.9

Συνεπώς το σημείο Κ θα έχει συντεταγμένες (29,5, -23,9) και μια από τις παράλληλες ευθείες $Z=2950x_1+2390x_2$ είναι η ευθεία ΟΚ. Η κορυφή τώρα που απέχει περισσότερο από την ευθεία ΟΚ και που δίνει τον άριστο συνδυασμό των x_1και x_2 είναι η Β. Οι συντεταγμένες (x_1,x_2) αυτής δίνουν τον συνδυασμό εκείνο που μεγιστοποιεί την οικονομική συνάρτηση. Για την εύρεση των συντεταγμένων της Β λύνουμε το σύστημα των ευθειών εκείνων που η τομή τους είναι το σημείο Β. Όπως φαίνεται και στο σχήμα οι ευθείες αυτές είναι οι: $x_1+x_2=50$ και $2{,}8x_1+0x_2=98$Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε $x_1=35$ και $x_2=15$. Επομένως το μέγιστο της οικονομικής συνάρτησης είναι : $Z=2950x_1+2390x_2=(2950*35)+(2390*15)=139100$.

Έτσι, η συγκεκριμένη εκμετάλλευση θα πετύχει το μέγιστο δυνατό ακαθάριστο κέρδος των 139100ευρώ αν καλλιεργεί 35 στρέμματα βαμβάκι και 15 στρέμματα τεύτλα.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ Ι

	Χρόνος επεξεργασίας κάθε προϊόντος στις διάφορες μηχανές				Διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής (min)
	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3	Προϊόν 4	
Μηχανή 1	4	2	3	1	480
Μηχανή 2	2	3	1	3	360
Μηχανή 3	3	0	1	0	240
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	6	4	3	5	

Παράδειγμα 1: Προγραμματισμός παραγωγής (Production Management)

Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος:

$$\text{maximize Profit} = \max z = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \qquad \text{Μεγιστοποίηση κέρδους}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 480 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 360 \\ 3x_1 & + & & + & x_3 & & & \leq & 240 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Περιορισμοί διαθεσιμότητας του} \\ \text{ημερήσιου χρόνου των μηχανών} \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad \text{Περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΙΙ

Θρεπτικά Συστατικά	Περιεκτικότητα (%) των πρώτων υλών σε θρεπτικά συστατικά				Επιθυμητή περιεκτικότητα (%)
	Κριθάρι	Βρώμη	Σουσάμι	Καλαμποκάλευρο	
Πρωτεΐνες	15	12	40	50	τουλάχιστον 25
Λιπαρά	4	8	15	5	το πολύ 10
Κόστος πρώτων υλών (€ ανά τόνο)	800	950	1400	1200	

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα της δίαιτας (Diet problem)

Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{minimize Cost} = \min C = 800x_1 + 950x_2 + 1{,}400x_3 + 1{,}200x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
15x_1 & + & 12x_2 & + & 40x_3 & + & 50x_4 & \geq & 25 \\
4x_1 & + & 8x_2 & + & 15x_3 & + & 5x_4 & \leq & 10
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ

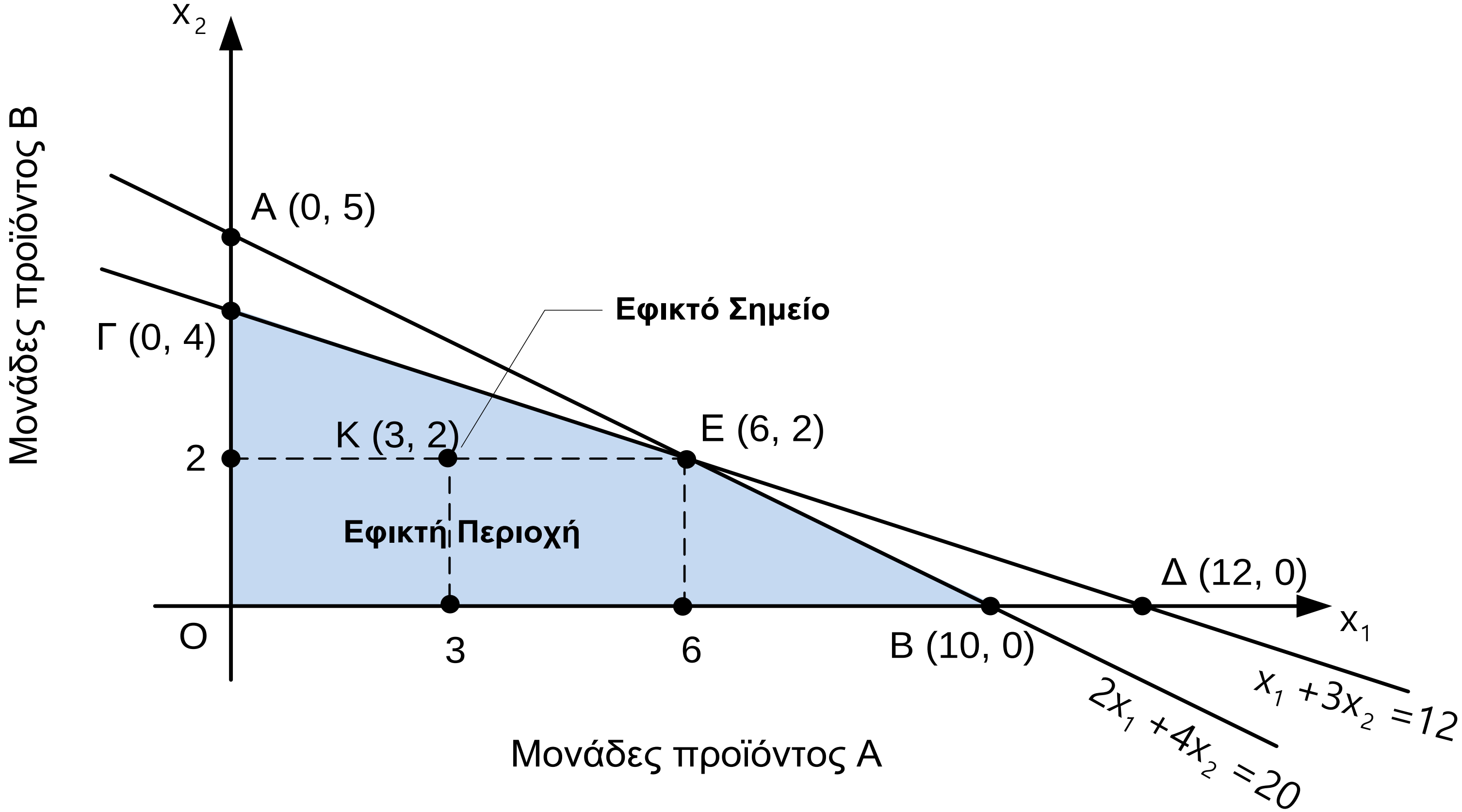
Μία βιομηχανία παράγει τρία προϊόντα $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ καθένα από τα οποία απαιτεί τρεις πρώτες ύλες $Υ_1$, $Υ_2$, $Υ_3$ και επεξεργασία σε δύο στάδια $Σ_1$ και $Σ_2$. Οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών σε κατάλληλες μονάδες καθώς και ο απαιτούμενος αριθμός ωρών σε κάθε στάδιο επεξεργασίας για την παραγωγή μιάς μονάδας προϊόντος δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:
Στην τελευταία γραμμή του πίνακα δίνεται η διαθέσιμη ποσότητα από κάθε πρώτη ύλη καθώς και ο διαθέσιμος αριθμός ωρών σε κάθε στάδιο επεξεργασίας για μία ημέρα. Στην τελευταία στήλη δίνεται το κέρδος σε δραχμές ανά μονάδα προϊόντος. Η βιομηχανία θέλει να προγραμματίσει την ημερήσια παραγωγή της έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος της. Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

