ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ:
Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού και Ανάλυση Ευαισθησίας

Σύνοψη

*Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται με πολύ αναλυτικό τρόπο η μεθοδολογία Γραφικής Επίλυσης ένα πρόβλημα δύο μεταβλητών απόφασης. Αναλύονται διεξοδικά όλες οι δυνατές περιπτώσεις με την χρήση του προγράμματος **Graph** ενώ παρουσιάζεται στο απλό αυτό υπόδειγμα των δύο μεταβλητών η ανάλυση ευαισθησίας.*

2.1 Εισαγωγή

Το προηγούμενο κεφάλαιο αποτέλεσε μια εισαγωγή στις απαρχές του κλάδου της Επιχειρησιακής Έρευνας, των μεθόδων που χρησιμοποιεί προκειμένου να μετατρέψει σε μαθηματικό υπόδειγμα ένα πρόβλημα που αντιστοιχεί σε πραγματικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας παραμέτρους καθώς και στον τρόπο εξέλιξης του κλάδου αυτού μέσω της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε την Γραφική Επίλυση ως μια μέθοδο εύρεσης του σημείου που ικανοποιεί ταυτόχρονα τους περιορισμούς και βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Από την ανάλυση αυτή θα προκύψουν οι Σκιώδεις Τιμές που αναφέρονται στην μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν ο κάθε περιορισμός μεταβληθεί οριακά, δηλαδή κατά μία μονάδα. Ο υπολογισμός των Σκιωδών Τιμών μπορεί να προκύψει μόνο μέσω της μεθοδολογίας του Γραμμικού Προγραμματισμού και η ερμηνεία τους είναι σημαίνουσας σημασίας τόσο για την Οικονομική όσο και την Διοικητική Επιστήμη. Επιχειρείται επίσης μια εισαγωγή στην ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών του Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού (ΠΓΠ) προκειμένου να εξετάσουμε την αξιοπιστία της βέλτιστης λύσης.

Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού δεν μας δίνει την δυνατότητα γραφικής επίλυσης (graphical solution) κυρίως λόγω του ότι δεν μπορούμε να έχουμε την ανάλογη γραφική απεικόνιση σε περισσότερες από τρεις διαστάσεις. Ωστόσο, τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν δύο (ή και τρείς[2]) μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν με γραφικό τρόπο, τον οποίο συζητάμε αναλυτικά ώστε να διευκολύνουμε τον αναγνώστη στην κατανόηση θεμελιωδών εννοιών.

Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις). Η γραφική επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτει την αναλυτική και προσεκτική σχεδίαση του συνόλου των περιορισμών του ΠΓΠ ώστε να προκύψει η οριοθέτηση του συνόλου των δυνατών λύσεων και έπειτα να καθοριστεί η αριστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο αναλυτικά, για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

1. σχεδιάζουμε ένα σύστημα αξόνων για τις μεταβλητές απόφασης[3] (συνήθως x και y).
2. στη συνέχεια, σχεδιάζουμε μια-μια κάθε ανισότητα του μοντέλου (*δηλ. σχεδιάζουμε την αντίστοιχη ισότητα και αποκλείουμε το ημι-επίπεδο που δεν ικανοποιεί την ανισότητα*). Πιο συγκεκριμένα, ο σχεδιασμός της κάθε ανίσωσης διαιρεί το επίπεδο σε δύο *ημι-επίπεδα* εκείνο που την ικανοποιεί και εκείνο που δεν την ικανοποιεί. Για να διευκολυνθούμε, μπορούμε να καθορίσουμε το *ημι-επιπέδο* που παριστάνει κάθε περιορισμός παριστάνοντας τον με βελάκια/μικρές γραμμές που το καταδεικνύουν.
3. η περιοχή που απομένει από τον σχεδιασμό όλων των ισοτήτων (ανισοτήτων στην πραγματικότητα) περιέχει το σύνολο των **εφικτών** λύσεων, δηλαδή όσων δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς ή τις συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, το εφικτό χωρίο αποτελείται από την ταυτόχρονη ικανοποίηση των παραπάνω ανισοτήτων και επιθυμούμε να είναι φραγμένο και δη στην περίπτωση των δύο μεταβλητών ένα κυρτό πολύγωνο (*προφανώς η περίπτωση του μη-φραγμένου δεν αποκλείεται*).
4. σχεδιάζουμε την αντικειμενική συνάρτηση (Ζ, Π, Υ κ.α.) και βρίσκουμε ποια από τις εφικτές λύσεις

2 Για λόγους απλότητας, η επίλυση ΠΓΠ με τρεις μεταβλητές απόφασης μέσω της Γραφικής Επίλυσης, ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος κεφαλαίου και δεν παρουσιάζεται.

3 Σημειώστε πως η απαίτηση μη-αρνητικότητας των μεταβλητών απόφασης περιορίζει τον εφικτό χώρο του προβλήματος στο πρώτο τεταρτημόριο στις δύο διαστάσεις ή στο ‘μη-αρνητικό’ σύνολο λύσεων στη γενική περίπτωση.

την μεγιστοποιεί ή την ελαχιστοποιεί (ανάλογα με τον κανόνα συμπεριφοράς του προβλήματος). Για διάφορες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης την αναπαριστούμε γραφικά στο γράφημα των περιορισμών. Παρατηρούμε το πώς η αντικειμενική συνάρτηση συμπεριφέρεται με την αύξηση της τιμής του Z. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ανάλογα με το πρόβλημα (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση), ενδιαφερόμαστε για το μέγιστο ή το ελάχιστο που μπορεί να επιτύχει η αντικειμενική συνάρτηση.
5. οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών του ΠΓΠ που επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε.

Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης:

1. μέσω της προσέγγισης της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Συνεπώς, εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση (Z) ενώ
2. ένας λιγότερο προσφιλής, είναι η προσέγγιση της χάραξης των καμπύλων ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης κατά τον οποίο βρίσκουμε, εν τέλει, το σημείο όπου η ισοκερδής εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν αυτή την εγκαταλείψει.

2.2. Βασικοί ορισμοί

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού δίνουμε τους παρακάτω βοηθητικούς ορισμούς:

- **περιοριστική ευθεία** είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιον περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- **κορυφή ή ακραίο σημείο** είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.
- εφικτή περιοχή είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.
- **εφικτή λύση** (ακραίου σημείου) είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.
- **γειτονικές εφικτές λύσεις** (ακραίου σημείου) είναι αυτές που συνδέονται με μια ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής.
- **βασική λύση** (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.
- **βασική εφικτή λύσ**η είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- **βέλτιστη (ή βέλτιστη) λύση** είναι η βασική εφικτή λύση ακραίου σημείου (κορυφή της εφικτής περιοχής) που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Δύναται να είναι ακριβώς μια, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις με άπειρες βέλτιστες λύσεις, καμία βέλτιστη λύση, ή η αντικειμενική συνάρτηση να τείνει στο άπειρο. Οι προαναφερθείσες περιπτώσεις περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω.
- **μεταβλητές απόφασης** είναι οι ποσότητες των μεταβλητών που βελτιστοποιούν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέγιστο αριθμό κορυφών του πολύεδρου των λύσεων (ένα πολύεδρο *n* διαστάσεων είναι το υποσύνολο του χώρου *n* διαστάσεων που προκύπτει ως η τομή ενός πεπερασμένου αριθμού ημι-επιπέδων), χρησιμοποιώντας τον αριθμό των περιορισμών m και των μεταβλητών απόφασης n χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο συνδυαστικής.

$C_{n+m}^{n} = \dfrac{(n+m)!}{m!n!}$ Για παράδειγμα, ένα ΠΓΠ με 8 περιορισμούς και 10 εξισώσεις μπορεί να διαθέτει 43.758 κορυφές.

Στην παρούσα ενότητα, θα αναφερθούμε σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με δύο (2) μόνο μεταβλητές. Για την περίπτωση των τριών (3) και πλέον μεταβλητών, δεν μπορούμε να παραστήσουμε το πρόβλημα γραφικά με ικανοποιητικό τρόπο. Παρόλα αυτά όμως, η παρουσίαση ενός προβλήματος που αποτελείται από δυο μεταβλητές, δηλαδή μέσω της αναπαράστασης του στο καρτεσιανό επίπεδο, αποδεικνύεται μια χρήσιμη άσκηση προκειμένου να κατανοήσουμε και προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων.

2.3 Διατύπωση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού: πρόβλημα μεγιστοποίησης

Μια επιχείρηση που λειτουργεί εντός ενός βιομηχανικού μεταποιητικού κλάδου παράγει δύο διαφορετικά προϊόντα, το προϊόν 1 και το προϊόν 2. Η παραγωγή του κάθε τεμαχίου απαιτεί συγκεκριμένο χρόνο λειτουργίας δύο μηχανών διαφορετικού τύπου, δηλαδή τύπου Α και τύπου Β. Η μηχανή τύπου Α μπορεί να χρησιμοποιηθεί για είκοσι (20) ώρες ανά ημέρα ενώ η μηχανή τύπου Β είναι διαθέσιμη στην διαδικασία παραγωγής για δώδεκα (12) ώρες ανά ημέρα.

Προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος 1 απαιτούνται δύο (2) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α και μία (1) ώρα λειτουργίας της μηχανής τύπου Β ενώ για να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος 2 απαιτούνται τέσσερεις (4) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α και τρεις (3) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Β.

Το αντίστοιχο (μικτό) κέρδος για τον επιχείρηση ανέρχεται σε σαράντα ευρώ (40€) για κάθε μονάδα του προϊόντος 1 και σε εκατό ευρώ (100€) για κάθε μονάδα του προϊόντος 2.

Η επιχείρηση έχει την δυνατότητα να διοχετεύσει στην αγορά όλη την παραγόμενη ποσότητα και από τα δύο προϊόντα με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Ζητείται να προσδιορίσετε την ποσότητα των τεμαχίων ανά προϊόν που πρέπει να παράγει η εν λόγω επιχείρηση ημερησίως προκειμένου να πετύχει τον σκοπό που έχει θέσει.

2.3.1 Μετατροπή του προβλήματος σε μαθηματικό υπόδειγμα

Το **πρώτο βήμα** ώστε να προχωρήσουμε στην λύση του προβλήματος είναι να ορίσουμε τις μεταβλητές με βάση τα στοιχεία που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Έτσι λοιπόν, θα πρέπει να ορίσουμε δύο μεταβλητές, τις x_1 και x_2, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που παράγονται ημερησίως και αφορούν στα προϊόντα 1 και 2 αντίστοιχα.

Το **δεύτερο βήμα** είναι να κατασκευάσουμε την αντικειμενική συνάρτηση από την οποία θα προκύψει και ο υπολογισμός του μέγιστου κέρδους της επιχείρησης. Είδαμε παραπάνω ότι κάθε μονάδα του προϊόντος 1, συνεισφέρει στο κέρδος 40 χρηματικές μονάδες ενώ κάθε μονάδα του προϊόντος 2, 100 χρηματικές μονάδες. Σύμφωνα με αυτά και λαμβάνοντας υπόψη ότι αντικειμενικός σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\max_{x_1,x_2} \Pi = 40 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$$

Το **τρίτο και τελευταίο βήμα** που είναι απαραίτητο είναι η διαμόρφωση του συνόλου των περιορισμών που αφορούν στην διαθεσιμότητα του κάθε τύπου μηχανής στην παραγωγή. Εφόσον υπάρχουν δύο τύποι μηχανών και η καθεμία έχει διαφορετική διαθεσιμότητα και συμμετοχή στην παραγωγή, συνεπάγεται ότι οι περιορισμοί θα αφορούν στην κάθε μηχανή (δηλαδή στον κάθε τύπο μηχανής). Ο σχηματισμός του κάθε περιορισμού θα γίνει λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις (σε ώρες λειτουργίας) του κάθε προϊόντος από τον κάθε τύπο μηχανής. Πιο συγκεκριμένα, οι περιορισμοί που αφορούν στον κάθε τύπο μηχανής διαμορφώνονται ως εξής (Πίνακας 2.1):

Περιορισμός Μηχανής Τύπου Α	$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 20$
Περιορισμός Μηχανής Τύπου Β	$x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 12$

Πίνακας 2.1 *Οι περιορισμοί του προβλήματος μεγιστοποίησης.*

Το σύμβολο "$\leq$" χρησιμοποιείται καθώς οι αριθμοί των διαθέσιμων ωρών για την λειτουργία της κάθε μηχανής αντιστοιχούν στους μέγιστους δυνατούς (δηλαδή, παραγωγή πάνω από τις δεδομένες ώρες δεν είναι δυνατή).

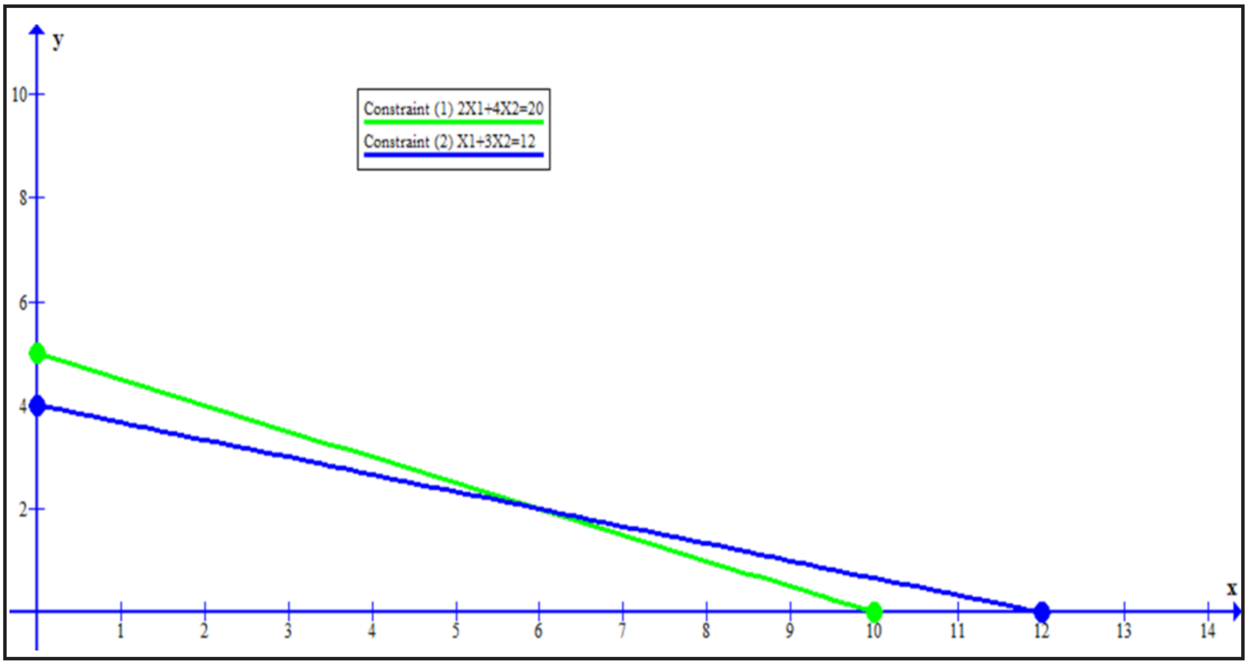
Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το μαθηματικό υπόδειγμα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} \Pi = 40 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 \\ &\boldsymbol{s.t.} \\ &2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 20 \\ &x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 12 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα αναφέρεται ως **περιορισμοί μη-αρνητικότητας** καθώς οι μονάδες των προϊόντων x_1 και x_2 οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που παράγονται ημερησίως και αφορούν στα προϊόντα 1 και 2 αντίστοιχα, δεν είναι δυνατόν να λάβουν αρνητικές τιμές.

