ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ: 2020-2021 εαρινό εξάμηνο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

Κουνετάς Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΤΟΕ Παν. Πατρών,
kounetas@upatras.gr

Ρήγας Νίκος, Υπ. Διδάκτορας ΤΟΕ Παν. Πατρών,

nrigas@upnet.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 9/04/2021

- Ονομάζουμε πίνακα (ή μήτρα ή matrix)τύπου μ*ν, κάθε διάταξη σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες. Δηλαδή, οι πίνακες είναι ορθογώνιες διατάξεις αριθμών ή στοιχείων. $A = [a_{(ij)}]$
- $a_{ij} \rightarrow \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau o\upsilon\ \pi\acute{\iota}\nu\alpha\kappa\alpha, i - \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta},\ j - \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta$
- Πότε είναι 2 πίνακες ίσοι;
  - Ίδιος αριθμός γραμμών
  - Ίδιος αριθμός στηλών
  - Έχουν ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία τους
- Πίνακας γραμμής → $A = [-2 \quad 4 \quad 0 \quad -6]$
- Πίνακας στήλη → $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- Πίνακας στοιχείο $A = [1], \Gamma = [-3]$
- *Τετραγωνικός πίνακας*: όταν και μόνο όταν έχει ίδιο αριθμό στήλες και γραμμές. Τα στοιχεία α_{ii}ονομάζονται διαγώνια στοιχεία του Α. Σχηματίζουν την κύρια διαγώνιο
- *Διαγώνιος πίνακας:* όταν είναι τετραγωνικός και όλα τα στοιχεία του που δεν βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν
- *Μοναδιαίος πίνακας:* όταν είναι διαγώνιος και όλα τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο(κδ) είναι 1
- *Άνω τριγωνικός:* όταν είναι μη-μηδενικά μόνο τα στοιχεία πάνω από την κδ
- Αν πίνακας $A = [a_{(ij)}]$ μ*ν και $B = [\beta_{(ij)}]$ ν*ρ, τότε ορίζουμε ως γινόμενο του Α με τον Β, τον πίνακα τύπου μ*ρ, του οποίου κάθε στοιχείο Y_{ij}είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της *i*– γραμμής του Α με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της *j* – στήλης του Β πίνακα.
- *Ανάστροφη μήτρα:* ανάστροφη μιας μήτρας Α(ν*κ) είναι μια μήτρα κ*ν, της οποίας οι γραμμές αντιστοιχούν στις στήλες της Α

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- *Ίχνος μήτρας:* τοίχνος μιας τετραγωνικής μήτρας Α ν*ν δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της κδ$TR = \sum_{i=1}^{\nu} A_{ij}$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να σχηματίσετε τον πίνακα $A = [a_{(ij)}]$ τύπου 3*2 όταν για κάθε *i*, *j* ισχύει $a_{ij} = i^2 - 2j + 1$

ΛΥΣΗ

$$A = \left[a_{(ij)}\right] \rightarrow 3 * 2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = i^2 - 2j + 1 = 1^2 - 2 * 1 + 1 = 0$$

$$\alpha_{12} = i^2 - 2j + 1 = 1^2 - 2 * 2 + 1 = -2$$

$$\alpha_{21} = i^2 - 2j + 1 = 2^2 - 2 * 1 + 1 = 3$$

$$\alpha_{22} = i^2 - 2j + 1 = 2^2 - 2 * 2 + 1 = 1$$

$$\alpha_{31} = i^2 - 2j + 1 = 3^2 - 2 * 1 + 1 = 8$$

$$\alpha_{32} = i^2 - 2j + 1 = 3^2 - 2 * 2 + 1 = 6$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ Να βρεθούν τα *A*B, A-2B,* $(A^t)^2$

