

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ 1^ο ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΑΡΙΝΟ
ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-2021

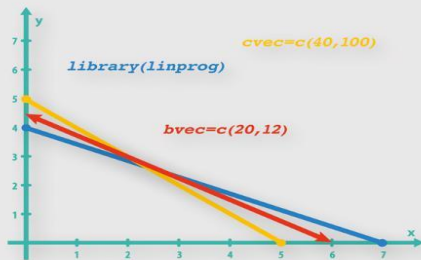
ΣΥΓΡΑΜΜΑΤΑ

BUSINESS
MANAGEMENT

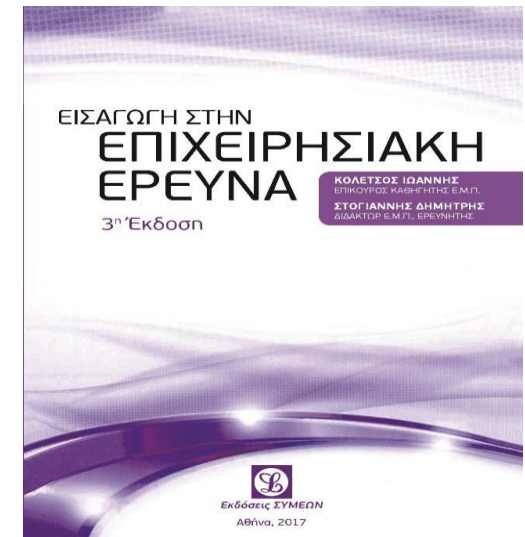
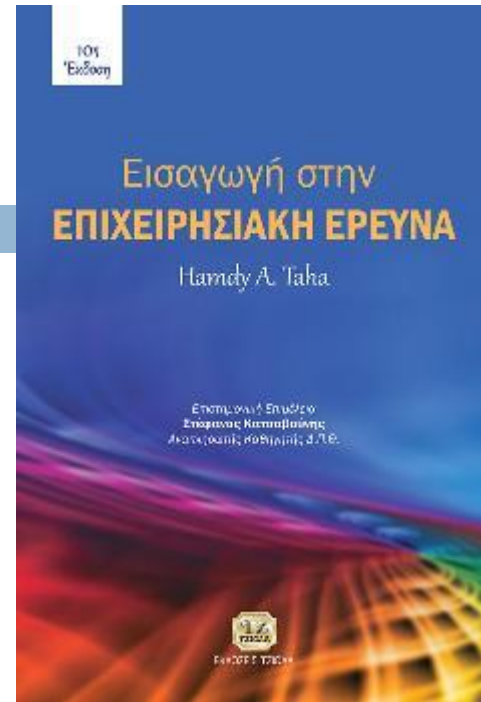
Κωνσταντίνος Κουνετάς
Νικόλαος Χατζησταμούδης

Εφαρμοσμένη
επιχειρησιακή έρευνα
και γραμμικός προγραμματισμός

Λύσεις προβλημάτων με το πρόγραμμα R



ΚΡΙΤΙΚΗ



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ- OPERATIONAL RESEARCH

□ Τι είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα;

Επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την αριστοποίηση τους και τη λήψη αποφάσεων.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ Ι

Αναπτύχθηκε κυρίως στον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο στην Αγγλία
Ο όρος «επιχειρησιακή» προέρχεται από τις πολεμικές επιχειρήσεις.

Συμμετείχαν διαφορετικές ομάδες επιστημόνων από διαφορετικούς κλάδους (φυσικοί, μαθηματικοί, μηχανικοί)
Τέσσερις από αυτούς βραβεύθηκαν με βραβείο Nobel για τις μετέπειτα εργασίες τους!