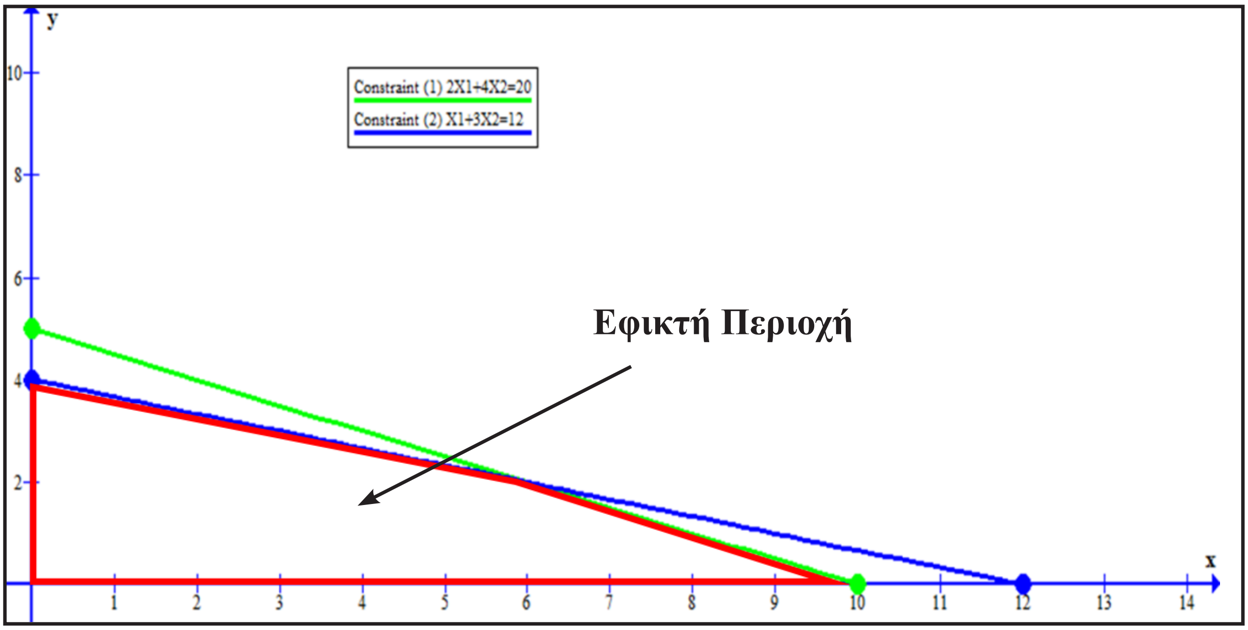
Εφόσον έχουμε διαμορφώσει το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, προχωρούμε τώρα στην επίλυση του. Για να παραστήσουμε το πρόβλημα γραφικά, αγνοούμε τις ανισότητες των περιορισμών και μηδενίζουμε εναλλάξ τις μεταβλητές x_1 και x_2 ώστε να υπολογίσουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε $x_2 = 5 - \frac{1}{2} \cdot x_1$ και $x_2 = 4 - \frac{1}{3} \cdot x_1$ ενώ χρησιμοποιώντας το **Graph** (βλέπε Παράρτημα 1), μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τους περιορισμούς και να προσδιορίσουμε την εφικτή περιοχή. Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.1), φαίνονται οι περιορισμοί:



Σχήμα 2.1 *Οι περιορισμοί του προβλήματος.*

Με βάση τα παραπάνω, η εφικτή περιοχή είναι η περιοχή είναι το χωρίο που βρίσκεται στο κάτω από τους περιορισμούς, δηλαδή η περιοχή που ορίζεται από το κόκκινο πλαίσιο (Σχήμα 2.2).



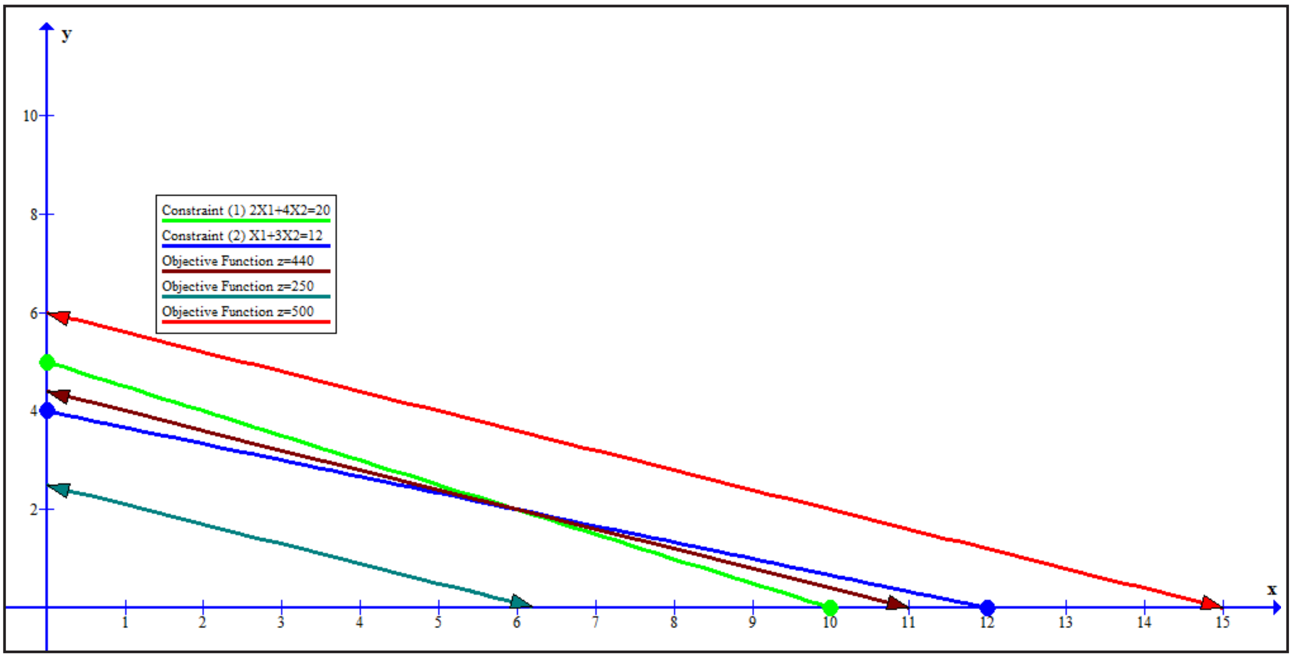
Σχήμα 2.2 *Οι περιορισμοί του προβλήματος και η εφικτή περιοχή.*

Ο σκοπός μας παραμένει να εντοπίσουμε το/τα σημείο/α που βελτιστοποιούν (στην προκειμένη περίπτωση μεγιστοποιούν) την αντικειμενική συνάρτηση. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται σε κάποιο γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι για προβλήματα τα οποία έχουν μία πεπερασμένη βέλτιστη λύση (δηλαδή όχι ‘άπειρη’) ένα εκ των βέλτιστων σημείων είναι πάντοτε ένα γωνιακό σημείο.

Στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού οι ευθείες που προκύπτουν από την ίδια αντικειμενική συνάρτηση έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (για διαφορετικές τιμές του δεξιού μέλους) και είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Το γωνιακό σημείο που αποτελεί την λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εξαρτάται κάθε φορά από την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία με την σειρά της εξαρτάται από την σχετική αναλογία των συντελεστών κέρδους των δυο προϊόντων, δηλαδή από τον συντελεστή διεύθυνσης (εδώ, $-\frac{40}{100}=-\frac{2}{5}$) ο οποίος προκύπτει από τους συντελεστές κέρδους των δύο προϊόντων στην αντικειμενική συνάρτηση. Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι η βέλτιστη επιλογή εξαρτάται από τον συντελεστή διεύθυνσης που δεν είναι άλλος από το λόγο των συντελεστών κέρδους των δύο προϊόντων.

Είναι φανερό από τα παραπάνω, ότι για διαφορετικές τιμές τις αντικειμενικής συνάρτησης, διατηρώντας αμετάβλητους τους συντελεστές κέρδους του κάθε προϊόντος, (αυτό σημαίνει ότι η κλίση των ευθειών παραμένει σταθερή) προκύπτουν διαφορετικές ευθείες όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.3):

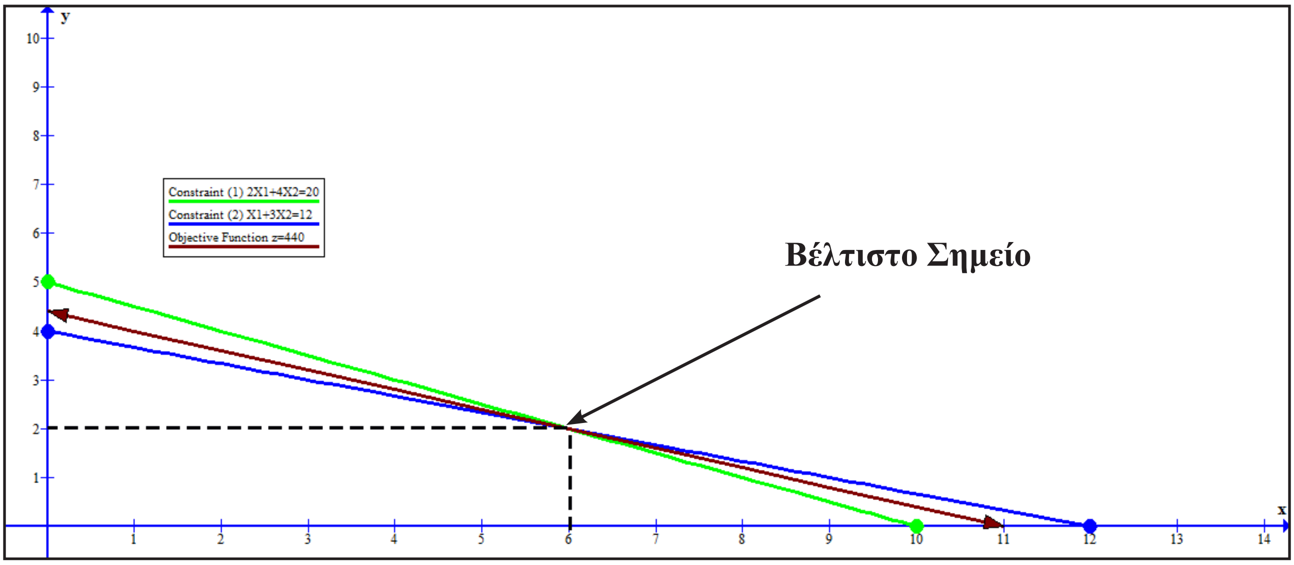


Σχήμα 2.3 *Διαφορετικά επίπεδα κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης με την κλίση να παραμένει σταθερή.*

Για να βρούμε το (γωνιακό) σημείο που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση λύνουμε ταυτόχρονα το σύστημα των περιορισμών:

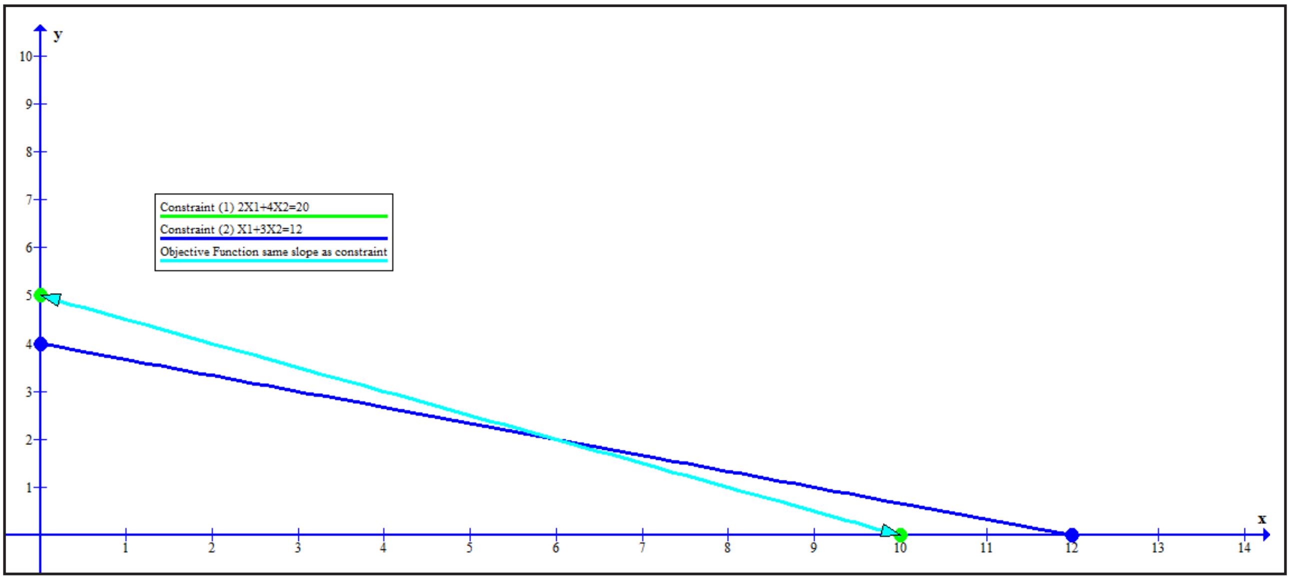
$$\left.\begin{matrix} 2\cdot x_1+4\cdot x_2=20 \\ x_1+3\cdot x_2=12 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 24-6\cdot x_2+4\cdot x_2=20 \\ x_1=12-3\cdot x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x_2=4 \\ x_1=12-3\cdot x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1=6, x_2=2$$

Άρα, ο συνδυασμός ποσοτήτων $(x_1=6, x_2=2)$ μεγιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης η τιμή της οποίας δίνεται αντικαθιστώντας τις βέλτιστες ποσότητες, δηλαδή, $\max_{x_1,x_2} \Pi = 40\cdot 6+100\cdot 2=440$, ενώ το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.4) απεικονίζει τους περιορισμούς με την αντικειμενική συνάρτηση που διέρχεται από το σημείο τομής τους το οποίο αντιστοιχεί και στον βέλτιστο συνδυασμό ποσοτήτων των δύο προϊόντων.



Σχήμα 2.4 *Οι περιορισμοί του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση και το βέλτιστο σημείο.*

Σε κάποιες περιπτώσεις, η αντικειμενική συνάρτηση έχει ίδια κλίση με κάποιον από τους περιορισμούς παραδείγματος χάρη, $\max_{x_1,x_2} \Pi = 20 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε εναλλακτικά βέλτιστα σημεία (δηλαδή άπειρα!) κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που οι δύο ευθείες (η αντικειμενική συνάρτηση και ο περιορισμός) ταυτίζονται (*η σκούρα γραμμή*). Μια τέτοια κατάσταση απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5 *Η περίπτωση των εναλλακτικών βέλτιστων σημείων: η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης ισούται με την κλίση ενός περιορισμού.*

2.4 Ανάλυση ευαισθησίας[4] σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (και όχι μόνο), εξίσου σημαντικό με την εύρεση των ποσοτήτων που βελτιστοποιούν (σ' αυτή την περίπτωση μεγιστοποιούν) την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι το εάν και κατά πόσο η βέλτιστη λύση που προέκυψε είναι αξιόπιστη ως προς τις (οριακές) αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος. Προκειμένου να απαντήσουμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα, καταφεύγουμε

4 Η ανάλυση ευαισθησίας θα περιγραφεί και θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης του Κεφαλαίου 6 του παρόντος συγγράμματος.

στην ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών (και όχι μόνο) του προβλήματος μεταβάλλοντας (αυξάνοντας ή/και μειώνοντας) οριακά τις διαθέσιμες ποσότητες του δεξιού μέλους των ανισοτήτων και υπολογίζουμε τις μεταβολές που προκύπτουν. Παρακάτω ακολουθούν κάποια τέτοια παραδείγματα χρησιμοποιώντας την ανάλυση ευαισθησίας.