ΛΥΣΗ

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*3 & 1*0+2*2 \\ 3*2+1*3 & 3*0+1*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & 0+4 \\ 6+3 & 0+2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$
$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^t * A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+3*2 & 1*3+3*1 \\ 2*1+1*2 & 2*3+1*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$A_{4*2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 7 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, B_{2*4} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A * B = ?$$

ΛΥΣΗ

$$A*B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 6\\ 7 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 6 & 3 & -4 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1*3+0*6 & 1*1+0*3 & 1*0-4*0 & 1*(-1)-1*0\\ -3*3+6*6 & -3*1+6*3 & -3*0-6*4 & -3*(-1)-6*1\\ 7*3+2*6 & 7*1+2*3 & 7*0-2*4 & -7*1-2*1\\ -1*3+5*6 & -1*1+5*3 & -1*0-5*4 & -1*(-1)-5*1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 25 & 15 & -24 & -3\\ 33 & 13 & 8 & -9\\ 27 & 14 & -20 & -4\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογίσετε τα $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\nu}, \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{\nu}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Δουλεύουμε επαγωγικά, δηλαδή για $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\nu}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1*1+0 & 1*1+1*1\\ 0+0 & 0+1*1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{3}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{2}*\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1*1+2*0 & 1*1+2*1\\ 0+0 & 0+1*1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\nu}=\begin{pmatrix}1 & \nu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ομοίως για $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{\nu}$

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+0 & \lambda+\lambda\\ 0+0 & 0+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{3}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{2}*\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{\nu} = \begin{pmatrix} \lambda^{\nu} & \nu\lambda^{\nu-1} \\ 0 & \lambda^{\nu} \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι ποσότητες για 4 αγαθά που αγοράζονται από 2 καταναλωτές και οι τιμές των αγαθών αυτών κατά τη διάρκεια 3 διαφορετικών ημερών.

-Τι εκφράζει κάθε στήλη γραμμή στους 2 πίνακες;

-Ποια είναι η δαπάνη του κάθε ατόμου ανά ημέρα;

$$Q_{3*4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, P_{4*2} = \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ 30 & 45 \\ 40 & 65 \\ 50 & 85 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ \alpha\gamma\alpha\theta o1 & \alpha\gamma\alpha\theta o2 & \alpha\gamma\alpha\theta o3 & \alpha\gamma\alpha\theta o4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta\mu\varepsilon\rho\alpha\ 1 \\ \eta\mu\varepsilon\rho\alpha\ 2 \\ \eta\mu\varepsilon\rho\alpha\ 3 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ 30 & 45 \\ 40 & 65 \\ 50 & 85 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha\gamma\alpha\theta o1 \\ \alpha\gamma\alpha\theta o2 \\ \alpha\gamma\alpha\theta o3 \\ \alpha\gamma\alpha\theta o4 \end{matrix}$$

$$\kappa\alpha\tau\alpha\nu\alpha\lambda\omega\tau\eta\varsigma 1 \quad \kappa\alpha\tau\alpha\nu\alpha\lambda\omega\tau\eta\varsigma 2$$

$$Q * P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ 30 & 45 \\ 40 & 65 \\ 50 & 85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1*20+2*30+3*40+4*50 & 1*35+2*45+3*65+4*85 \\ 5*20+6*30+7*40+8*50 & 5*35+6*45+7*65+8*85 \\ 9*20+10*30+11*40+12*50 & 9*35+10*45+11*65+12*85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20+60+120+200 & 35+90+195+340 \\ 100+180+280+400 & 175+270+455+680 \\ 180+300+440+600 & 315+450+715+1020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 660 \\ 960 & 1580 \\ 1520 & 2500 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθεί η ορίζουσα των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2*1-3*4=-10$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 2*(-3)-0*3=-6$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)*6-3*(-4)=-6+12=6$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha-5(-3)=2\alpha+15$$