- **Κύριες εφαρμογές:**
- Αεράμυνα: Επιχειρησιακή λειτουργία των ραντάρ
- Ανθυποβρυχιακός πόλεμος
- Σχεδιασμός περιπολιών αεροσκαφών
- Σχεδιασμός όπλων (βόμβες βυθού)

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ II

- Μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στις ΗΠΑ.
- Πρώτες εφαρμογές σε βιομηχανία και διοίκηση τη δεκαετία του 1950
- Μάθημα στα πανεπιστήμια πριν από το 1960
- Τις δεκαετίες του 1950 και 1960 αναπτύχθηκαν οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα.
- Ραγδαία ανάπτυξη με την πρόοδο των Η/Υ (ανάπτυξη ειδικών προγραμμάτων)

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΙΙΙ

- Η έκρηξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, το Σεπτέμβριο του 1939, συντάραξε την ανθρωπότητα. Για την τελική έκβαση του πολέμου επιστρατεύθηκαν όλες οι διαθέσιμες δυνάμεις της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων και επιστημόνων, όπως μαθηματικοί, φυσικοί, στατιστικοί, βιολόγοι, ψυχίατροι κ.α.
- Στο Ηνωμένο Βασίλειο επιστήμονες συμπεριλαμβανομένων των Patrick Blackett, Cecil Gordon, C. H. Waddington, Owen Wansbrough-Jones και Frank Yates.
- Στις Ηνωμένες Πολιτείες με τον George Dantzig έψαχναν τρόπους έτσι ώστε να λαμβάνουν καλύτερες αποφάσεις σε περιοχές όπως τα προγράμματα διοικητικής μέριμνας και τα προγράμματα εκπαίδευσης.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ IV

- Το 1939 ιδρύεται το Stanmore Research Section (SRS) και το 1941, το Operational Research Section της RAF (Royal Air Force), των οποίων οι αποφάσεις αποδείχτηκαν ιδιαίτερης σημασίας για την επιτυχημένη αναχαίτιση των Γερμανών στη μάχη της Βρετανίας.
- Ο M.S. Blackett, το 1942, συνέταξε ένα σχέδιο για τη δημιουργία του U.S. Navy Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG). Η αύξηση του μεγέθους των νηοπομπών καθόρισε τη νίκη στη μάχη του Ατλαντικού. Τον Οκτώβριο του 1942, η 1η ομάδα Επιχειρησιακών Ερευνητών από τις ΗΠΑ φτάνει στη Βρετανία για να συνεργαστεί με την 8η Μονάδα Βομβαρδιστικών. Στόχος η βελτιστοποίηση της ακρίβειας πλήξης στόχων

ΣΤΑΘΜΟΙ

- 1943: Νευρωνικά δίκτυα, W.S. McCulloch και W.H. Pitts.
- 1944: Εκθετική Εξομάλυνση, R.G. Brown.
- 1944: Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά, J v. Neumann και O. Morgenstern.
- 1947: Αλγόριθμος Simplex, Dantzig.
- 1951-1952: Ανάπτυξη της Δυϊκής Θεωρίας.
- 1972: Ο αλγόριθμος Simplex δεν είναι πολυωνυμικός, Klee-Minty: Εκθετική συμπεριφορά.
- 1982: Υπολογισμός Μέσης Πολυπλοκότητας Αλγορίθμου Simplex, Borgwardt, H.K.
- 1984: Ανακάλυψη πολυωνυμικού αλγορίθμου Εσωτερικών Σημείων, Karmarkar.
- 1991: Ανακάλυψη Αλγορίθμων Εξωτερικών Σημείων τύπου Simplex, Paparrizos.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ-ΤΟΜΕΙΣ



ΣΤΑΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ I

1. Καθορισμός του προβλήματος
2. (Ορισμός του συστήματος, καθορισμός στόχων)
3. Διατύπωση του μοντέλου
4. Καθορισμός μεταβλητών απόφασης (=άγνωστοι),
5. Εύρεση δεδομένων για καθορισμός παραμέτρων (=γνωστοί), διατύπωση μαθηματικών σχέσεων
6. Επίλυση του μοντέλου
7. Αλγόριθμος επίλυσης
8. Έλεγχος αποτελεσμάτων
9. Ανάλυση ευαισθησίας, αβεβαιότητες
10. Υλοποίηση της τελικής λύσης