2.4.1 Περιορισμοί διαθεσιμότητας

Έστω ότι η αγορά στην οποία προσφέρει τα προϊόντα που παράγει η παραπάνω επιχείρηση δεν μπορεί να απορροφήσει παραπάνω από οχτώ (8) μονάδες του προϊόντος 1.
Σε μια τέτοια περίπτωση, το πρόβλημα διαφοροποιείται ελαφρώς εφόσον προστίθεται ένας ακόμη ανισοτικός περιορισμός σχετικά με το προϊόν 1 χωρίς όμως να αλλάξει η αντικειμενική συνάρτηση. Το πρόβλημα τώρα λαμβάνει την μορφή:

$$\max_{x_1, x_2} \Pi = 40 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$$

$$\textbf{\textit{s.t.}}$$

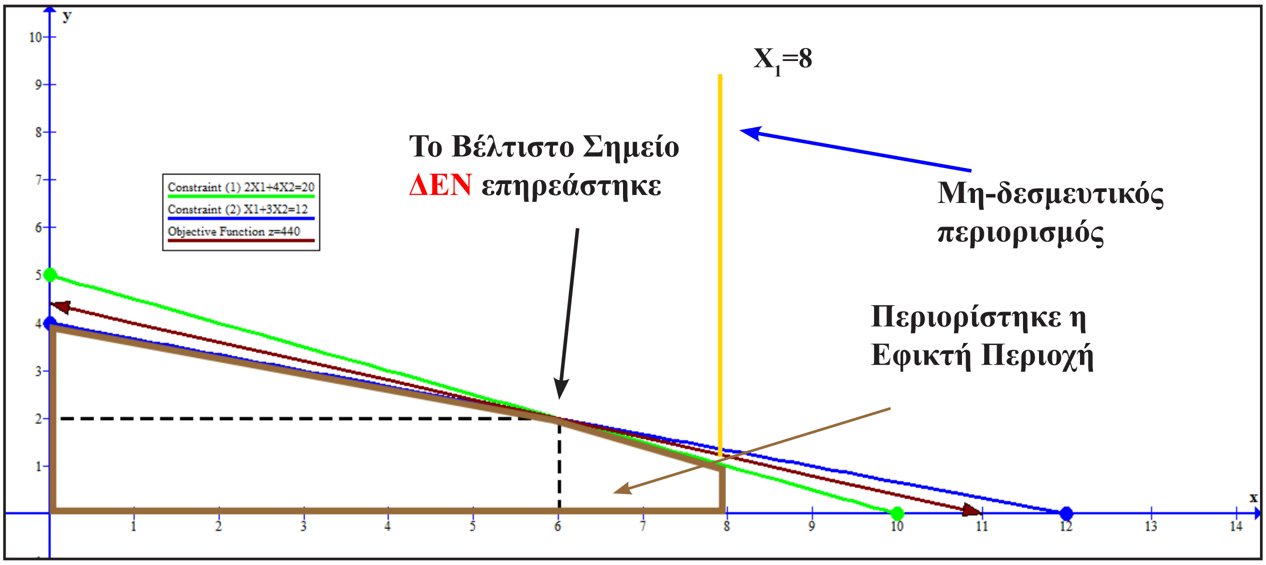
$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ενώ, η κατάσταση μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6 *Μη-δεσμευτικός περιορισμός, εφικτή περιοχή και βέλτιστο σημείο.*

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6 παραπάνω, στην περίπτωση ενός μη-δεσμευτικού περιορισμού, η μόνη αλλαγή που επέρχεται είναι ο περιορισμός της εφικτής περιοχής ενώ είναι εμφανές ότι το βέλτιστο (ή γωνιακό) σημείο δεν επηρεάστηκε καθόλου. Συνεπώς, προκύπτει ότι ένας περιορισμός ονομάζεται **μη-δεσμευτικός** όταν δεν επηρεάζει την βέλτιστη λύση. Στην περίπτωση που η επιβολή ενός νέου περιορισμού προκαλεί αλλαγές στην βέλτιστη λύση, τότε ο τελευταίος ονομάζεται **δεσμευτικός**.

2.4.2 Μεταβολές στις διαθέσιμες ποσότητες, σκιώδεις τιμές (Shadow Prices) και οικονομική ερμηνεία

Μεταβολές στις διαθέσιμες ποσότητες (σ' αυτό το παράδειγμα, αναφερόμαστε στις μεταβολές των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας των μηχανών τύπου Α και Β) των ωρών λειτουργίας των μηχανημάτων προκύπτουν μέσω των αλλαγών στο δεξί μέλος των περιορισμών του προβλήματος.

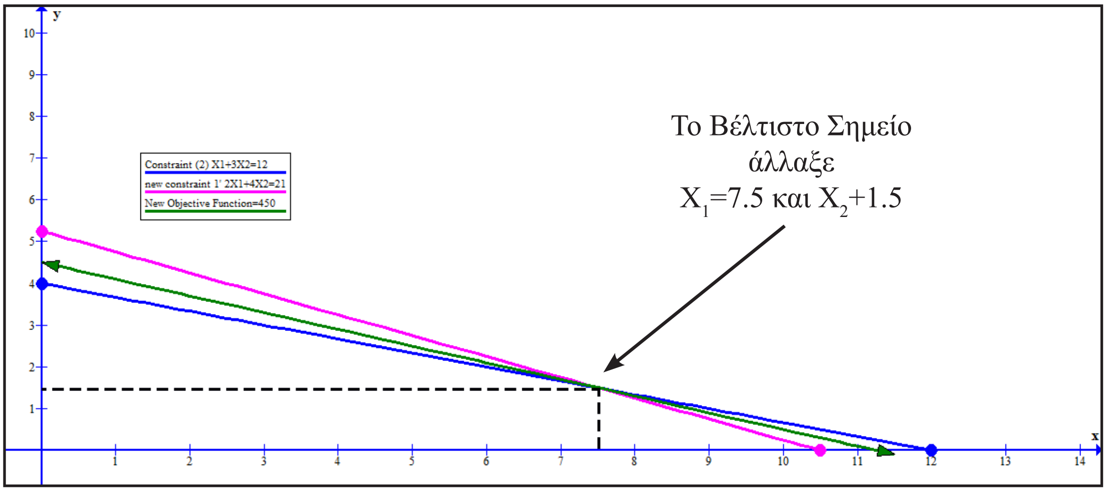
2.4.2.1 Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου A

Στο εν λόγω παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η διοίκηση της επιχείρησης αποφασίζει να αυξήσει τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου A. Τώρα ο περιορισμός που αφορά στην μηχανή τύπου A γίνεται $2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 21$.

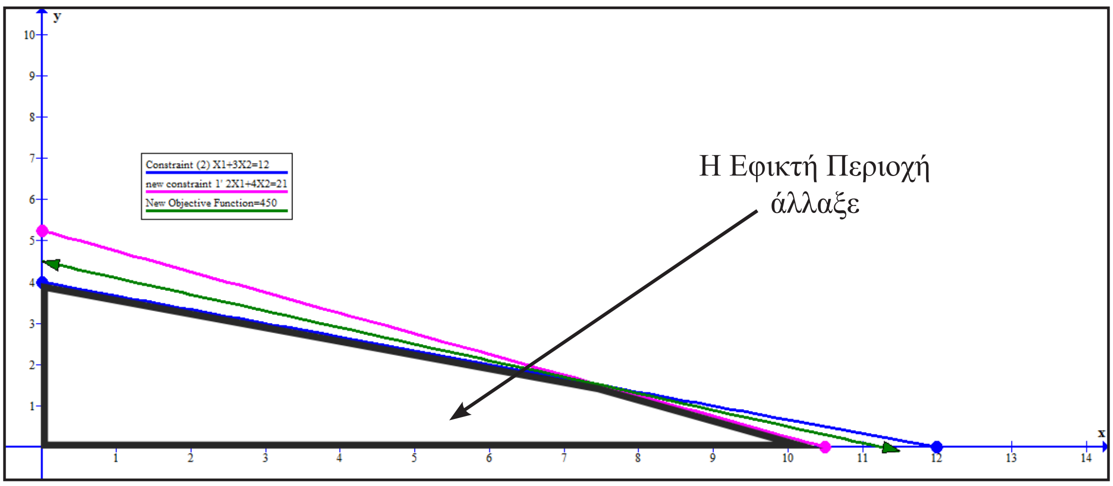
Θέλουμε να εξετάσουμε αν οι οριακές μεταβολές των ωρών λειτουργίας των δύο τύπων μηχανών θα επιφέρει ή όχι αλλαγές στην βέλτιστη λύση. Για να διαπιστώσουμε αν πράγματι υπάρχουν αλλαγές στην βέλτιστη λύση, θα χρειαστεί να λύσουμε εκ νέου το σύστημα των περιορισμών (και σε αυτή την περίπτωση με ισότητες):

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 = 21 \\ x_1 + 3\cdot x_2 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 7.5, x_2 = 1.5$$

Όπως φαίνεται και από τα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 2.7 και 2.8), η βέλτιστη λύση άλλαξε και ως εκ τούτου και η εφικτή περιοχή.



Σχήμα 2.7 *Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου A: περιορισμοί, αντικειμενική συνάρτηση και βέλτιστο σημείο.*



Σχήμα 2.8 *Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου A: περιορισμοί, αντικειμενική συνάρτηση, βέλτιστο σημείο και εφικτή περιοχή.*

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε διαφορετικό συνδυασμό βέλτιστων ποσοτήτων σε σχέση με την κατάσταση πριν την αύξηση, έχουμε δηλαδή τις εξής αλλαγές:

$$\Delta x_1 = 7.5 - 6 = 1.5 > 0, \text{Αύξηση}$$
$$\Delta x_2 = 1.5 - 2 = -.5 < 0, \text{Μείωση}$$

Το νέο αυτό γωνιακό σημείο επιφέρει μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση της επιχείρησης ίση με: $\Pi = 40 \cdot (1.5) + 100 \cdot (-.5) = 60 - 50 = 10 > 0$. Η μεταβολή είναι θετική, επομένως η αύξηση στις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α επέφερε μια αύξηση του κέρδους κατά 10 ευρώ.

Η παραπάνω ποσότητα είναι ιδιαίτερης σημασίας στην Οικονομική Επιστήμη και λέγεται **Σκιώδης Τιμή** (Shadow Price). Η **Σκιώδης Τιμή** αποτελεί την μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει από μια μοναδιαία (ή οριακή) μεταβολή στο δεξί μέλος κάποιου από το σύνολο των περιορισμών.

Με άλλα λόγια, η **Σκιώδης Τιμή** είναι ενδεικτική της «ευαισθησίας» στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εξαιτίας μια μεταβολής στο δεξί μέλος κάποιου από τους περιορισμούς και η φυσική της σημασία (μέσα σε ένα Οικονομικό πρίσμα) είναι η ακόλουθη: "*Αν αυξήσουμε τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α από 20 σε 21, δηλαδή οριακά, τότε προκύπτει επιπλέον κέρδος στην επιχείρηση ίσο με 10€*".

Πιο συγκεκριμένα, στην βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς, η *Σκιώδης Τιμή* είναι η *οριακή μεταβολή* ανά μονάδα του περιορισμού στην αντικειμενική τιμή της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που επιτυγχάνεται όταν «χαλαρώσουμε» κάποιον περιορισμό. Με άλλα λόγια είναι η **οριακή χρησιμότητα** που προκύπτει από την «χαλάρωση» του περιορισμού ή ισοδύναμα το **οριακό κόστος** της «ενδυνάμωσης» (με την έννοια ότι κάνουμε τον περιορισμό περισσότερο ισχυρό) ενός περιορισμού.

Στις εφαρμογές των Οικονομικών (ή της Διοίκησης Επιχειρήσεων), η **Σκιώδης Τιμ**ή είναι η μέγιστη ποσότητα που ο δρών (το μάνατζμεντ της επιχείρησης) είναι πρόθυμος να πληρώσει για μια επιπρόσθετη μονάδα ενός δεδομένου συντελεστή που βρίσκεται σε σπανιότητα (παραδείγματος χάρη για μια επιπλέον μονάδα εργασίας).

Προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα, η Σκιώδης Τιμή είναι η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange[5] στην βέλτιστη (βέλτιστη) λύση το οποίο σημαίνει ότι είναι η οριακή αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που προκύπτει από μια οριακή αλλαγή στον περιορισμό. Το τελευταίο προκύπτει από το γεγονός ότι στην βέλτιστη λύση η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των κλίσεων των συναρτήσεων των περιορισμών με βαρύτητες (βάρη) που είναι ίσα με του πολλαπλασιαστές Lagrange. Κάθε περιορισμός στα προβλήματα βελτιστοποίησης έχει μια **Σκιώδη Τιμή (Shadow Price)** ή μια **Δυική Τιμή (Dual Price)**[6] **.** Ως εκ τούτου η **Σκιώδης Τιμή** δείχνει πόσο κοστίζει 1 ώρα απασχόλησης σε μια δραστηριότητα.

Όμως, θα πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός διότι σε περιπτώσεις μεγάλων αλλαγών στο δεξιό μέλος κάποιου/ων περιορισμών δεν είναι βέβαιο ότι οι αλλαγές θα είναι ανάλογες με αυτές που προέκυψαν από τις **Σκιώδεις Τιμές**. Η μεταβολή του δεύτερου μέλους ενός περιορισμού έχει νόημα για κάποιο πεπερασμένο αριθμό μονάδων και υπάρχει πάντοτε κάποιο όριο πέρα από το οποίο η προσθήκη μιας επιπλέον μονάδας δεν υπακούει καθόλου στις οριακές τιμές του προβλήματος.

Ως μια τελική σημείωση, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω αντικαθιστώντας το αρχικό και το τελικό βέλτιστο σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= 40 \cdot 6 + 100 \cdot 2 = 440 \\ \Pi_2 &= 40 \cdot 7.5 + 100 \cdot 1.5 = 450 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 450 - 440 = 10 > 0$$

2.4.2.2 Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Α

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διοίκηση της επιχείρησης αποφασίζει να μειώσει τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α. Τώρα ο περιορισμός που αφορά στην μηχανή τύπου Α γίνεται $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 19$.

Για να προσδιορίσουμε τον συνδυασμό ποσοτήτων που βελτιστοποιεί βέλτιστη λύση σε αυτή την περίπτωση, λύνουμε εκ νέου το σύστημα των δυο εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &= 19 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \ldots \\ \ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 4.5, x_2 = 2.5$$

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε διαφορετικό συνδυασμό βέλτιστων ποσοτήτων σε σχέση με την κατάσταση πριν την αύξηση, έχουμε δηλαδή τις εξής αλλαγές:

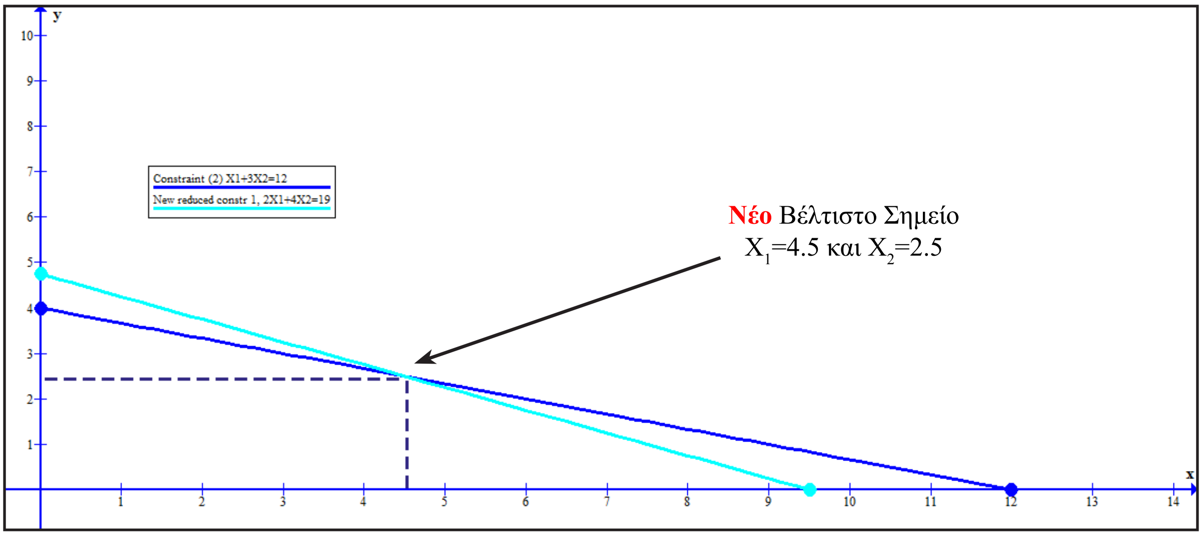
---

5 Βλέπε Παράρτημα 2.