Ορίζουσα 3x3

Θεωρούμε ελάσσων ορίζουσα (δηλαδή μικρότερη) και είναι η ορίζουσα που παίρνουμε με την απάλειψη της γραμμής και της στήλης στην οποία βρίσκεται το α_{11} στοιχείο. Το πρόσημο της ελάσσονος ορίζουσας δίνεται από

$$\alpha_{rs} = (-1)^{rs}|A_{rs}|$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Ελάσσωντου α11 $|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3*5-3*6=-3$

Ελάσσωντου α21 $|A_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(2*5-3*6)=8$

Ελάσσωντου α31 $|A_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2*3-3*3=-3$

Ελάσσωντου α12 $|A_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(2*5-3*4) = 2$

Ελάσσωντου α22 $|A_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1*5-3*4 = -7$

Ελάσσωντου α32 $|A_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)*(1*3-3*2) = 3$

Ελάσσωντου α13 $|A_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2*6-3*4 = 0$

Ελάσσωντου α23$|A_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)*(2*4-1*6) = 2$

Ελάσσωντου α33$|A_{33}| = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1*3-2*2 = -1$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρεθεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ

$$det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2*\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 4*\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (45-48) - 2*(36-42) + \ 4*\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3+12-12 = -3$$

$$det\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)*\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2*\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2*\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(20-3) + 2(15+1) - 2(9+4) = \ -34+32-26 = -26$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1) Να βρεθεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, απ. *9*

2) $A = \begin{bmatrix} \chi+2 & 3 \\ 1 & \chi-1 \end{bmatrix}$. Να λυθεί αν $|A| \geq 1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 16/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} \chi+3 & 2\chi & 3\chi-1 \\ -3 & 2\chi-6 & -\chi-1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ΛΥΣΗ

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \chi+3 & 2\chi & 3\chi-1 \\ -3 & 2\chi-6 & -\chi-1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 =>$$

$$(\chi+3)\begin{vmatrix} 2\chi-6 & -\chi-1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 2\chi\begin{vmatrix} -3 & -\chi-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (3\chi-1)\begin{vmatrix} -3 & 2\chi-6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 =>$$

$$(\chi+3)(2\chi-6+5\chi+5) - 2\chi(-3+\chi+1) + (3\chi-1)(-15-2\chi+6) = 0 =>$$

$$(\chi+3)(7\chi-1) - 2\chi(\chi-2) + (3\chi-1)(-2\chi-9) = 0 =>$$

$$7\chi^2 + 21\chi - \chi - 3 - 2\chi^2 + 4\chi - 6\chi^2 - 27\chi + 2\chi + 9 = 0 =>$$

$$-\chi^2 + \chi + 6 = 0$$

Άρα χ= -3 ή χ= 2

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$A = \begin{bmatrix} \chi+2 & 3 \\ 2 & \chi-1 \end{bmatrix}. N\alpha\ \lambda\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \alpha\nu\ |A| \geq 1$$

ΛΥΣΗ

$$|A| = \begin{vmatrix} \chi+2 & 3 \\ 2 & \chi-1 \end{vmatrix} = (\chi+2)(\chi-1) - 6 = \chi^2 + \chi - 5$$

$$|A| \geq 1 => \chi^2 + \chi - 5 \geq 0 \ <=> \chi \leq -3 \ \text{ ή } \chi \geq 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν ο Α αντιστρέφεται και ισχύει $A = A^{-1}$να βρείτε A^{200} , A^{333}, A^{-1992}

ΛΥΣΗ

$$A^2 = A * A = A * A^{-1} = I$$

$$A^3 = A^2 * A = I * A = A$$

$$A^{200} = (A^2)^{100} = I^{100} = I$$

$$A^{333} = A^{332+1} = A^{332} * A = (A^2)^{166} * A = I^{166} * A = A$$

$$A^{-1992} = (A^{-1})^{1992} = I^{1992} = (A^2)^{996} = I^{996} = I$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να βρεθεί ο αντίστροφος: $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε την ορίζουσα του Α

$$detA = 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(-1) + 0 + 1 = -1 \neq 0$$