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Ο “Watson-Watt”, ο οποίος μαζί με τον “A.P. Rowe”, φαίνεται ότι πρότεινε το όνομα “Operational Research” και ο οποίος ήταν ένας από τους πρωτεργάτες της εισαγωγής και ανάπτυξης του θέματος στη Βρετανική αεροπορία, έδωσε τον εξής ορισμό:

“Η Επιχειρησιακή Έρευνα αποσκοπεί στο να ερευνήσει ποσοτικά εάν ένας οργανισμός παίρνει από τη λειτουργία του εξοπλισμού του τη βέλτιστη δυνατή συνεισφορά σε σχέση με τον ολικό αντικειμενικό σκοπό του, ποιες αλλαγές σε εξοπλισμό και μεθόδους απαιτούνται για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων με το μικρότερο δυνατό κόστος σε προσπάθεια και χρόνο και τέλος σε ποιο βαθμό μεταβολές στους επιμέρους αντικειμενικούς σκοπούς (τακτικοί αντικειμενικοί σκοποί) θα συνεισέφεραν στην πιο οικονομική και έγκαιρη εκτέλεση του ολικού στρατηγικού αντικειμενικού σκοπού”.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

- Από την Εταιρεία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας (Operational Research Society) έχει προταθεί ο παρακάτω ορισμός:
- **“Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια στη βιομηχανία, τις επιχειρήσεις, τις Κυβερνητικές Υπηρεσίες και την Άμυνα.**
- **Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.**
- **Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειες της επιστημονικά (κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο)”.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 3

- Ο ορισμός που έχει προταθεί από τους Ackoff και Sasienni επισημαίνει ιδιαίτερα ορισμένα χαρακτηριστικά της επιστημονικής φύσεως της Επιχειρησιακής Έρευνας:
 - ***“Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι: η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων από μικτές ομάδες σε προβλήματα που αφορούν τον έλεγχο οργανωμένων συστημάτων (αποτελούμενων από ανθρώπους και μηχανές) κατά τρόπο ώστε να παρέχουν λύσεις που εξυπηρετούν κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τους σκοπούς του οργανισμού ως συνόλου”.***
 - Ackoff R.L., Sasienni M.W., Fundamentals of Operations Research, John Wiley, 1968.