6 Η Δυικότητα παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5 του παρόντος συγγράμματος.

$$\Delta x_1 = 4.5 - 6 = -1.5 < 0, \text{Αύξηση}$$
$$\Delta x_2 = 2.5 - 2 = .5 > 0, \text{Μείωση}$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω ποσότητες σε συνδυασμό με το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.9), είναι εμφανές ότι τόσο η βέλτιστη λύση (όσο και η εφικτή περιοχή) έχουν αλλάξει.



Σχήμα 2.9 *Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Α: περιορισμοί, αντικειμενική συνάρτηση και βέλτιστο σημείο.*

Αναφορικά μες την Σκιώδη Τιμή (που προκύπτει από την «ενδυνάμωση» του περιορισμού), υπολογίζεται ως εξής:

Σκιώδης Τιμή = $40 \cdot (-1.5) + 100 \cdot (0.5) = -10 < 0$, το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι στην περίπτωση περιορισμού των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Α οριακά, το κέρδος της επιχείρησης μειώνεται κατά 10€. Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Σκιώδης Τιμή που συσχετίζεται με τον κάθε περιορισμό οποιουδήποτε ΠΓΠ (το οποίο αποτελείται από δύο μεταβλητές ενδιαφέροντος[7]) μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Σκιώδης Τιμή $= c_1 \cdot \Delta X_1 + c_2 \cdot \Delta X_1$, όπου c_1, c_2 είναι οι συντελεστές κέρδους στην περίπτωση των προβλημάτων μεγιστοποίησης. Στην περίπτωση των προβλημάτων ελαχιστοποίησης, οι αντίστοιχοι συντελεστές καλούνται συντελεστές κόστους.

Ως μια τελική σημείωση, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω αντικαθιστώντας το αρχικό και το τελικό βέλτιστο σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1 = 40 \cdot 6 + 100 \cdot 2 = 440 \\ \Pi_2 = 40 \cdot 4.5 + 100 \cdot 2.5 = 430 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 430 - 440 = -10 < 0$$

2.4.2.3 Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διοίκηση της επιχείρησης αποφασίζει να αυξήσει τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Β. Τώρα ο περιορισμός που αφορά στην μηχανή τύπου Β γίνεται $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$.

Για να προσδιορίσουμε τον συνδυασμό ποσοτήτων που βελτιστοποιεί βέλτιστη λύση σε αυτή την περίπτωση, λύνουμε εκ νέου το σύστημα των δυο εξισώσεων:

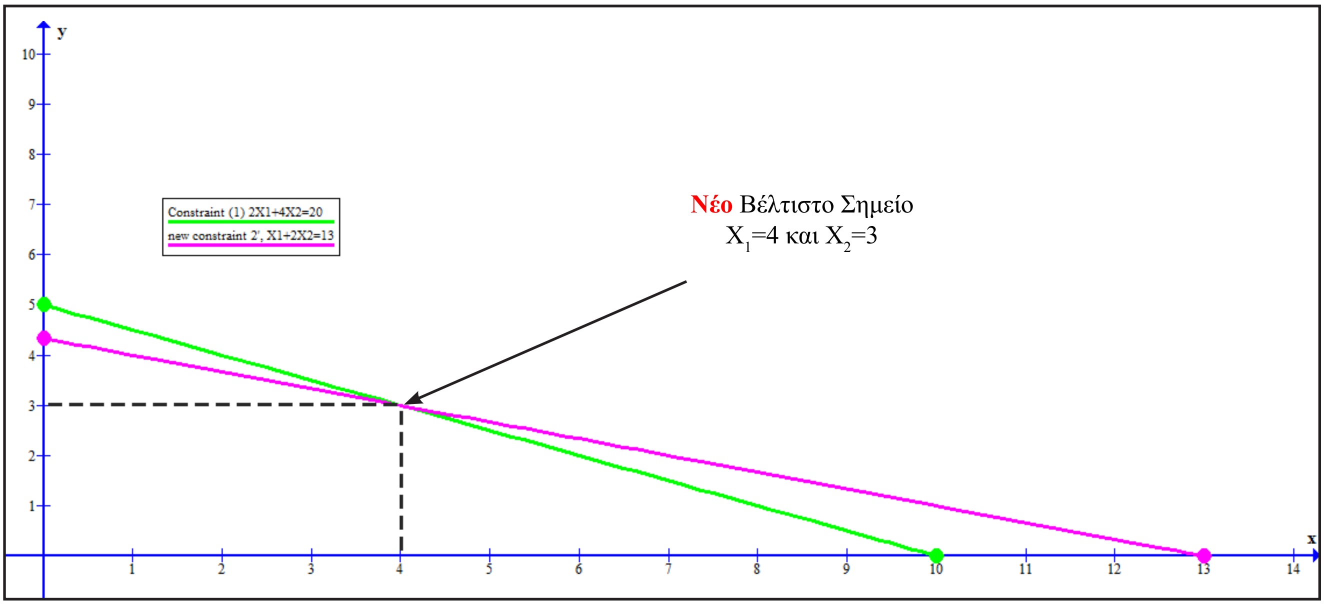
7 Αυτός ο τύπος μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση των περισσοτέρων από δυο μεταβλητών αλλά μέσω της Γραφικής Επίλυσης είναι επίπονο να υπολογιστούν όλες οι αλλαγές αλγεβρικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις απευθυνόμαστε σε εξειδικευμένα πακέτα βελτιστοποίησης μέσω προγραμμάτων όπως το R και αποτελεί το αντικείμενο του Κεφαλαίου 4 του παρόντος συγγράμματος.

$$\left.\begin{array}{l}2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 20 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 = 13\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\ldots \\ \ldots\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3$$

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε διαφορετικό συνδυασμό βέλτιστων ποσοτήτων σε σχέση με την κατάσταση πριν την αύξηση, έχουμε δηλαδή τις εξής αλλαγές:

$$\Delta x_1 = 4 - 6 = -2 < 0, \text{ Αύξηση}$$
$$\Delta x_2 = 3 - 2 = 1 > 0, \text{ Μείωση}$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω ποσότητες σε συνδυασμό με το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.10), είναι εμφανές ότι τόσο η βέλτιστη λύση (όσο και η εφικτή περιοχή) έχουν αλλάξει.



Σχήμα 2.10 *Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β: περιορισμοί, αντικειμενική συνάρτηση και βέλτιστο σημείο.*

Σ' αυτή την περίπτωση η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται ως εξής:

Σκιώδης Τιμή $= 40 \cdot (-2) + 100 \cdot (1) = 20 > 0$, το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι στην περίπτωση της οριακής αύξησης των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β, το κέρδος της επιχείρησης αυξάνεται κατά 20€.

Ως μια τελική σημείωση, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω αντικαθιστώντας το αρχικό και το τελικό βέλτιστο σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1 = 40 \cdot 6 + 100 \cdot 2 = 440 \\ \Pi_2 = 40 \cdot 4 + 100 \cdot 3 = 460\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 460 - 440 = 20 > 0$$

2.4.2.4 Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διοίκηση της επιχείρησης αποφασίζει να μειώσει τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Β. Τώρα ο περιορισμός που αφορά στην μηχανή τύπου Β γίνεται $x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 11$.

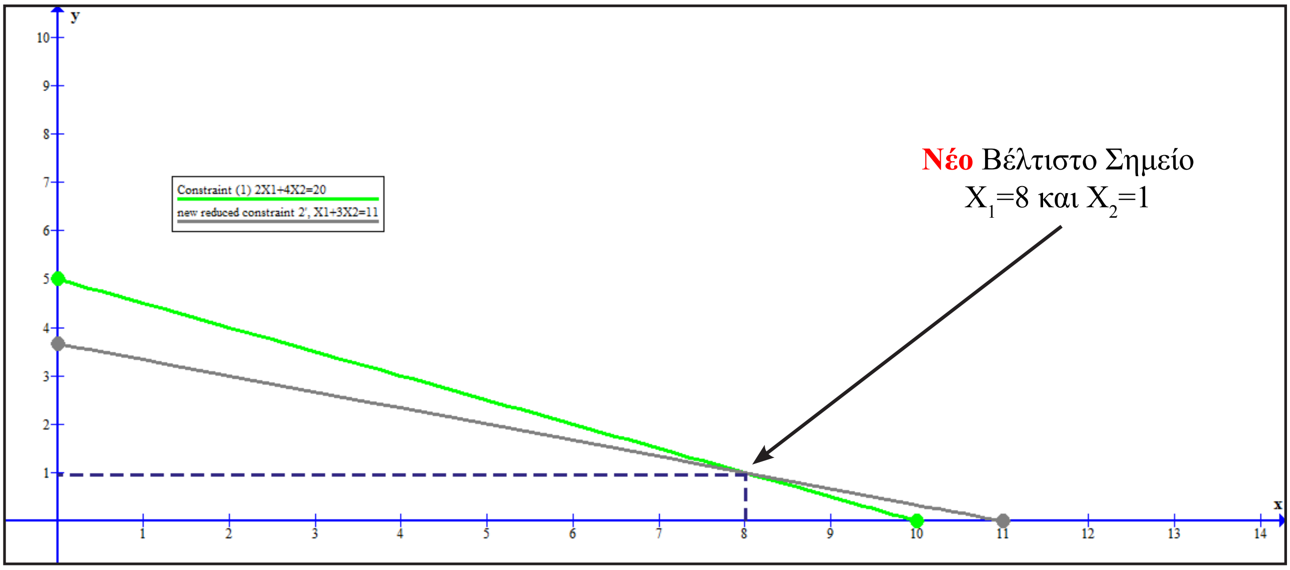
Για να προσδιορίσουμε τον συνδυασμό ποσοτήτων που βελτιστοποιεί βέλτιστη λύση σε αυτή την περίπτωση, λύνουμε εκ νέου το σύστημα των δυο εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l}2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 20 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 = 11\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\ldots \\ \ldots\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = 1$$

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε διαφορετικό συνδυασμό βέλτιστων ποσοτήτων σε σχέση με την κατάσταση πριν την μείωση, έχουμε δηλαδή τις εξής αλλαγές:

$$\Delta x_1 = 8 - 6 = 2 > 0, \text{ Αύξηση}$$
$$\Delta x_2 = 1 - 2 = -1 < 0, \text{ Μείωση}$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω ποσότητες σε συνδυασμό με το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.11), είναι εμφανές ότι τόσο η βέλτιστη λύση (όσο και η εφικτή περιοχή) έχουν αλλάξει.



Σχήμα 2.11 *Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β: περιορισμοί, αντικειμενική συνάρτηση και βέλτιστο σημείο.*

Σ' αυτή την περίπτωση η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται ως εξής:

Σκιώδης Τιμή $= 40 \cdot (2) + 100 \cdot (-1) = -20 < 0$, το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι στην περίπτωση της οριακής μείωσης των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β, το κέρδος της επιχείρησης μειώνεται κατά 20€.

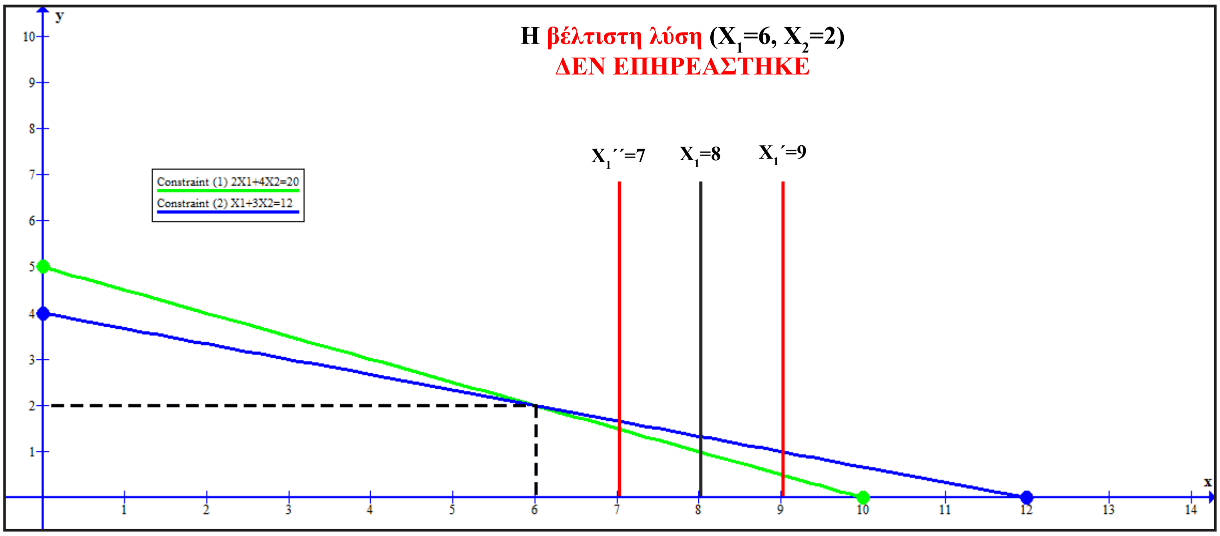
Ως μια τελική σημείωση, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω αντικαθιστώντας το αρχικό και το τελικό βέλτιστο σημείο στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1 = 40 \cdot 6 + 100 \cdot 2 = 440 \\ \Pi_2 = 40 \cdot 8 + 100 \cdot 1 = 420\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi = 420 - 440 = -20 < 0$$

2.4.3 Μεταβολές του μη-δεσμευτικού περιορισμού

Όσον αφορά στον μη-δεσμευτικό περιορισμό του προβλήματος, η οριακή μεταβολή του είτε προς την μια είτε προς την άλλη κατεύθυνση (δηλαδή αύξηση ή μείωση) δεν επιφέρει καμία αλλαγή στην βέλτιστη λύση και ως εκ τούτου ούτε και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Συνεπώς, η Σκιώδης Τιμή με την οποία συνδέεται ο μη-δεσμευτικός αυτός περιορισμός είναι μηδέν. Αυτό που μεταβάλλεται εξαιτίας του μη-δεσμευτικού περιορισμού είναι μόνο η εφικτή περιοχή.

Στο σχήμα παρακάτω (Σχήμα 2.12), φαίνονται οι μεταβολές του μη-δεσμευτικού περιορισμού.



Σχήμα 2.12 *Μεταβολές του μη-δεσμευτικού περιορισμού.*

2.4.4 Ταυτόχρονη μεταβολή (αύξηση ή μείωση) των περιορισμών διαθεσιμότητας[8]

Στην περίπτωση της ταυτόχρονης μεταβολής (εδώ, μείωσης) της διαθεσιμότητας των περιορισμών μπορούμε να εξετάσουμε τυχόν αλλαγές στο βέλτιστο σημείο στα πλαίσια της ανάλυσης ευαισθησίας.