Βρίσκουμε τις ελάσσονες ορίζουσες

$$A_{11} = det\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = det\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = det\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = det\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = det\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{23} = det\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = det\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = det\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = det\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθεί η ορίζουσα: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ

$$det\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = (1)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Γραμμικά συστήματα

Γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \ldots + \alpha_\nu\chi_\nu = \ \beta$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \ \lambda έγονται \ συντελεστές \ των \ αγνώστων \ και \ \beta \ ο \ σταθερός \ όρος$$

Σύστημα μχν ονομάζουμε ένα πεπερασμένο πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους των οποίων ζητάμε κοινές λύσεις.

Συμβιβαστό λέγεται ένα σύστημα όταν έχει τουλάχιστον μια λύση. Αδύνατο λέγεται όταν δεν έχει καμία λύση.

Επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος μxν ονομάζουμε τον πίνακα μx(ν+1) των συντελεστών των αγνώστων συμπληρωμένος με τη στήλη των σταθερών όρων.

Πχ $\begin{cases} 2\chi-\psi+\omega=1 \\ 3\psi+5\omega=0 \\ \chi-\omega=2 \end{cases}$ μπορεί να γραφεί Α*Χ=Β, όπου

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ και ο επαυξημένος } A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Γραμμοπράξεις λέμε τις επιτρεπτές μετατροπές που κάνουμε στις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_\mu$ του επαυξημένου πίνακα ενός συστήματος μxν με στόχο να προκύψει σύστημα, ισοδύναμο προς το αρχικό αλλά απλούστερης μορφής. Μπορούμε να:

1. Εναλλάξουμε την θέση 2 γραμμών
2. Πολλ/ουμε μια γραμμή με έναν μη μηδενικό αριθμό
3. Πολλ/ουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με έναν αριθμό και τα προσθέτουμε στα στοιχεία μιας άλλης γραμμής

Πχ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 + (-3) * \Gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 5 & | & 1 \end{bmatrix}$

Ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ονομάζεται ένας πίνακας αν ισχύουν συγχρόνως όλα τα παρακάτω:

1. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές (αν υπάρχουν)
2. Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής
3. Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ποιοι από τους παρακάτω είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Delta=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Α & Β ναι

Γ όχι γιατί δεν είναι 0 όλα τα στοιχεία πάνω από το 1 στην $3^η$ γραμμή

Δ όχι γιατί το 1 της 3ης γραμμής δεν βρίσκεται δεξιότερα από το 1 της 2ης γραμμής

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να γράψετε τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι ισότητες:

I) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\iota\iota$) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \zeta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

I) $\begin{cases} 2\chi + \psi - 3\omega = 1 \\ 4\chi + 0\psi - 4\omega = -2 \\ 5\chi - \psi + 0\omega = 0 \\ 5\chi + 3\psi + 2\omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi + \psi - 3\omega = 1 \\ 4\chi - 4\omega = -2 \\ 5\chi - \psi = 0 \\ 5\chi + 3\psi + 2\omega = 3 \end{cases}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & | & 1 \\ 4 & 0 & -4 & | & -2 \\ 5 & -1 & 0 & | & 0 \\ 5 & 3 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}$

$\iota\iota$) $\begin{cases} 1\chi - 2\psi + 0\zeta + 3\omega = 0 \\ 4\chi + \psi - 5\zeta + 0\omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - 2\psi + 3\omega = 0 \\ 4\chi + \psi - 5\zeta = 1 \end{cases}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & | & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος με τον αλγόριθμο Gauss

$$\begin{cases} 2\chi - 3\psi + 2\omega + 3\varphi = 1 \\ \chi - 2\omega + 2\varphi = 6 \\ 3\chi + \psi - \omega + 3\varphi = 8 \\ 4\chi - \omega = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 & | & 11 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & | & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3$$
$$\to \Gamma_3 - 3\Gamma_1, \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & | & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & | & -10 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & | & -23 \end{bmatrix} \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & | & -10 \\ 0 & -3 & 6 & -1 & | & -11 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & | & -23 \end{bmatrix} \Gamma_3$$