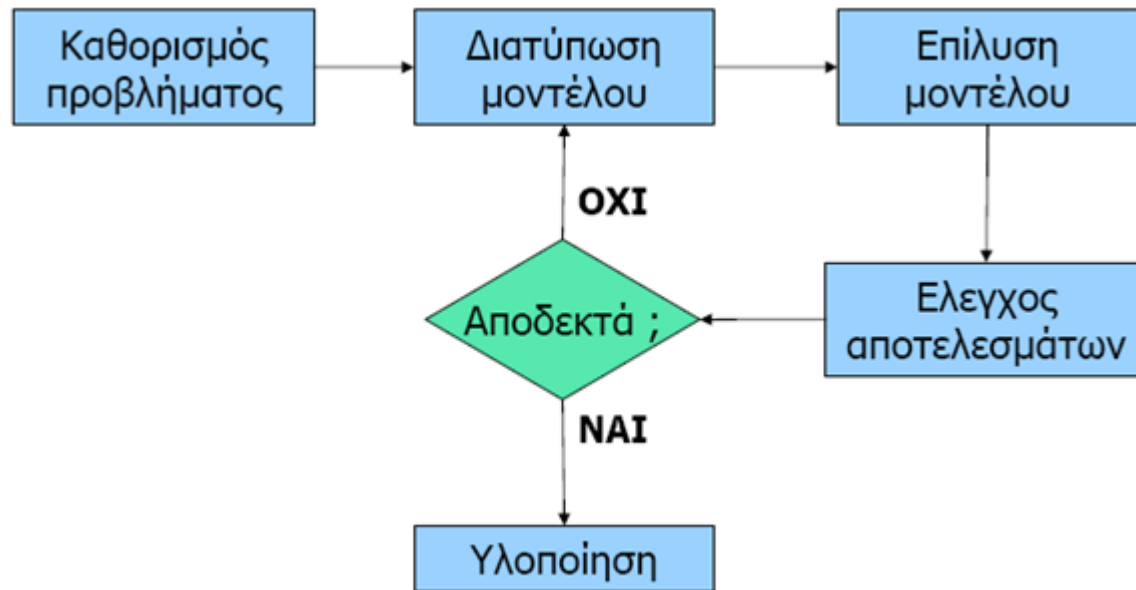
ΟΡΙΣΜΟΣ 4

- Ο αρκετά ικανοποιητικός ορισμός της Ε.Ε.Ε.Ε:
- ***“Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των αποφάσεων της Διοικήσεως (με την επιστημονική ανάλυση των δεδομένων και τη δημιουργία μαθηματικών προτύπων)”*** .

ΟΡΙΣΜΟΣ 5

- Τέλος, σύμφωνα με τον συνοπτικό ορισμό που έδωσε το 1978 Daellenbachand George επιχειρησιακή έρευνα είναι:
- ***“η συστηματική εφαρμογή ποσοτικών μεθόδων, τεχνικών και εργαλείων στην ανάλυση προβλημάτων που εμπεριέχουν την λειτουργία συστημάτων”.***

ΣΤΑΔΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ II



Βασικά στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας

Η διαμόρφωση του μοντέλου είναι ένα δύσκολο έργο που, αν αποτύχει, οδηγεί στη λήψη λαθεμένων αποφάσεων. Ο αναλυτής ενός συστήματος διατρέχει τον κίνδυνο να εντοπίσει τη σωστή λύση σε λάθος πρόβλημα (το προτεινόμενο μοντέλο δεν αποτελεί σωστή αναπαράσταση του προβλήματος, ενώ η μέθοδος βελτιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης είναι σωστή). Στην αντίθετη περίπτωση κινδυνεύει να δώσει λάθος λύση σε σωστό πρόβλημα. Εκτός των άλλων, ο αναλυτής πρέπει να φροντίσει για την ελάττωση των διαστάσεων του προβλήματος, δηλαδή τον περιορισμό των μεταβλητών σε εκείνες που είναι πραγματικά σημαντικές για το πρόβλημα, δεδομένου ότι από αυτό εξαρτάται το κόστος επίλυσής του.

Επίλυση του Μοντέλου

□ Η επίλυση του μαθηματικού μοντέλου χρησιμοποιεί διάφορες τεχνικές για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Με τη λύση του προβλήματος, εννοούμε τον προσδιορισμό της στρατηγικής που θα ακολουθήσουμε.

Οι διάφορες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται εδώ στηρίζονται σε Ανώτερα Μαθηματικά (διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, αριθμητική ανάλυση, γραμμική άλγεβρα, κλασικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, λογισμός των μεταβολών), στη θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική (θεωρία πιθανοτήτων, ανελίξεις Markov, περιγραφική στατιστική, στατιστική συμπερασματολογία, εκτίμηση, ανάλυση παλινδρόμησης, αλληλοσυσχέτιση, ανάλυση μεταβλητότητας, παραγοντική ανάλυση, χρονοσειρές) ή σε Μεθόδους και Θεωρίες της επιχειρησιακής έρευνας. Οι τελευταίες είναι οι πιο εύκολες και συχνά χρησιμοποιούμενες, αφού είναι κατά κανόνα αριθμητικές, επαναληπτικές μέθοδοι και βασίζονται στη χρήση αλγορίθμων ή υπολογιστή. Για το λόγο αυτό θα ασχοληθούμε λίγο εκτενέστερα με αυτές.