Έστω για παράδειγμα ότι η διοίκηση της επιχείρησης επιδιώκει να μειώσει το συνολικό κόστος παράγωγης και αποφασίζει να μειώσει (οριακά) τις ώρες λειτουργίας των δύο μηχανημάτων.

Τώρα οι περιορισμοί που αφορούν στις δύο μηχανές τύπου Α και Β, γίνονται:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 19$$
$$x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 11$$

Για να προσδιορίσουμε τον συνδυασμό ποσοτήτων που βελτιστοποιεί βέλτιστη λύση σε αυτή την περίπτωση, λύνουμε εκ νέου το σύστημα των δυο εξισώσεων:

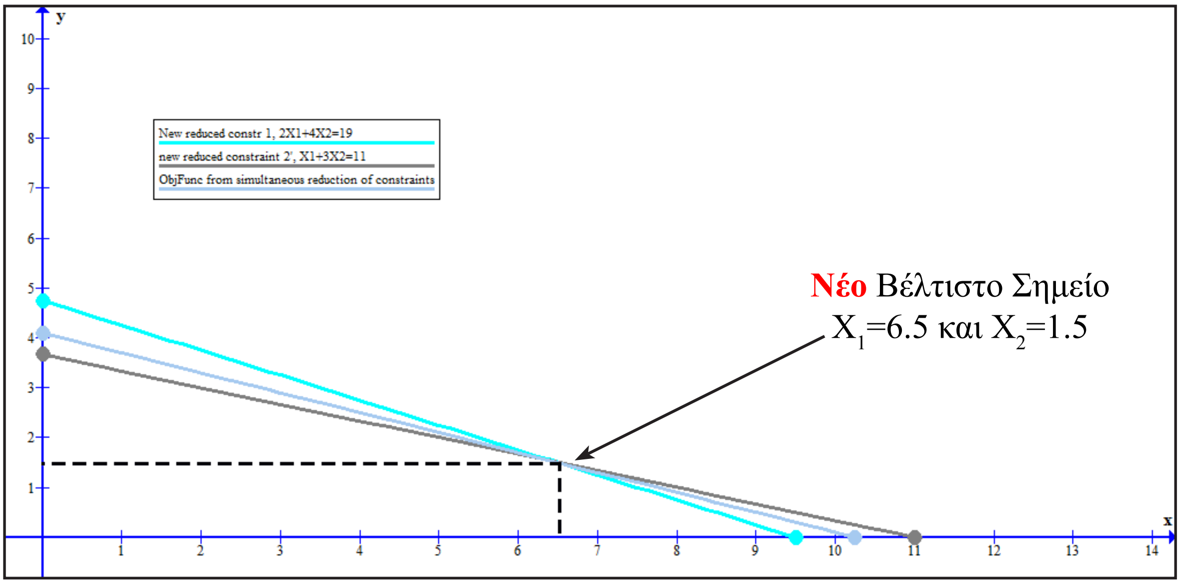
$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 19 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 6.5, x_2 = 1.5$$

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε διαφορετικό συνδυασμό βέλτιστων ποσοτήτων σε σχέση με την αρχική κατάσταση, έχουμε δηλαδή τις εξής αλλαγές:

$$\Delta x_1 = 6.5 - 6 = 0.5 \ > 0, \text{ Αύξηση}$$
$$\Delta x_2 = 1.5 - 2 = -0.5 < 0, \text{ Μείωση}$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω ποσότητες σε συνδυασμό με το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.13), είναι εμφανές ότι τόσο η βέλτιστη λύση (όσο και η εφικτή περιοχή) έχουν αλλάξει. Επίσης, παρουσιάζεται και η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης.

8 Η ίδια συλλογιστική εφαρμόζεται και στις περιπτώσεις όπου έχουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταβολών στις διαθέσιμες ποσότητες (δεξιά μέλη) των περιορισμών π.χ. αύξηση και των δύο μελών, αύξηση του ενός και μείωση του άλλου κ.ο.κ



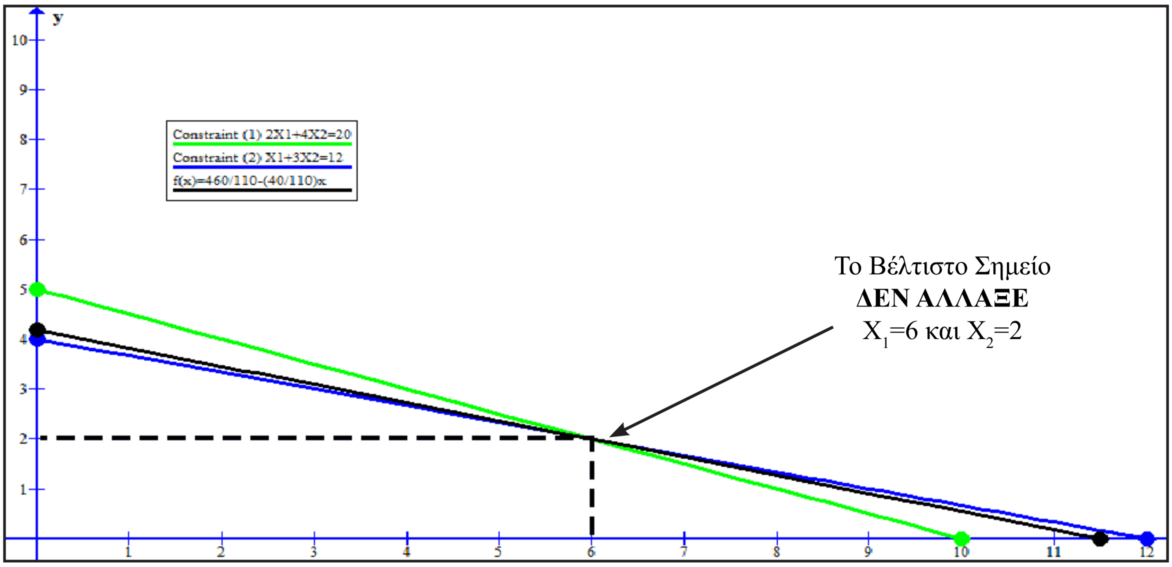
Σχήμα 2.13 *Ταυτόχρονη μεταβολή των περιορισμών διαθεσιμότητας.*

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στην περίπτωση της ταυτόχρονης μεταβολής των περιορισμών όπως φαίνεται παραπάνω, μπορούμε να συγκρίνουμε την τελική κατάσταση με την αρχική (πριν την μείωση διαθεσιμότητας) αλλά δεν μπορούμε να υπολογίσουμε **Σκιώδη Τιμή** για αυτή την μεταβολή. Είδαμε παραπάνω πώς κάθε **Σκιώδης Τιμή** συνδέεται με την οριακή μεταβολή ενός και μόνο περιορισμού ενώ στην παραπάνω περίπτωση έχουμε οριακή μεταβολή και των δύο περιορισμών και συνεπώς παρά το γεγονός ότι είναι δυνατό να υπολογιστεί η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση, η ποσότητα αυτή εν αποτελεί **Σκιώδη Τιμή** καθώς όπως προαναφέρθηκε έχει προκύψει από την μεταβολή και των δύο περιορισμών.

2.4.5 Μεταβολή των συντελεστών συμμετοχής (κέρδους ή κόστους) των προϊόντων στην αντικειμενική συνάρτηση

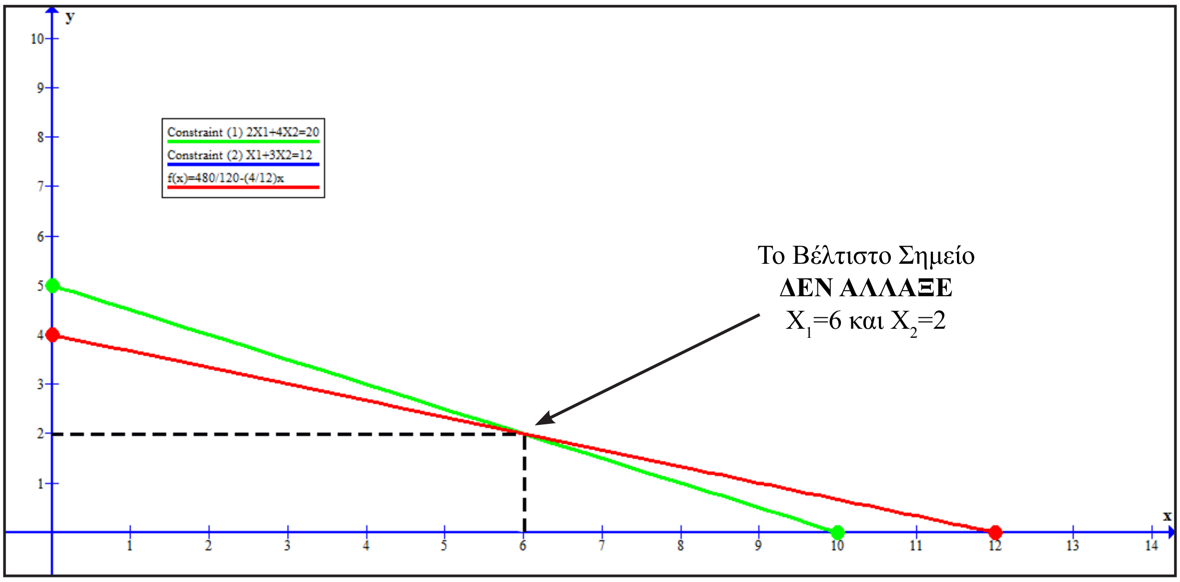
Η συγκεκριμένη περίπτωση αφορά σε μεταβολές στους συντελεστές κέρδους για κάποιο/α από προϊόντα (εδώ, αύξηση του συντελεστή κέρδους για το προϊόν 2), δηλαδή με άλλα λόγια αφορά στις μεταβολές που συμβαίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση εξαιτίας αλλαγών στις τιμές των προϊόντων. Οι αλλαγές αυτές, όπως είναι φανερό, επηρεάζουν την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης και ακολουθούν αντίστοιχη συλλογιστική με αυτή των μεταβολών των περιορισμών διαθεσιμότητας των μηχανών του προβλήματος που παρουσιάστηκε παραπάνω.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα, ότι αυξάνεται η τιμή του προϊόντος 2 κατά 10€ και γίνεται 110€. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτή την περίπτωση αλλάζει ως εξής: $\Pi = 40 \cdot 6 + 110 \cdot 2 = 460$. Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.14) αποτυπώνει αυτή την αλλαγή στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 2.14 *Μεταβολή των συντελεστών συμμετοχής (συντελεστών κέρδους) ενός εκ των προϊόντων στην αντικειμενική συνάρτηση - σενάριο 1.*

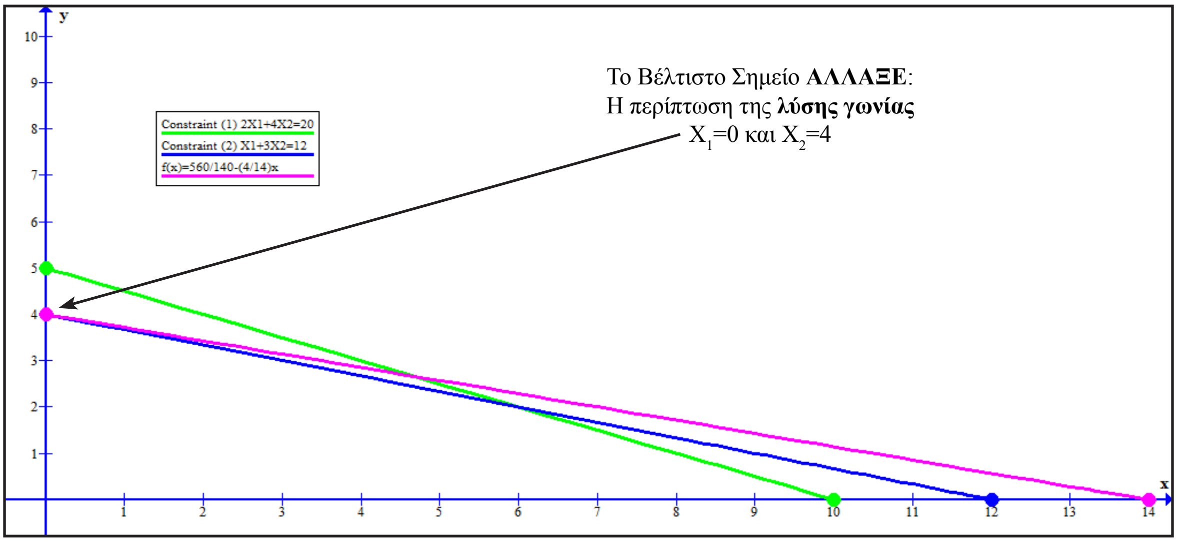
Παρατηρούμε ότι το βέλτιστο σημείο δεν άλλαξε με την αλλαγή της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης.Στην συνέχεια, ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι αυξάνεται περαιτέρω η τιμή του προϊόντος 2 κατά 10€ και γίνεται 120€. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτή την περίπτωση αλλάζει ως εξής: $\Pi = 40 \cdot 6 + 120 \cdot 2 = 480$. Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.15), αποτυπώνει αυτή την αλλαγή στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 2.15 *Μεταβολή των συντελεστών συμμετοχής (συντελεστών κέρδους) ενός εκ των προϊόντων στην αντικειμενική συνάρτηση – σενάριο 2.*

Και σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι το βέλτιστο σημείο δεν άλλαξε με την αλλαγή της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Επίσης παρατηρούμε, ότι σ' αυτή την περίπτωση η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με την κλίση της ευθείας του δεύτερου περιορισμού και ως εκ τούτου οι δυο ευθείες ταυτίζονται.

Τέλος, ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι αυξάνεται περαιτέρω η τιμή του προϊόντος 2 κατά 20€ και γίνεται 140€. Σε αυτή την περίπτωση όμως, έχουμε αλλαγή του βέλτιστου σημείου όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.16).



Σχήμα 2.16 *Μεταβολή των συντελεστών συμμετοχής (συντελεστών κέρδους) ενός εκ των προϊόντων στην αντικειμενική συνάρτηση – σενάριο 3.*

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.16 παραπάνω, με την αλλαγή στον συντελεστή κέρδους (τιμή) του προϊόντος 2, η επιχείρηση έχει στρέψει εξ' ολοκλήρου τους πόρους της στην παραγωγή του προϊόντος 2. Αυτή η περίπτωση είναι γνωστή ως λύση γωνίας, καθώς παράγεται ένα μόνο προϊόν.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μεταβολές στον συντελεστή κέρδους του προϊόντος 2 από ένα σημείο και πέρα (δηλαδή, ορίζοντας συντελεστή κέρδους μεγαλύτερο από 120€ ανά μονάδα στην προκειμένη περίπτωση) η βέλτιστη λύση αλλάζει. **Διαμορφώνεται** δηλαδή ένα **εύρος διακύμανσης** εντός του οποίου υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα κέρδους χωρίς να αλλάζει το βέλτιστο σημείο. Πιο συγκεκριμένα, από την ανάλυση ευαισθησίας παρατηρούμε ότι όταν οι συντελεστές κέρδους μεταβάλλονται ανάμεσα στα επιτρεπτά όρια τότε συμβαίνουν αλλαγές στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (εφόσον το προϊόν με τον αλλαγμένο συντελεστή κέρδους συνεισφέρει διαφορετικά στην αντικειμενική συνάρτηση) αλλά όχι στην βέλτιστη λύση.