$$\to \Gamma_3 + 3\Gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & | & -10 \\ 0 & 0 & 21 & 10 & | & -41 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & | & -23 \end{bmatrix} \Gamma_4$$

$$\to 3\Gamma_4 - \Gamma_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & | & -10 \\ 0 & 0 & 21 & 10 & | & -41 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & | & -28 \end{bmatrix} \Gamma_4 \to -\frac{1}{14}\Gamma_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & | & -10 \\ 0 & 0 & 21 & 10 & | & -41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_4, \Gamma_2 \to \Gamma_2 + 3\Gamma_4, \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 10\Gamma_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & | & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \Gamma_3 \to \frac{1}{21}\Gamma_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_3,\ \Gamma_2$$

$$\to \Gamma_2 - 5\Gamma_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει τη μοναδική λύση (χ, ψ, ω, φ)=(0, 1, -1, -2)

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρείτε τους α, β, γ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \alpha\chi - \beta\psi + \omega = 5 \\ \chi + 3\gamma\psi - \alpha\omega = 10 \\ \alpha\chi + \beta\psi + \gamma\omega = 3 \end{cases}$ να έχει λύση την

(χ, ψ, ω)=(3,1,-2)

ΛΥΣΗ

Το σύστημα έχει σαν λύση την (χ, ψ, ω)=(3,1,-2) όταν υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} \alpha * 3 - \beta * 1 - 2 = 5 \\ 3 + 3 * \gamma + 2 * \alpha = 10 \\ \alpha * 3 + \beta * 1 - \gamma * 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 7 \\ 2\alpha + 3\gamma = 7 \\ 3\alpha + \beta - 2\gamma = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 7 \\ 2 & 0 & 3 & | & 7 \\ 3 & 1 & -2 & | & 3 \end{bmatrix} \Gamma_2 \to 3\Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 2 & 9 & | & 7 \\ 0 & 2 & -2 & | & -4 \end{bmatrix} \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 2 & 9 & | & 7 \\ 0 & 0 & -11 & | & -11 \end{bmatrix} \Gamma_3 \to -\frac{1}{11}\Gamma_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 2 & 9 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 9\Gamma_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \Gamma_1 \to 2\Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα (α, β, γ)=(2, -1, 1)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 23/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να εξεταστεί για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις και καμία λύση.

$$x + y + az = 1$$

$$-2x - y + z = b$$

$$x - y + 2z = a$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & -1 & z \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 2 & a \end{array}\right) \sim \Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1+2\alpha & 1+b \\ 1 & -1 & 2 & a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1+2\alpha & 1+b \\ 0 & -2 & 2-\alpha & a-1 \end{array}\right) \sim \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1+2\alpha & 1+b \\ 0 & 0 & 3\alpha+4 & a+2b+1 \end{array}\right)$$

1η περίπτωση:

Έστω $3\alpha + 4 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{4}{3} \to \mu o \nu \alpha \delta \iota \kappa \acute{\eta}\ \lambda \acute{\upsilon} \sigma \eta$

2η περίπτωση:

Έστω $3\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$

Αν $a + 2b + 1 \neq 0 \to \sigma \acute{\upsilon} \sigma \tau \eta \mu \alpha\ \alpha \delta \acute{\upsilon} \nu \alpha \tau o$