Επίλυση του Μοντέλου

Η πιο χαρακτηριστική τεχνική της επιχειρησιακής έρευνας είναι ο γραμμικός προγραμματισμός (linear programming). Σχεδιάστηκε για μοντέλα με αυστηρά γραμμικούς περιορισμούς. Άλλες τεχνικές είναι ο ακέραιος προγραμματισμός (integer programming), στον οποίο οι μεταβλητές θεωρούνται ακέραιες, ο δυναμικός προγραμματισμός (dynamic programming) στον οποίο το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερα υπό - προβλήματα και ο μη γραμμικός προγραμματισμός (non-linear programming) στον οποίο οι συναρτήσεις των μοντέλων είναι μη γραμμικές. Επίσης, ο προγραμματισμός δικτύων (network programming), τα δένδρα αποφάσεων (decision trees), η διαχείριση αποθεμάτων (inventory control, EOQ), η θεωρία ουρών αναμονής (queueing theory, simulation) και η θεωρία παιγνίων (game theory) είναι αρκετά χρήσιμες μέθοδοι της επιχειρησιακής έρευνας. Πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραπάνω τεχνικές δεν είναι παρά μόνο μια μικρή λίστα από τα διαθέσιμα εργαλεία της επιχειρησιακής έρευνας.

Επίλυση του Μοντέλου

□ Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου ή θεωρίας της επιχειρησιακής έρευνας εξαρτάται από τον τύπο και την πολυπλοκότητα του μαθηματικού μοντέλου. Αν το μοντέλο ταιριάζει σε κάποιο από τα γνωστά μαθηματικά μοντέλα, όπως π.χ. αυτό του γραμμικού προγραμματισμού, τις περισσότερες φορές μπορούμε να βρούμε μια εφικτή λύση, με τη χρήση αλγορίθμων. Εναλλακτικά, αν οι μαθηματικές σχέσεις είναι τόσο περίπλοκες ώστε να μην επιτρέπουν την εύρεση μιας αναλυτικής λύσης, οι ομάδες της επιχειρησιακής έρευνας αναγκάζονται να απλοποιήσουν το μοντέλο και να χρησιμοποιήσουν ευρεστικές τεχνικές (heuristics) ή μεθόδους προσομοίωσης (simulation). Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα, ίσως χρειαστεί συνδυασμός των προαναφερθέντων μεθόδων.

Ανάλυση της Λύσης

□ Η λύση την οποία μας υπέδειξε το μοντέλο στο προηγούμενο στάδιο ισχύει για τις παραμέτρους του περιβάλλοντος (τιμές, δυναμικότητα, κ.λ.π) που ορίσαμε αρχικά όταν διατυπώναμε το μοντέλο. Ωστόσο, πριν υλοποιήσουμε τη στρατηγική που υποδεικνύει το μοντέλο, ενδιαφερόμαστε συχνά να γνωρίζουμε τι επίπτωση θα είχε στην άριστη στρατηγική μια τυχόν αλλαγή στο περιβάλλον. Αυτή η ανάλυση της λύσης ονομάζεται στη βιβλιογραφία **ανάλυση ευαισθησίας**. Είναι μία μέθοδος που προσδιορίζει την ευαισθησία της λύσης, όταν το μοντέλο υποβάλλεται σε μεταβολές των παραμέτρων του. Η ανάλυση ευαισθησίας χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή όταν οι παράμετροι του μοντέλου δεν μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι σημαντικό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης σε μια “γειτονιά” των παραμέτρων του μοντέλου. Το στάδιο αυτό είναι σημαντικό διότι παρέχει χρήσιμη πληροφόρηση και μπορεί να επηρεάσει ουσιαστικά στην επιλογή της στρατηγικής που θα ακολουθήσει.