	$Υ_1$	$Υ_2$	$Υ_3$	$Σ_1$	$Σ_2$	Κ
$Π_1$	3	2	1	12	7	50
$Π_2$	2	3	5	3	15	70
$Π_3$	1	4	0	10	10	60
Δ	200	200	150	500	600	

ΑΣΚΗΣΗ 2

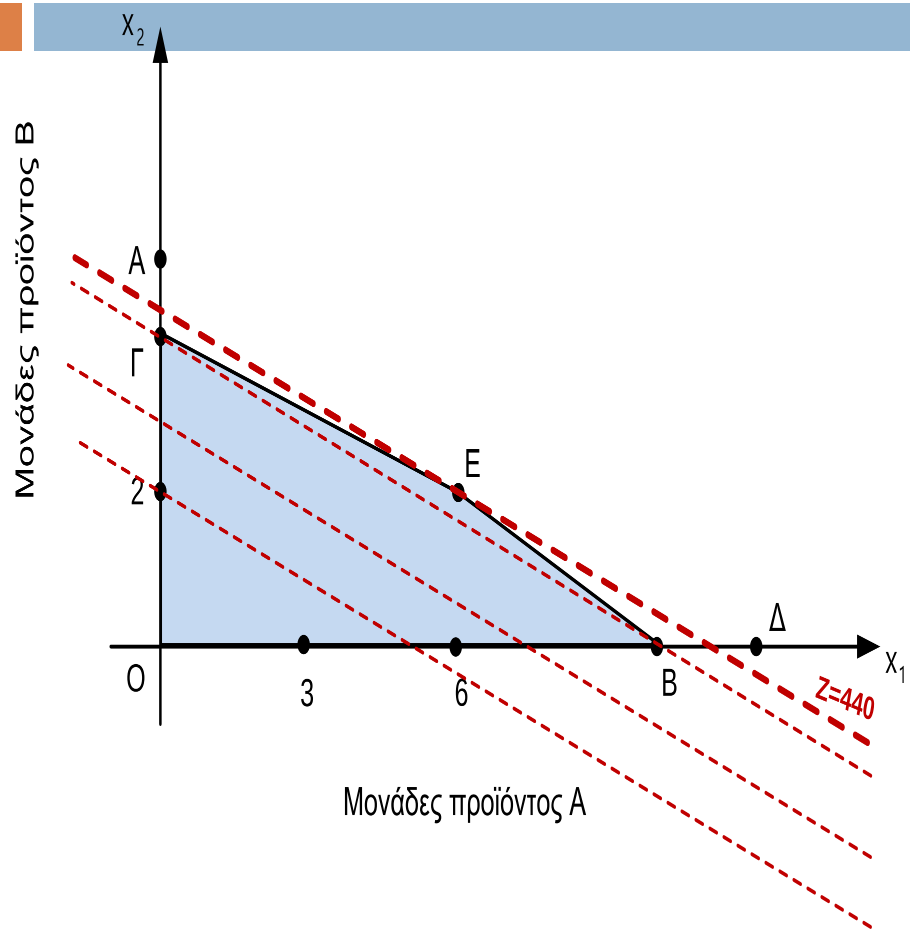
Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος	
Μεγιστοποίησε την:	$z = 40x_1 + 100x_2$
Υπό τους περιορισμούς:	$2x_1 + 4x_2 \leq 20$ $x_1 + 3x_2 \leq 12$
	$x_1, x_2 \geq 0$