Ως τελευταία παρατήρηση σχετικά με την ανάλυση ευαισθησίας, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή όταν οι παράμετροι του μαθηματικού υποδείγματος δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν με ακρίβεια. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι σημαντικό να μελετήσουμε την συμπεριφορά της λύσης σε μια "γειτονιά" τιμών των παραμέτρων.

2.5 Αξιολόγηση ενός νέου προϊόντος και η χρησιμότητα των σκιωδών τιμών

Η ανάλυση που έχει ως κεντρικό σημείο τις σκιώδεις τιμές αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη ώστε να εντοπιστούν οι ζημιογόνοι περιορισμοί για τους οποίους είναι αναγκαίο η επιχείρηση να κάνει αλλαγές με σκοπό να βελτιωθούν τα κέρδη της. Επιπλέον, οι σκιώδεις τιμές μας βοηθούν να αξιολογήσουμε νέα προϊόντα τα οποία η επιχείρηση θα μπορούσε να παράγει με τους υπάρχοντες πόρους.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι η επιχείρηση του παραδείγματος μας έχει αναπτύξει και ένα τρίτο προϊόν (προϊόν 3) που έχει υπολογιστεί ότι αποφέρει κέρδος 110€ ανά μονάδα αλλά η παραγωγή του απαιτεί 4 ώρες λειτουργίας από τον κάθε τύπο μηχανής (Α και Β). Αυτό που απασχολεί την διοίκηση της επιχείρησης είναι αν τελικά η μαζική παραγωγή του προϊόντος 3 είναι συμφέρουσα για την επιχείρηση.

Είναι προφανές ότι για να είμαστε σε θέση να απαντήσουμε με ακρίβεια στο παραπάνω ερώτημα, θα πρέπει να διαμορφώσουμε και στην συνέχεια να λύσουμε εξαρχής το ΠΓΠ προκειμένου να προσδιορίσουμε τον ακριβή αριθμό μονάδων από το προϊόν 3 που θα πρέπει να παραχθούν. Αντί να λύσουμε ξανά το πρόβλημα, μπορούμε να πάρουμε μια γρήγορη εκτίμηση χρησιμοποιώντας τις σκιώδεις τιμές που υπολογίσαμε παραπάνω.

Σε μια τέτοια περίπτωση, τα προϊόντα 1, 2 και 3 «ανταγωνίζονται» για τον διαθέσιμο χρόνο λειτουργίας των μηχανημάτων. Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2.2), οι Σκιώδεις Τιμές των περιορισμών που υπολογίσαμε παραπάνω μας δείχνουν ότι:

1 ώρα λειτουργίας	Αξία
Για την Μηχανή τύπου Α	10€
Για την Μηχανή τύπου Β	20€

Πίνακας 2.2 *Αξιολόγηση νέου προϊόντος.*

Επίσης γνωρίζουμε ότι προκειμένου να παραχθεί 1 μονάδα προϊόντος 3 απαιτούνται 4 ώρες λειτουργίας της μηχανής κάθε τύπου και ως εκ τούτου μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος ευκαιρίας που έχει η κάθε μονάδα του προϊόντος 3. Το κόστος ευκαιρίας για την παραγωγή του προϊόντος 3 υπολογίζεται ως εξής:

(Σκιώδης Τιμή του 1ου περιορισμού)*(Ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α) +
(Σκιώδης Τιμή του 2ου περιορισμού)*(Ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Β) =
=10 * 4 + 20 * 4 = 120€

Η τιμή των 120€ αντιστοιχεί στο κόστος της χαμένης ευκαιρίας παραγωγής για να παράγουμε τα προϊόντα 1 και 2. Εφόσον λοιπόν το αναμενόμενο ανά μονάδα κέρδος για το προϊόν 3 έχει υπολογιστεί στα 110€, παρατηρούμε ότι δεν είναι επαρκές για να καλύψει το κόστος ευκαιρίας παραγωγής του (εναλλακτικά, το κόστος ευκαιρίας της μη παραγωγής των προϊόντων 1 και 2) το οποίο όπως υπολογίσαμε ανέρχεται στα 120€. Προκύπτει λοιπόν ότι η παραγωγή του προϊόντος 3 κρίνεται ως μη συμφέρουσα για την επιχείρηση.

Έστω τώρα ότι δημιουργήθηκε ένα ακόμη προϊόν, το προϊόν 4, το οποίο σύμφωνα με τις εκτιμήσεις της επιχείρησης αναμένεται να αποφέρει κέρδος 120€ ανά μονάδα αλλά η παραγωγή του απαιτεί 3 ώρες λειτουργίας από την μηχανή κάθε τύπου. Η διοίκηση της επιχείρησης διερωτάται αν συμφέρει η παραγωγή σε αυτή την περίπτωση.

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, εκτιμούμε ότι το κόστος ευκαιρίας παραγωγής μιας μονάδας από το προϊόν 4 ανέρχεται στα 90€ (10*3+20*3) ενώ το αναμενόμενο κέρδος από την παραγωγή του ανέρχεται στα 120€. Εφόσον το αναμενόμενο κέρδος είναι μεγαλύτερο από το κόστος ευκαιρίας που συνεπάγεται η παραγωγή του προϊόντος 4, η επιχείρηση θα πρέπει να αναλογιστεί την περίπτωση να παράγει τουλάχιστον κάποιες μονάδες από το προϊόν 4.

Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι τα παραπάνω δεν είναι επαρκή για να μας δείξουν πόσες μονάδες από το κάθε προϊόν πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη της επιχείρησης. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, για να απαντήσουμε με ακρίβεια σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να διαμορφώσουμε ξανά το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού και να το λύσουμε εκ νέου.

2.6 Διατύπωση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού: πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Εκτός από προβλήματα μεγιστοποίησης, συχνά καλούμαστε να επιλύσουμε και προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού κατά τα οποία αντικειμενικός σκοπός της μονάδας λήψης απόφασης είναι η εύρεση των βέλτιστων σημείων ώστε τα τελευταία να ελαχιστοποιούν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η συλλογιστική που ακολουθείται σε αυτές τις περιπτώσεις προκειμένου να σχηματίσουμε το μαθηματικό υπόδειγμα αλλά και να προβούμε σε ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών, είναι κοινή με αυτήν των προβλημάτων μεγιστοποίησης. Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης.

2.6.1 Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

Ένας κτηνοτρόφος επιθυμεί να προετοιμάσει ένα μείγμα από τις τροφές Α και Β. Κάθε κιλό της τροφής Α περιέχει 120 γραμμάρια πρωτεΐνες, 56 γραμμάρια υδατάνθρακες, 103 γραμμάρια λίπη και κοστίζει 24 ευρώ. Κάθε κιλό της τροφής Β περιέχει 60 γραμμάρια πρωτεΐνες, 112 γραμμάρια υδατάνθρακες και 120 γραμμάρια λίπη και κοστίζει 18 ευρώ. Το μείγμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 480 γραμμάρια πρωτεΐνες, 448 γραμμάρια υδατάνθρακες και 720 γραμμάρια λίπη. Ο κτηνοτρόφος θέλει να παρασκευάσει το μείγμα κατά τέτοιο τρόπο που να πληρούνται οι περιορισμοί και να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Αν x_1 και x_2 είναι οι ποσότητες (σε κιλά) των τροφών Α και Β που θα αποτελέσουν το μείγμα με το ελάχιστο κόστος τότε το πρόβλημα σε μαθηματική μορφή είναι:

$$\min_{x_1,x_2} \mathrm{Z} = 24 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2$$

Η σχέση αυτή εκφράζει την οικονομική ή αντικειμενική συνάρτηση της οποίας ζητάμε το ελάχιστο. Στο πρόβλημα αυτό, θα έχουμε ένα σύστημα περιορισμών με τρεις ανισώσεις, όπως φαίνετια στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2.3):

Περιορισμός πρωτεϊνών	$120 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 \geq 480$
Περιορισμός υδατανθρακών	$56 \cdot x_1 + 112 \cdot x_2 \geq 448$
Περιορισμός λιπών	$103 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 \geq 720$

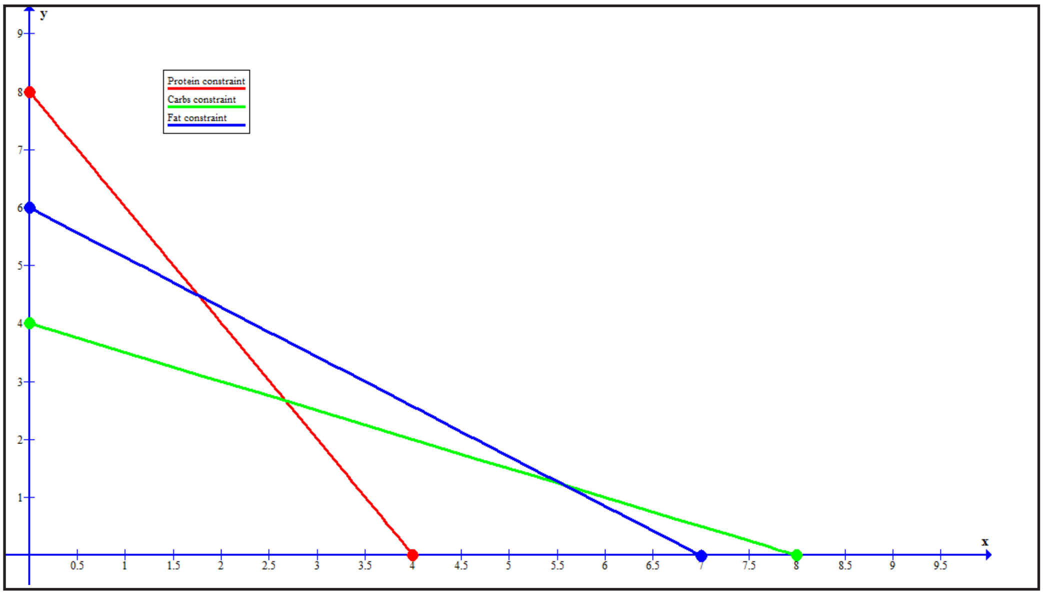
Πίνακας 2.3 *Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης – σύνολο περιορισμών.*

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το μαθηματικό υπόδειγμα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2} \mathrm{Z} = 24 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 \\
&\boldsymbol{s.t.} \\
&120 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 \geq 480 \\
&56 \cdot x_1 + 112 \cdot x_2 \geq 448 \\
&103 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 \geq 720 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

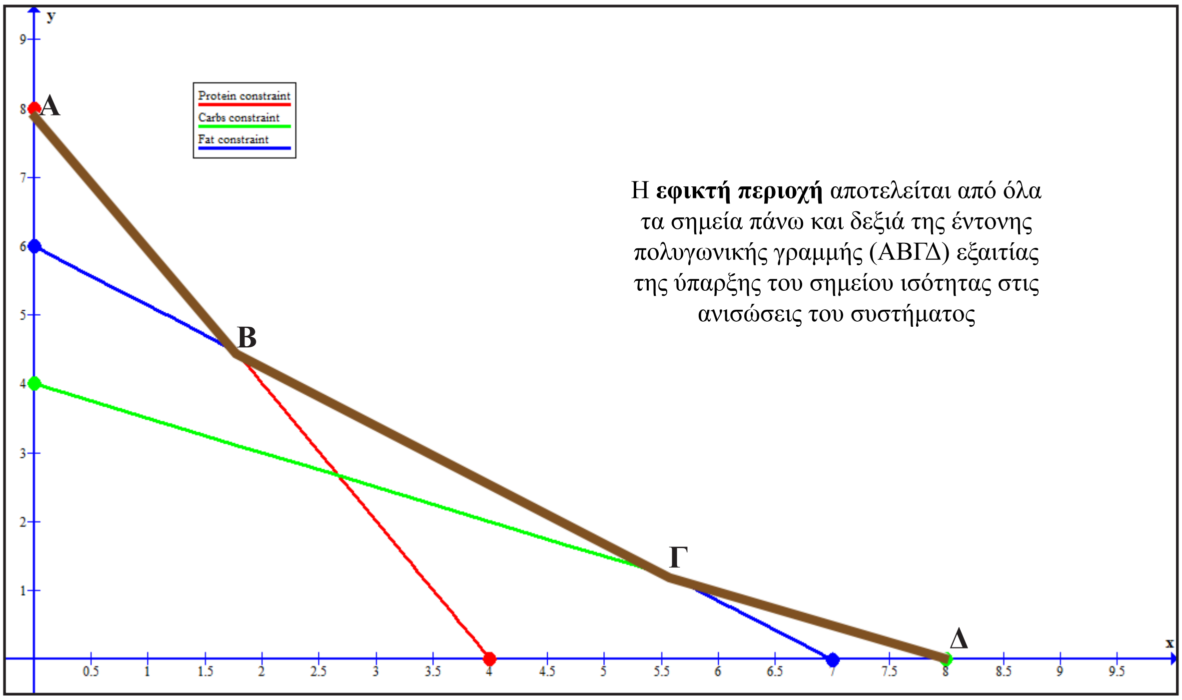
Όπως και στο πρόβλημα μεγιστοποίησης, αρχικά κάνουμε τη γραφική επίλυση του συστήματος των περιορισμών αγνοώντας τις ανισότητες και αντιμετωπίζοντας τους περιορισμούς ως ισότητες ακριβώς μηδενίζοντας εναλλάξ τις μεταβλητές x_1 και x_2 ώστε να υπολογίσουμε τα σημεία τομής με τους άξονες, όπως και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης. Εξαιτίας του περιορισμού μη-αρνητικότητας (τελευταίος περιορισμός παραπάνω) των ποσοτήτων των μεταβλητών απόφασης x_1 και x_2, θα εργασθούμε μόνο στο θετικό τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (καρτεσιανό επίπεδο) όπως ακριβώς και στην περίπτωση του προβλήματος μεγιστοποίησης.

Σ' αυτή την περίπτωση, θα έχουμε $x_2 = 8 - 2 \cdot x_1$, $x_2 = 4 - \frac{1}{2} \cdot x_1$ και $x_2 = 6 - \frac{103}{120} \cdot x_1$. Χρησιμοποιώντας το **Graph** και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τους περιορισμούς και να προσδιορίσουμε την εφικτή περιοχή. Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.17) φαίνονται οι περιορισμοί:



Σχήμα 2.17 *Οι περιορισμοί του προβλήματος.*

Με βάση τα παραπάνω, η εφικτή περιοχή είναι η περιοχή είναι το χωρίο που βρίσκεται στο κάτω από τους περιορισμούς, δηλαδή η περιοχή που ορίζεται από το καφέ πλαίσιο, όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω (Σχήμα 2.18).



Σχήμα 2.18 *Οι περιορισμοί του προβλήματος και η εφικτή περιοχή.*

Θα πρέπει να σημειώσουμε, όπως ήδη έχει προαναφερθεί, ότι λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες θα μπορέσουμε για κάθε ευθεία να καθορίσουμε το ημι-επίπεδο που αναπαριστά ο κάθε περιορισμός. Στην συνέχεια και για τις διαφορετικές (ωστόσο αυθαίρετες) τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, την αναπαριστάνουμε γραφικά όπως και σε προηγουμένη ενότητα (βλέπε Σχήμα 2.3).

Ωστόσο επειδή στην προκειμένη περίπτωση έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ενδιαφερόμαστε για την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αν και στην προκειμένη περίπτωση, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις εφόσον η εφικτή περιοχή είναι μη-φραγμένο σύνολο, δηλαδή υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί x_1 και x_2 που το ικανοποιούν.