Υλοποίηση της Λύσης

□ Έχοντας επιλέξει τη στρατηγική που θα ακολουθήσουμε πρέπει τώρα να την θέσουμε σε εφαρμογή. Το στάδιο αυτό είναι συχνά το δυσκολότερο. Η υλοποίηση και διατήρηση της λύσης ενός μοντέλου, περιλαμβάνει τη μετατροπή των αποτελεσμάτων σε λειτουργικές οδηγίες, παρουσιασμένες με κατανοητό τρόπο στα άτομα που θα διαχειριστούν το προτεινόμενο σύστημα, έτσι ώστε η βελτίωση που επιτεύχθηκε να υλοποιηθεί στο πραγματικό σύστημα και να διατηρηθεί στο μέλλον. Το βάρος αυτού του σταδίου επωμίζεται κυρίως η ομάδα της επιχειρησιακής έρευνας αφού είναι πιθανό να προκύψουν προβλήματα τα οποία δεν είχαν προβλεφθεί κατά τη διάρκεια της έρευνας.

ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΟΡ

1. Ο **αποφασίζων**
2. Ο στόχος της απόφασης (**κριτήριο απόφασης**)
3. Ένας ή περισσότεροι
4. Οι εναλλακτικές λύσεις (**μεταβλητές απόφασης**)
5. Η τιμή τους είναι το αποτέλεσμα της επίλυσης του προβλήματος
6. Διακριτές ή συνεχείς
7. Οι **παράμετροι** του προβλήματος
8. Η τιμή τους θεωρείται ως δεδομένο του προβλήματος
9. Αυστηρά καθορισμένες ή αβέβαιες

OR METHODS

- Μαθηματικός Προγραμματισμός
- Δένδρα αποφάσεων (Decision trees)
- Πολυκριτηριακή Ανάλυση (Multiple Criteria Decision Analysis)
- Ανάλυση δικτύων (Network flows, PERT, CPM)
- Διαχείριση αποθεμάτων (Inventory control, EOQ)
- Ανάλυση γραμμών αναμονής (Queuing theory, simulation)
- Θεωρία παιγνίων (Game theory)
- Προσομοίωση (simulation)
- Ευρεστικές τεχνικές (Heuristics)

LINEAR PROGRAMING METHODS

- Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)
- Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming)
- Μικτός Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός (Mixed Integer LP)
- Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός, Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός,
- Δυναμικός Προγραμματισμός . . .

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Αναζητά μεταξύ όλων των εναλλακτικών σχεδιασμών, εκείνον (‘πρόγραμμα’) ο οποίος θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα.
- Από μαθηματικής σκοπιάς, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο, το οποίο αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ I

□ **Product Mix Problem (Επιλογή συνδυασμού παραγωγής προϊόντων).**

Μια επιχείρηση εκμεταλλεύεται τους παραγωγικούς πόρους που έχει στη διάθεσή της για να παράγει διάφορα προϊόντα. Οι πόροι δεν είναι ανεξάντλητοι και η άριστη απόφαση εντοπίζει το πλήθος των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν από το κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.

□ **Diet Problem (Το πρόβλημα της δίαιτας-Stigler, 1945).**

Αναζητείται η βέλτιστη κατανομή τροφίμων ώστε να παράγεται ένα διαιτολόγιο το οποίο να πληροί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές με το ελάχιστο κόστος.

□ **Blending Problem (Το πρόβλημα μίξης υλικών).**

Έχει τις ρίζες του στη βιομηχανία διύλισης όπου είναι επιθυμητό να εντοπιστεί ένα άριστο σχέδιο μίξης διαφορετικών πρώτων υλών για την παραγωγή καυσίμων με συγκεκριμένες προδιαγραφές. Το ερώτημα αφορά την εύρεση της 'συνταγής' η οποία θα δώσει το ζητούμενο μίγμα με το ελάχιστο κόστος.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ II

- **Portfolio Selection (Επιλογή χαρτοφυλακίου).**

Αφορά την κατάρτιση ενός βέλτιστου σχεδίου επενδύσεων σε μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια, κτλ. Το σχέδιο πρέπει να οδηγεί σε μεγάλα κέρδη ικανοποιώντας περιορισμούς που στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου.