ΛΥΣΗ

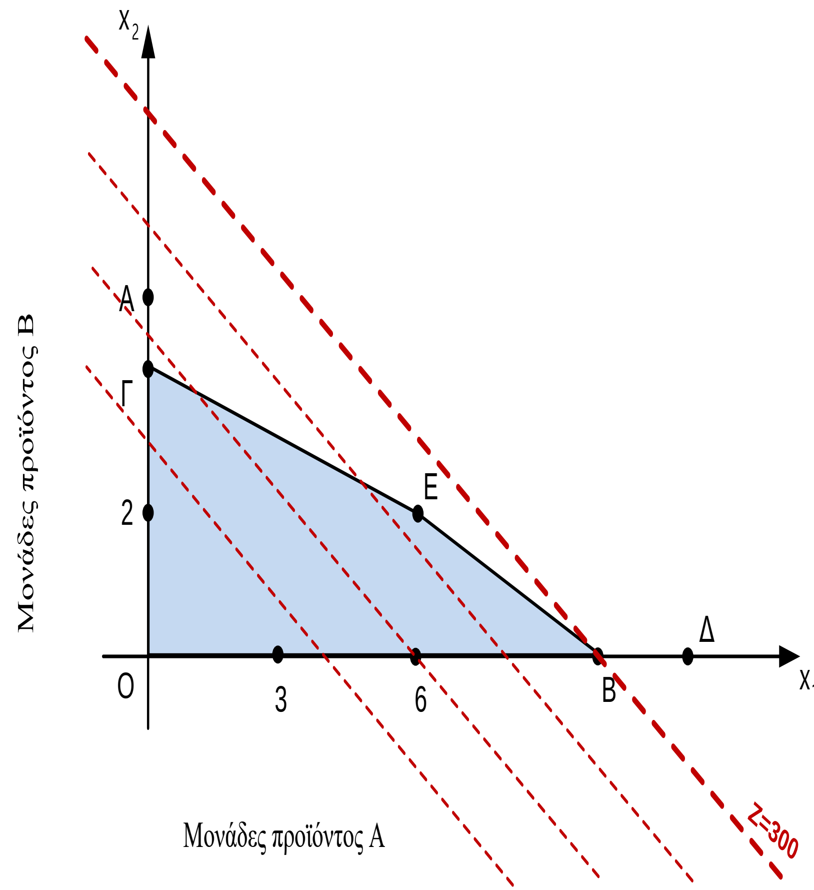


x2
Μονάδες προϊόντος Β
Α (0, 5)
Γ (0, 4)
Εφικτό Σημείο
Κ (3, 2)
Ε (6, 2)
2
Εφικτή Περιοχή
Δ (12, 0)
x1
O
3
6
Β (10, 0)
x1 +3x2 =12
2x1 +4x2 =20
Μονάδες προϊόντος Α