Ως εκ τούτου, υπάρχει μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής (που βρίσκεται πάνω στην πολυγωνική γραμμή) η οποία μας δίνει τον βέλτιστο συνδυασμό των x_1 και x_2 και ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Για την εύρεση της «καλύτερης κορυφής» βρίσκουμε την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η κορυφή που απέχει λιγότερο (εφόσον έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης θέλουμε την ελάχιστη απόσταση) από την ευθεία $\min_{x_1,x_2} Z = 24 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2$ είναι αυτή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και συνεπώς είναι η «καλύτερη κορυφή». Έτσι έχουμε:

$$24 \cdot x_1 = Z - 18 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{24} \cdot Z - \frac{18}{24} \cdot x_2$$

και συνεπώς η κλίση είναι: $-\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}$.

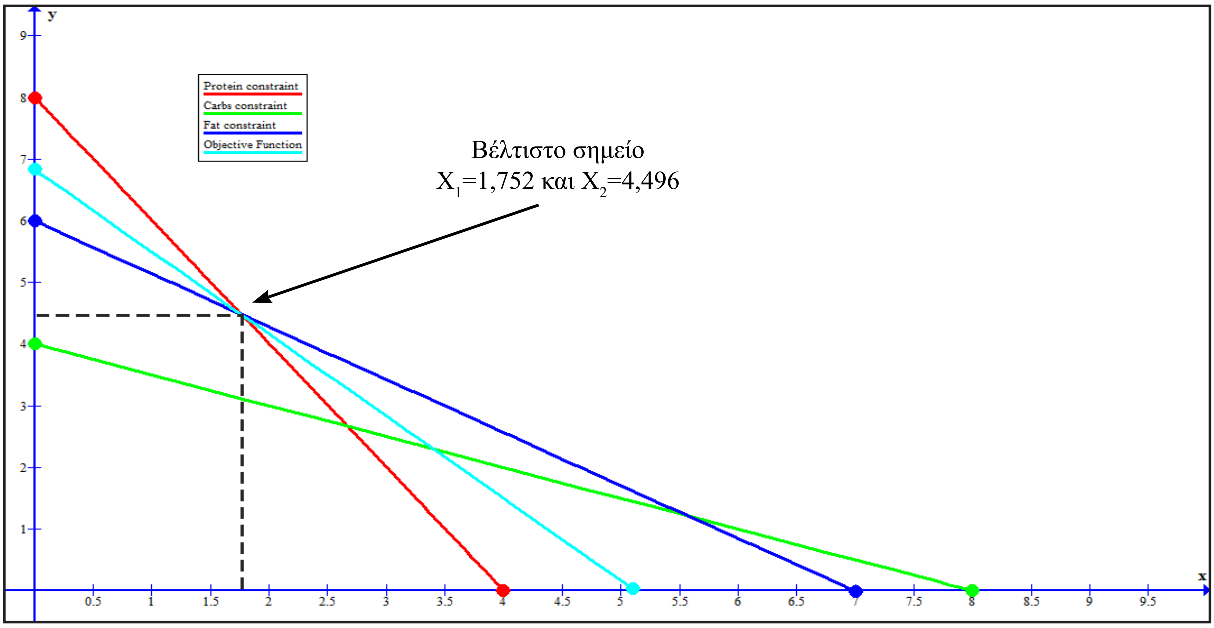
Παρατηρούμε ότι το σημείο τομής του περιορισμού των πρωτεϊνών (*κόκκινη γραμμή*) και του περιορισμού λίπους (*μπλε γραμμή*) όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.19 παρακάτω, απέχει λιγότερο από την ευθεία που περνάει νοητά από την αρχή των αξόνων και συνεπώς οι συντεταγμένες του σημείου αυτού ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση. Για την εύρεση των συντεταγμένων αυτών, λύνεται το σύστημα των ευθειών που η τομή τους είναι το σημείο Γ και το σημείο τομής του θα προσδιορίσει τον συνδυασμό ποσοτήτων που βελτιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση. Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} 120 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 &= 480 \\ 103 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 &= 720 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \cdots\cdots \} \Rightarrow x_1 = 1.752, x_2 = 4.496$$

Ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\min_{x_1,x_2} Z = 24 \cdot 1.752 + 18 \cdot 4.496 = 122.98$$

Συνεπώς, αν ο κτηνοτρόφος θέλει το μείγμα από τις τροφές Α και Β να του κοστίζει το λιγότερο δυνατόν και ταυτόχρονα να πληροί τους περιορισμούς ως προς το ελάχιστο των πρωτεϊνών, υδατανθράκων και λιπών, πρέπει να αναμίξει 1,752 κιλά της τροφής Α με 4,496 κιλά της τροφής Β ενώ σε αυτή την περίπτωση το κόστος του μείγματος αυτών θα είναι €122,98. Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.19) αποτυπώνει το πρόβλημα και την λύση του.



Σχήμα 2.19 *Οι περιορισμοί του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση και το βέλτιστο σημείο.*

2.7 Ειδικές περιπτώσεις

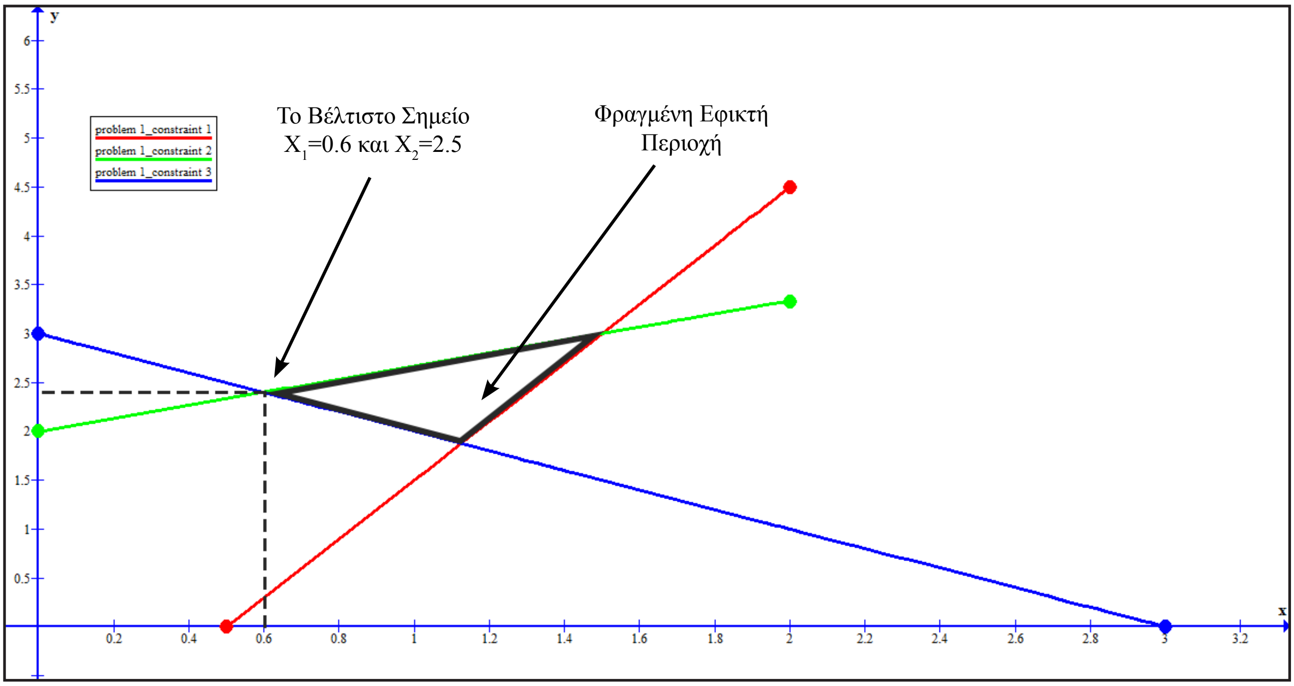
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις που αφορούν στην γραφική επίλυση.

2.7.1 Φραγμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

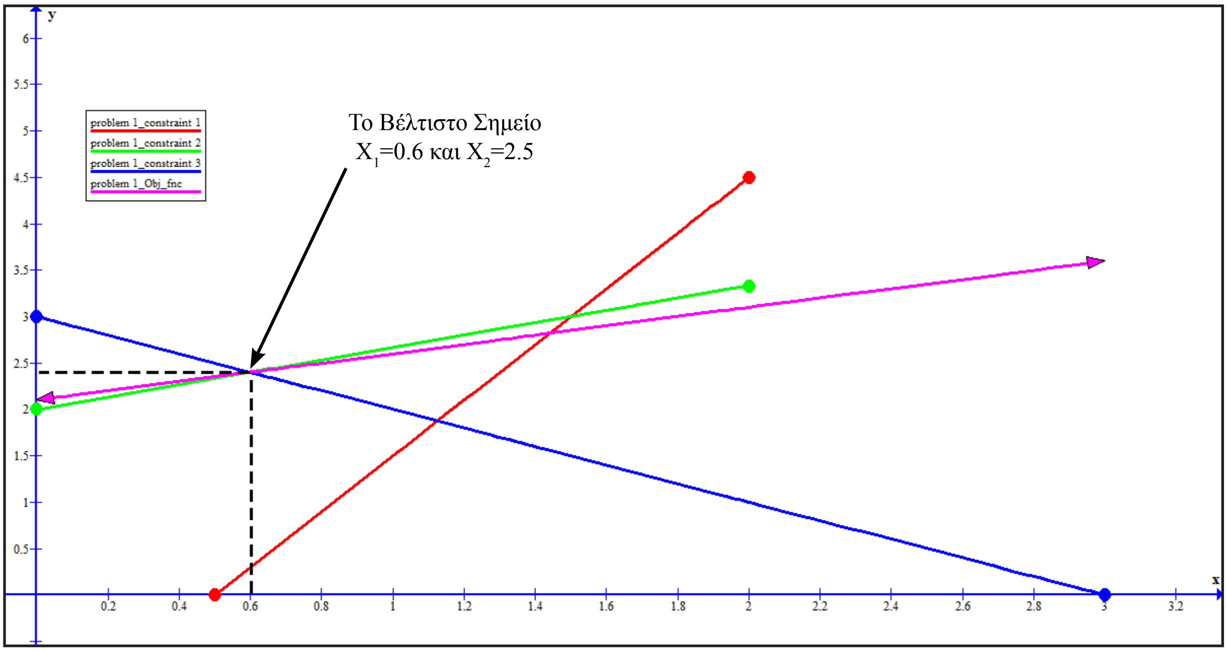
$$\begin{aligned}
&\max_{x_1,x_2} \Pi = -x_1 + 2 \cdot x_2 \\
&\textbf{\textit{s.t.}} \\
&6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 3 \\
&-2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 6 \\
&x_1 + x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.20), απεικονίζει τους περιορισμούς του προβλήματος και ορίζει και την εφικτή περιοχή.



Σχήμα 2.20 *Ειδική περίπτωση 1 - Φραγμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.*

Η αντικειμενική συνάρτηση θα περνάει από το βέλτιστο σημείο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.21).



Σχήμα 2.21 *Ειδική περίπτωση 1 - Φραγμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και αντικειμενική συνάρτηση.*

2.7.2 Μη-φραγμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{x_1,x_2} \Pi = 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2$$

$$\textbf{\textit{s.t.}}$$

$$-3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 6$$

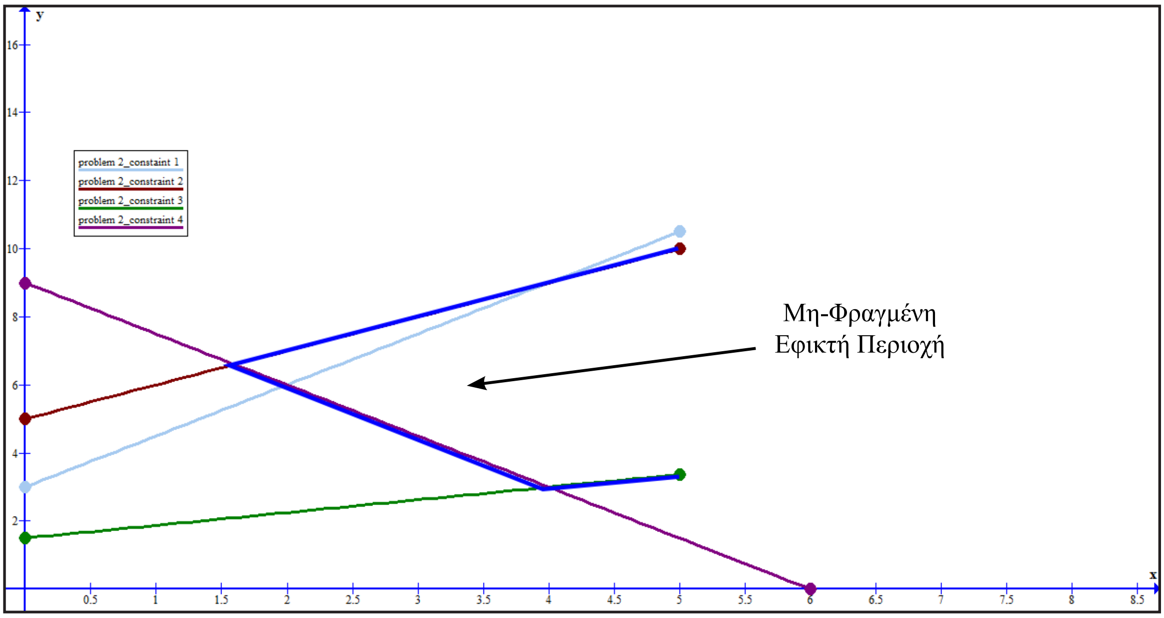
$$-x_1 + x_2 \le 5$$

$$-3\cdot x_1 + 8\cdot x_2 \ge 12$$

$$3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 18$$

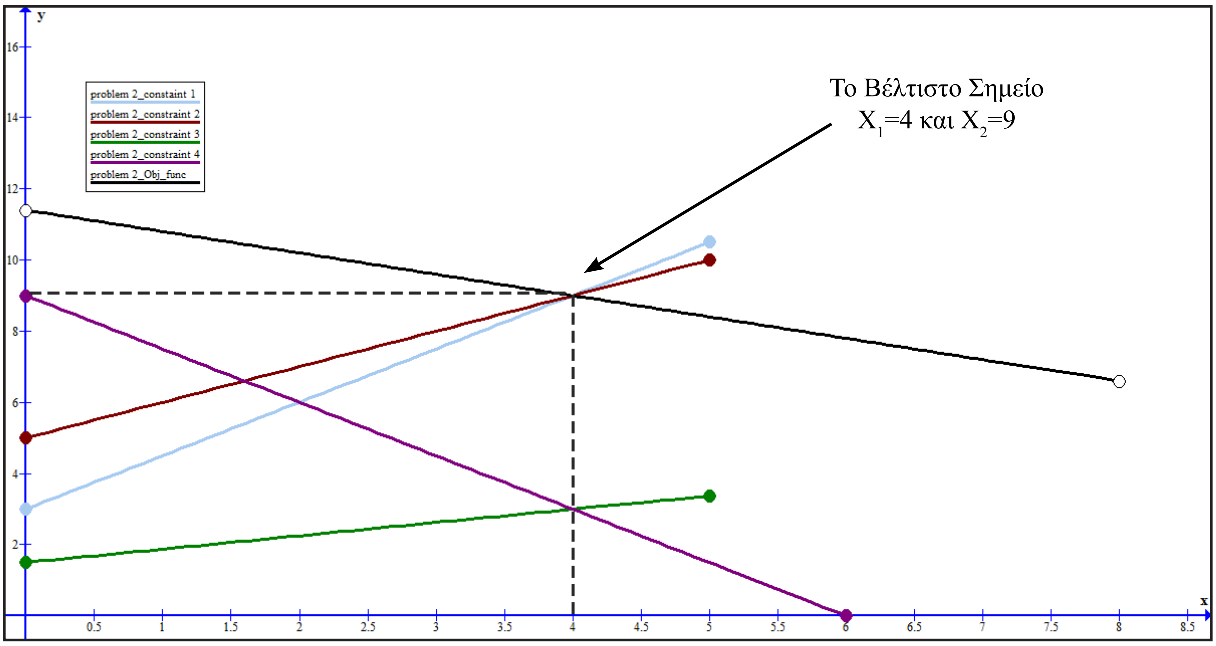
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.22), απεικονίζει τους περιορισμούς του προβλήματος και ορίζει και την εφικτή περιοχή.