- **Transportation Problem (Το πρόβλημα της μεταφοράς, Hitchcock, 1941- Koopmans 1949).**

Αναζήτηση του οικονομικότερου τρόπου διακίνησης προϊόντων από διαφορετικές πηγές-προελεύσεις (παραγωγικές μονάδες, αποθήκες, κέντρα διανομής, κτλ.) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (σημεία πώλησης, αποθήκες, κτλ.)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Αφορά την μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης των αγνώστων (μεταβλητών). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι τιμές των αγνώστων (μεταβλητών) ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια γραμμική εξίσωση ή ανίσωση.
- Κάθε μεταβλητή είναι μη αρνητική ή δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ Π.Γ.Π

Η μαθηματική απεικόνιση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού δίνεται ως:

$$\max \text{ or } \min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + \dots =, \leq, \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + \dots =, \leq, \geq b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots =, \leq, \geq \dots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j \dots + a_{mn}x_n + \dots =, \leq, \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Κατηγορίες Π.Γ.Π

- Γραμμικός προγραμματισμός, όπου τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικές σχέσεις (Το παρόν μάθημα)
- Ακέραιος προγραμματισμός, όπου οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές ή αναπαριστούν αποφάσεις «λογικής» και όχι φυσικά μεγέθη.
- Μη γραμμικός προγραμματισμός, όπου κάποιες από τις συναρτήσεις του προβλήματος (αντικειμενική συνάρτηση, περιορισμοί) είναι μη-γραμμικές.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ Γ.Π (1)

- **Λύση** του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος $A\bar{x} \leq, =, \geq \bar{b}$, δηλαδή κάθε διάνυσμα x^* που ικανοποιεί το σύστημα αυτό (ή ο συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού).

Το υποσύνολο F του R^n που σχηματίζεται από τα σημεία –λύσεις $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται εφικτή περιοχή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ τα δε σημεία εφικτές λύσεις.

- **Δυνατή (ή εφικτή) λύση** του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα x^* που ικανοποιεί τους περιορισμούς $x \geq 0$. Μια λύση, που παραβιάζει τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς, ονομάζεται μη-εφικτή λύση και δεν είναι σημείο της εφικτής περιοχής του π.γ.π.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ Γ.Π (2)

- **Βέλτιστη δυνατή λύση (βέλτιστη λύση)** του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση αυτού, που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.
- **Βάση** του συστήματος (ή βάση) είναι ο πίνακας $m \times m$, που προκύπτει από τον πίνακα A του συστήματος, και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσεως, λέγονται **βασικές μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή. Οι υπόλοιπες $(n-m)$ μεταβλητές που αντιστοιχούν στις $(n-m)$ στήλες του πίνακα A που δεν περιλαμβάνονται στη βάση λέγονται **μη - βασικές μεταβλητές**.
- **Βασική εφικτή λύση** ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση A_i , είναι μια εφικτή λύση αυτού, που έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές, ως προς τη βάση αυτή, διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Π.Γ.Π (1)

- Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος
- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κυρτό κλειστό σύνολο.
- Κάθε βασική εφικτή λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Π.Γ.Π (2)

- Αν υπάρχει μια εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε υπάρχει και μια βασική εφικτή λύση αυτού.
- Αν υπάρχει μια βέλτιστη εφικτή λύση σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική εφικτή λύση.
- Αν υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη εφικτή λύση, που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις.

ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ Π.Γ.Π (1)

□ Προσθετικότητα

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι άμεσα αναλογική με το επίπεδο της δραστηριότητας. Όταν το επίπεδο της δραστηριότητας αυξάνει ή μειώνεται, η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που οφείλεται στην αλλαγή μίας μονάδας της δραστηριότητας παραμένει ίδια. Επίσης το ποσό των πόρων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δραστηριότητα είναι άμεσα ανάλογο με το επίπεδο της δραστηριότητας.