ΛΥΣΗ

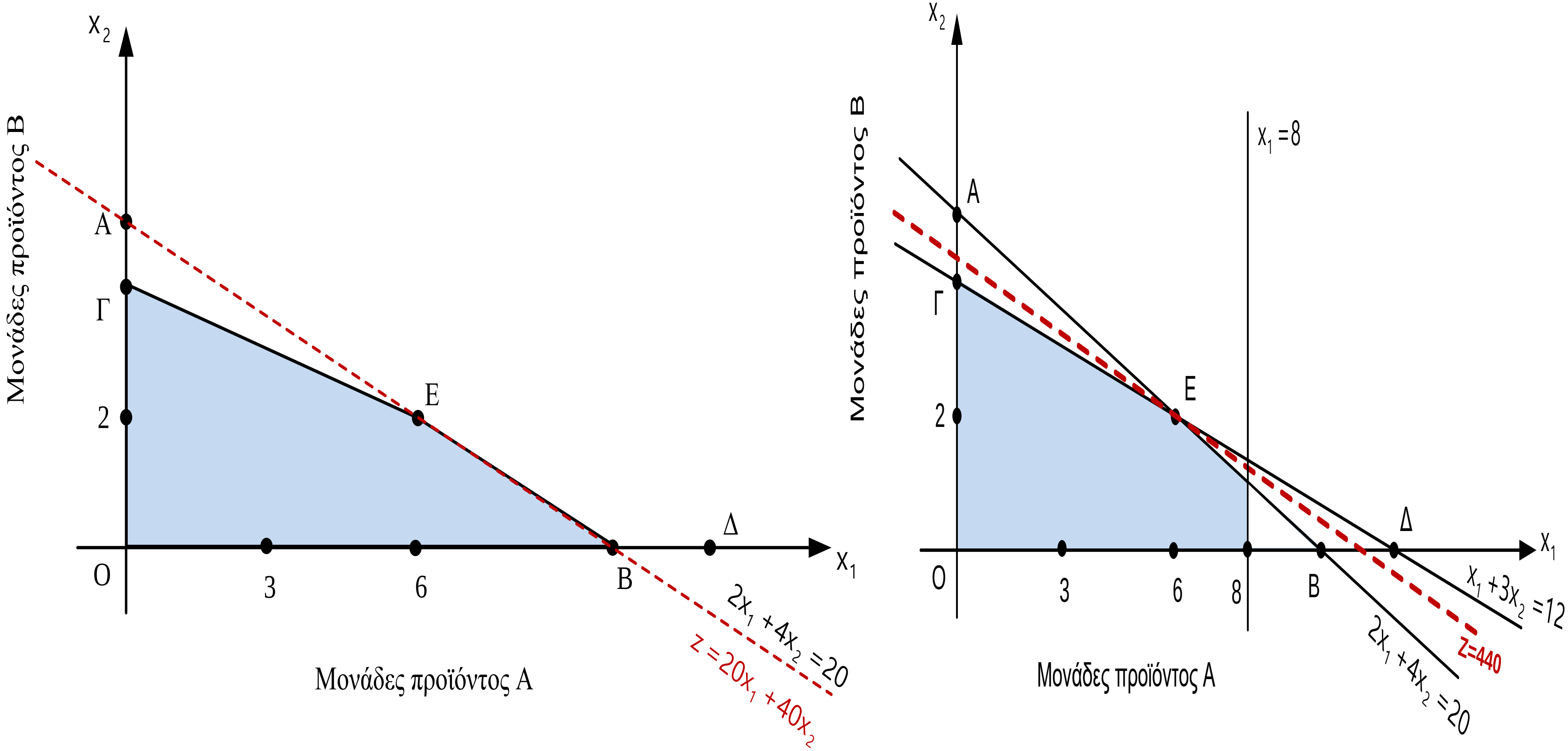


x2
Μονάδες προϊόντος Β
A
Γ
2
E
Δ
O
3
6
B
x1
Z=440
Μονάδες προϊόντος Α



x2
Μονάδες προϊόντος Β
A
Γ
2
E
Δ
O
3
6
B
x1
Z=300
Μονάδες προϊόντος Α

Ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών



Άσκηση για το σπίτι 1

Η βιοτεχνία έτοιμου φαγητού Pizza Italia προμηθεύει την αγορά με δύο ειδών πίτσες (απλή και σπέσιαλ). Το περιθώριο κέρδους για κάθε πίτσα ανέρχεται σε 3 και 4.5 ευρώ αντίστοιχα. Για την παραγωγή κάθε τύπου πίτσας χρησιμοποιεί ζύμη και ένα μείγμα υλικών ως εξής:

Μια απλή πίτσα χρειάζεται 500 gr ζύμης και 125 gr υλικών,

Μια σπέσιαλ πίτσα 500gr ζύμης και 250 gr μείγματος υλικών.

Η βιοτεχνία έχει στην διάθεσή της κάθε ημέρα 75 kgr ζύμης και 25 kgr μείγματος υλικών. Η βιοτεχνία έχει εξασφαλίσει παραγγελίες ημερησίως για 50 απλές και 25 σπέσιαλ πίτσες. Γνωρίζει όμως ότι δεν υπάρχει περιορισμός και ότι θα πωληθούν όλα τα τεμάχια που θα παρασκευαστούν. Μπορείτε να σχεδιάσετε ενα σχέδιο παραγωγής που θα εξασφαλίζει μέγιστα κέρδη στην βιοτεχνία Pizza Italia;

Άσκηση για το σπίτι 2

Ο Γιάννης έχει στην κατοχή του μια μηχανή και ένα μικρό αμάξι. Με την μηχανή του διανύει κατά μέσο όρο 45 km χρησιμοποιώντας ένα lt βενζίνης 93 οκτανίων με κόστος 1.35 ευρώ το lt. Με το αμάξι διανύει 26 km με ένα lt βενζίνης 96 οκτανίων με κόστος 1.17 ευρώ. Επιπλέον για κάθε 5000 Km που διανύονται η μηχανή χρειάζεται συντήρηση που απαιτεί χρόνο 15 ωρών ενώ το αμάξι αντίστοιχα συντήρηση 10 ωρών. Ο Γιάννης κάνει μόνος του την συντήρηση σε μηχανή και αμάξι αλλά δεν επιθυμεί να αφιερώνει περισσότερες από 100 ώρες τον χρόνο. Ο Γιάννης επίσης προβλέπει ότι τον επόμενο χρόνο θα διανύσει 45000 Km από τα οποία τα 5000 επιθυμεί να τα κάνει με την μηχανή. Πόσα Km πρέπει να διανύσει ο Γιάννης με την μηχανή και πόσα με το αμάξι του έτσι ώστε το κόστος σε καύσιμα να είναι το ελάχιστον δυνατόν;

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ?

- Κεφάλαιο 2^{o} Κουνετάς-Χατζησταμούλου
- Κεφάλαιο 1^{o} Τσαντάς
- Κεφάλαια 2^{O} -3^{O} -4^{O} Κολέτσος .
- Σημειώσεις από το e-class.
- Πρώτο σετ ασκήσεων για γραφική επίλυση.
- Σημειώσεις Μαθήματος κεφάλαιο Πρώτο!