Σχήμα 2.22 *Ειδική περίπτωση 2 – Μη-φραγμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.*

Ενώ, η αντικειμενική συνάρτηση περνάει από το σημείο τομής του πρώτου και του δεύτερου περιορισμού, όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.23). Θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι, στην περίπτωση του μη-φραγμένου προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αυξηθεί ανεξέλεγκτα εφόσον το σύνολο των δυνατών λύσεων δεν είναι φραγμένο.



Σχήμα 2.23 *Ειδική περίπτωση 2 – Μη-φραγμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και αντικειμενική συνάρτηση.*

2.7.3 Αμοιβαίως αποκλειόμενοι περιορισμοί

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{x_1,x_2} \Pi = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$$

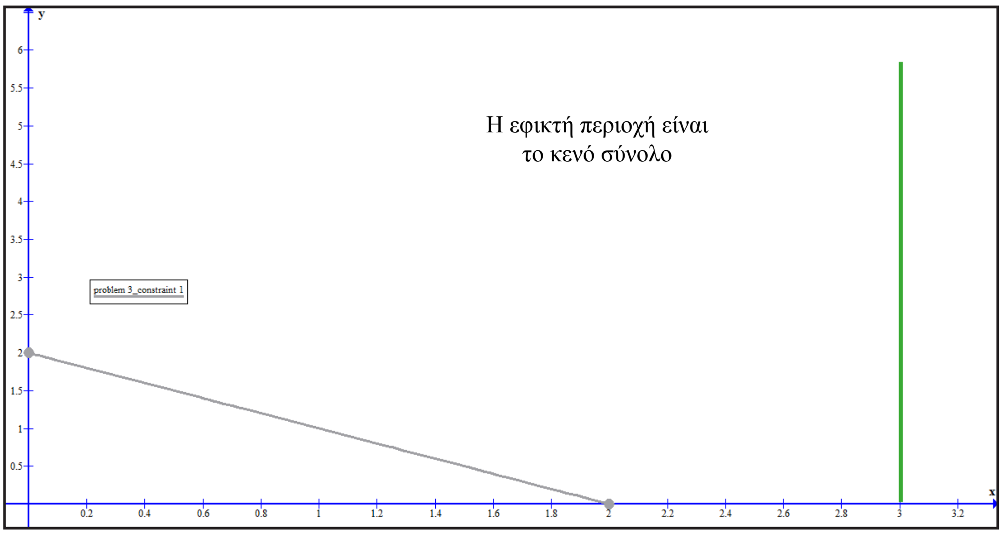
s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ή μόνο } x_2 \geq 0$$

Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.24), αποτελεί την γραφική απεικόνιση του παραπάνω προβλήματος. Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση η εφικτή περιοχή είναι το κενό σύνολο καθώς οι δύο περιορισμοί δεν τέμνονται σε κάποιο σημείο.



Σχήμα 2.24 *Ειδική περίπτωση 3 - Αμοιβαίως αποκλειόμενοι περιορισμοί.*

Προφανώς το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν έχει καμία λύση και συνεπώς δεν μπορεί να επιτευχθεί αριστοποίηση.

2.7.4 Η περίπτωση της εκφυλισμένης βέλτιστης λύσης: πλεονάζον περιορισμός

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{x_1,x_2} \Pi = 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2$$

$$\textbf{\textit{s.t.}}$$

$$2\cdot x_1 + x_2 \leq 230$$

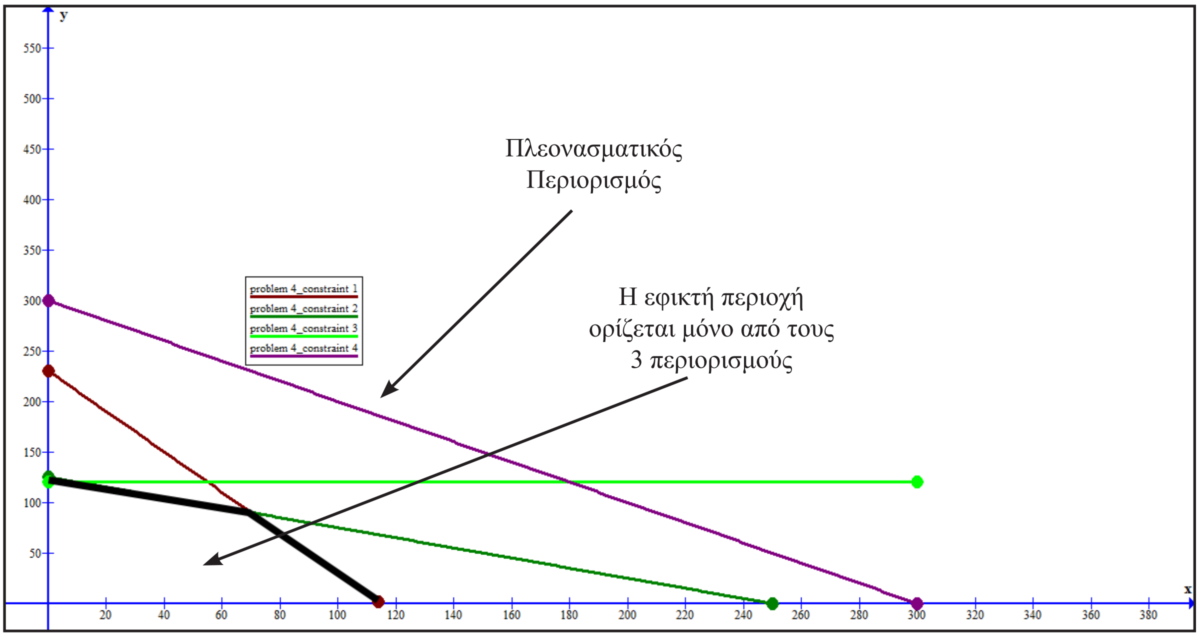
$$x_1 + 2\cdot x_2 \leq 250$$

$$x_2 \leq 120$$

$$x_1 + x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

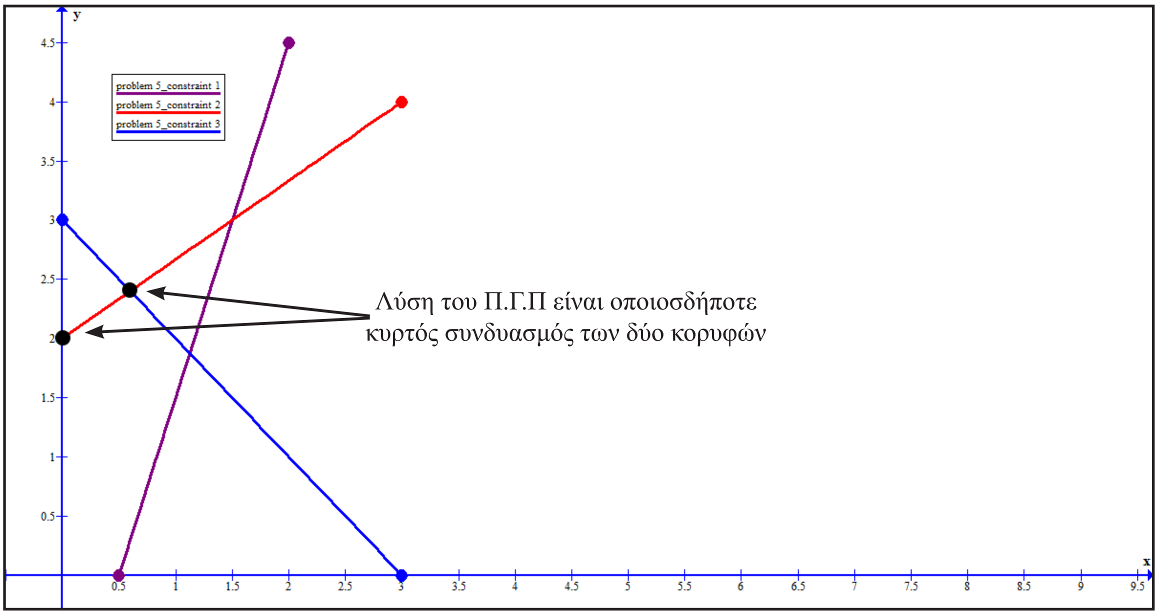
Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.25), αποτελεί την γραφική απεικόνιση του παραπάνω προβλήματος. Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση στον σχηματισμό της εφικτής περιοχής συμμετέχουν μόνο οι τρείς (3) από τους περιορισμούς του προβλήματος μεγιστοποίησης ενώ ο τελευταίος όχι. Σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου δεν συμμετέχουν όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος στον σχηματισμό της εφικτής περιοχής, οι περιορισμοί που δεν συμμετέχουν λέγονται **πλεονασματικοί** και η λύση που προκύπτει λέγεται **εκφυλισμένη**. Στην θεωρία, υπάρχουν τεχνικές εντοπισμού των πλεοναστικών περιορισμών αλλά η περιγραφή τέτοιων μεθόδων ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος.



Σχήμα 2.25 *Ειδική περίπτωση 4 - Εκφυλισμένη βέλτιστη λύση και ύπαρξη πλεονάζοντος περιορισμού.*

2.7.5 Η περίπτωση της απειρίας λύσεων: κυρτός συνδυασμός

Στην περίπτωση κατά την οποία περισσότερες από μια κορυφές της εφικτής περιοχής μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση, τότε προκύπτει απειρία λύσεων καθώς οποιοσδήποτε κυρτός συνδυασμός των κορυφών αυτών ενδεχομένως να αποτελεί βέλτιστη λύση. Μια τέτοια περίπτωση απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.26).



Σχήμα 2.26 *Ειδική περίπτωση 5 - Απειρία λύσεων και κυρτός συνδυασμός.*

Το συγκεκριμένο παράδειγμα μας επιτρέπει να διατυπώσουμε μια από τις πιο γνωστές προτάσεις που αφορούν στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και δηλώνει ότι όταν η βέλτιστη λύση ενός ΠΓΠ δεν είναι μια και μοναδική, υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

2.8 Σύνδεση με τον κατάλογο Ανοικτών Μαθημάτων

Στα πλαίσια του έργου Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα και συγκεκριμένα όσον αφορά στο Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών, οι συγγραφείς έχουν αναπτύξει ψηφιακό υλικό με μορφή διαφανειών και βίντεο-διαλέξεων, για το μάθημα "Επιχειρησιακή Έρευνα (Εφαρμογές με το Λογισμικό **R**)" το οποίο αφορά τόσο στα θέματα που θα παρουσιαστούν στο παρόν σύγγραμμα όσο και στον τρόπο που προσεγγίζεται και διδάσκεται από τους συγγραφείς στο Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Το υλικό του μαθήματος είναι ελεύθερο στον ενδιαφερόμενο χρήστη μέσω της πλατφόρμας ασύγχρονης τηλεκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Πατρών για το Τμήμα Οικονομικών Επιστημών (ECON1318) ενώ το υλικό που σχετίζεται με το παρόν κεφάλαιο μπορεί να βρεθεί εδώ.

2.9 Σύνοψη Δευτέρου Κεφαλαίου και Διδακτικοί Σκοποί

Το παρόν κεφάλαιο σκοπό είχε να παρουσιάσει τα βασικά συστατικά ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (ΠΓΠ), την γραφική επίλυση ΠΓΠ η οποία αποτελεί μια εισαγωγή στις μεθόδους που θα αναλυθούν σε κατοπινά κεφάλαια του παρόντος συγγράμματος καθώς και να παρουσιάσει την ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών από την οποία μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την αξιοπιστία της βέλτιστης λύσης που έχει υπολογιστεί. Από την ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών προκύπτουν οι Σκιώδεις Τιμές που αφορούν στην μεταβολή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτουν από οριακές μεταβολές των ποσοτήτων των διαθέσιμων πόρων και δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν με διαφορετικό τρόπο πέρα από τις μεθόδους του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Επίσης, παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο το πρόβλημα διατυπώνεται σε μαθηματικό υπόδειγμα και με την χρήση του ελεύθερου λογισμικού **Graph** αναπαραστήσαμε την εφικτή περιοχή που προκύπτει από τους περιορισμούς του προβλήματος αλλά και την βέλτιστη λύση του προβλήματος η οποία αντιστοιχεί στο σημείο τομής των περιορισμών. Παρά το γεγονός ότι η γραφική επίλυση, αντικειμενικά, δεν χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερη δυσκολία στην εφαρμογή της είναι αρκετά περιοριστική διότι από την μια πλευρά, μπορεί να αναπαραστήσει πολλούς περιορισμούς ταυτόχρονα αλλά από την άλλη, δεν μπορεί να αναπαραστήσει περισσότερες από δύο μεταβλητές απόφασης καθώς δεν μπορούν να απεικονιστούν γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο.

Τέλος, παρουσιάστηκαν κάποιες ειδικές περιπτώσεις ΠΓΠ που ενδεχομένως να αντιμετωπίσουμε ανάλογα με την φύση του προβλήματος.

Μετά το τέλος αυτού του κεφαλαίου, μεταξύ άλλων, ο αναγνώστης θα πρέπει να είναι σε θέση:

- να χειρίζεται με ευχέρεια τους βασικούς ορισμούς και έννοιες σχετικά με την σύνθεση των ΠΓΠ.
- να σχηματίσει την αντικειμενική συνάρτηση και τους αντίστοιχους περιορισμούς των ΠΓΠ.
- να χρησιμοποιήσει το λογισμικό **Graph** ώστε να αναπαραστήσει τα παραπάνω στο καρτεσιανό επίπεδο είτε πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης.
- να προβεί σε ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών ώστε να υπολογίσει τις Σκιώδεις Τιμές των περιορισμών και να τις ερμηνεύσει σωστά.
- να έχει κατανοήσει ότι κάθε περιορισμός συνδέεται με μια Σκιώδη Τιμή καθώς και για ποιον λόγο είναι απαραίτητη η ανάλυση ευαισθησίας της βέλτιστης λύσης.
- να αναγνωρίζει τις ειδικές περιπτώσεις ΠΓΠ.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Ελληνική Βιβλιογραφία:

Κολέτσος, Ι. και Στογιάννης, Δ., (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.

Λουκάκης Μ., (1990). *Επιχειρησιακή Έρευνα: Γραμμικός Προγραμματισμός, Αριστοποίηση σε Δίκτυα*, τόμος Α, Εκδοτικό Κέντρο Βόρειας Ελλάδας.

Μηλιώτης, Π., (1994*). Εισαγωγή στο Μαθηματικό Προγραμματισμό*. Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα.

Μπότσαρης, Χ.,(1991). *Επιχειρησιακή Έρευνα*, τόμος Ι, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Γεωργίου, Α.Κ., Οικονόμου Γ.Σ. και Γ.Δ. Τσιότρας (2006). *Μελέτες Περιπτώσεων Επιχειρησιακής Ερευνας*. Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

Πραστάκος Γ., Διοικητική Επιστήμη, Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων στην Κοινωνία της Πληροφορίας, Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα.

Σίσκος, Γ., (1998). *Γραμμικός Προγραμματισμός*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

Τσάντας Ν.Δ. και Βασιλείου Γ. Π-Χ (2000). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα:* Αλγόριθμοι και Εφαρμογές. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Υψηλάντης, Γ. Π., (2012). *Επιχειρησιακή έρευνα: Εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση*. 4η έκδ., Εκδόσεις Προπομπός (Ειδικές Επιστημονικές Εκδόσεις), Αθήνα.