□ Αναλογικότητα

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το άθροισμα της συνεισφοράς κάθε μίας δραστηριότητας. Όμοια, το συνολικό ποσό των πόρων που χρησιμοποιείται από όλες τις δραστηριότητες είναι το άθροισμα του ποσού των πόρων που κάθε μία δραστηριότητα χρησιμοποιεί ανεξάρτητα.

ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ Π.Γ.Π (1)

□ Διαιρετότητα

Όλες οι δραστηριότητες είναι συνεχείς και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Δηλαδή ο Γ.Π. δεν είναι κατάλληλος για προβλήματα που οι μεταβλητές λήψης απόφασης είναι ακέραιοι.

□ Καθοριστικότητα

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού καταγράφονται και ως καθοριστικά υποδείγματα. Με άλλα λόγια δεν λαμβάνουν υπόψη ότι όλοι οι συντελεστές είναι προσεγγίσεις, όταν υπολογίζει μία συγκεκριμένη λύση. Γι' αυτό πρέπει να γίνεται ανάλυση ευαισθησίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένα εργοστάσιο παράγει δυο προϊόντα, τα προϊόντα 1 και 2. Η έρευνα αγοράς περιορίζει την παράγωγη του προϊόντος 1 στους 10 τόνους κάθε μήνα και του προϊόντος 2 στους 8 τόνους. Για την παράγωγη των προϊόντων χρησιμοποιούνται δυο πρώτες ύλες, οι A και B. Για την παραγωγή ενός τόνου προϊόντος 1 απαιτούνται 1 τόνος πρώτης ύλης A και 3 τόνοι πρώτης ύλης B, ενώ για την παραγωγή ενός τόνου προϊόντος 2 απαιτούνται 2 τόνοι πρώτης ύλης A και 1 τόνος πρώτης ύλης B. Οι μηνιαίες διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών A και B είναι αντίστοιχα 14 και 16 τόνοι. Η πώληση ενός τόνου προϊόντος 1 αφήνει καθαρό κέρδος 5 χιλιάδες ευρώ ενώ το καθαρό κέρδος για το προϊόν 2 είναι 4 χιλιάδες ευρώ κάθε μήνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Πρώτη υλη	Προϊόν 1, τόνοι	Προϊόν 2, τόνοι	Διαθέσιμο, τόνοι/μήνα
A	1	2	14
B	3	1	16
Κέρδος, χιλ. ευρώ	5	4	

□ Η μαθηματική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max(5x_1 + 4x_2)$$

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$3x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα, τα Π1, Π2 και Π3. Για την παραγωγή των προϊόντων απαιτείται επεξεργασία από τρεις μηχανές, τις Α, Β και Γ. Ο χρόνος επεξεργασίας των προϊόντων στις μηχανές αντίστοιχα δίνεται στον ακόλουθο πίνακα, μαζί με τις διαθέσιμες εβδομαδιαίες ώρες των μηχανών.

Μηχανές	Π1	Π2	Π3	Δυναμικότητα Μηχανών (h)
Α	9	3	5	500
Β	5	4	0	350
Γ	3	0	2	150

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Λόγω προηγούμενων συμβάσεων που έχουν υπογραφεί, η επιχείρηση πρέπει να παράγει τουλάχιστον 20 μονάδες του προϊόντος Π3 την εβδομάδα. Το ανά μονάδα κέρδος των προϊόντων είναι 50, 20 και 25€ αντίστοιχα. Ζητείται να βρεθεί η άριστη ποσότητα παραγωγής των προϊόντων ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο πρώτο (1) από το βιβλίο του Κουνετά-Χατζησταμούλου.
- Κεφάλαιο πρώτο (1.1) από το βιβλίο του Τσαντά-Βασιλείου.
- Κεφάλαιο πρώτο από το βιβλίο του Κολέτσου-Ταχα