Αν $a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + 2b = 1 \Rightarrow 2b = -\frac{7}{3} \Rightarrow b = -\frac{7}{6} \to \acute{\alpha} \pi \varepsilon \iota \rho \varepsilon \varsigma\ \lambda \acute{\upsilon} \sigma \varepsilon \iota \varsigma$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί το σύστημα

$$x-2y+w=0$$

$$2x-y+5w=-3$$

$$3x+y+2w=1$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 2 & -1 & 5 & | & -3\\ 3 & 1 & 2 & | & 1\end{pmatrix}\sim\Gamma_2\to(-2)\Gamma_1+\Gamma_2\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 3 & 3 & | & -3\\ 3 & 1 & 2 & | & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\Gamma_3\to(-3)\Gamma_1+\Gamma_3\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 3 & 3 & | & -3\\ 0 & 7 & -1 & | & 1\end{pmatrix}\sim\Gamma_2\to\frac{\Gamma_2}{3}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & | & -1\\ 0 & 7 & -1 & | & 1\end{pmatrix}\sim\Gamma_3\to 7\Gamma_2-\Gamma_3\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & | & -1\\ 0 & 0 & 8 & | & -8\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\Gamma_3\to\frac{\Gamma_3}{8}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & | & -1\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix}\sim\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix}\sim\Gamma_1\to\Gamma_1+2\Gamma_2\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος μετατράπηκε σε μοναδιαίος

X=1, Y=0, W=-1 (X, Y, W) = (1, 0, -1)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 7\end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 4 & 1 & 0 & | & -2 \\ -2 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \Gamma_2 \to \Gamma_2 + (-2)\Gamma_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -4 \\ -2 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -4 \\ 0 & 2 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -4 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθεί το σύστημα

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 2 & 4 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 2 & 4 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Οι εξισώσεις που προσδιορίζουν ένα υπόδειγμα 2 χωρών με εμπορικές συναλλαγές μεταξύ τους είναι οι εξής:

$$Y_1 = C_1 + I_1^* + X_1 - M_1 \quad | \quad Y_2 = C_2 + I_2^* + X_2 - M_2$$

$$C_1 = 0{,}8Y_1 + 200 \quad | \quad C_2 = 0{,}9Y_2 + 100$$

$$M_1 = 0{,}2Y_1 \quad | \quad M_2 = 0{,}1Y_2$$

Εκφράστε το σύστημα σε μορφή πίνακα.

ΛΥΣΗ

Έχουμε 6 εξισώσεις για 6 ενδογενείς μεταβλητές $\rightarrow Y_1, C_1, M_1, Y_2, C_2, M_2$

Αντί να φτιάξουμε έναν 6x6 πίνακα θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς που μπορούμε για να καταλήξουμε σε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους.

$$Y_1 = 0{,}8Y_1 + 200 + I_1^* + X_1 - 0{,}2Y_1$$

$$Y_2 = 0{,}9Y_2 + 100 + I_2^* + X_2 - 0{,}1Y_2$$

Υπόδειγμα 2 χωρών με εμπορικές συναλλαγές μεταξύ τους άρα$X_1 = M_2 = 0{,}1Y_2 \ \kappa\alpha\iota \ \ X_2 = M_1 = 0{,}2Y_1$

$$Y_1 = 0{,}8Y_1 + 200 + I_1^* + X_1 - 0{,}2Y_1 \Rightarrow Y_1 = 0{,}8Y_1 + 200 + I_1^* + 0{,}1Y_2 - 0{,}2Y_1$$

$$\Rightarrow 0{,}4Y_1 - 0{,}1Y_2 = 200 + I_1^* \qquad (1)$$

$$Y_2 = 0{,}9Y_2 + 100 + I_2^* + X_2 - 0{,}1Y_2 \Rightarrow Y_2 = 0{,}9Y_2 + 100 + I_2^* + 0{,}2Y_1 - 0{,}1Y_2$$

$$\Rightarrow \ -0{,}2Y_1 + 0{,}2Y_2 = 100 + I_2^* \quad (2)$$

Από *(1)&(2):*

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 + I_1^* \\ 100 + I_2^* \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \, , \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 5\Gamma_1 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 - 2*1 & 3 - 2*1 & 3 - 2*(-2) & -1 - 2*3 & 3 - 2*4 \\ 5 - 5*1 & 7 - 5*1 & 4 - 5*(-2) & 1 - 3*5 & 5 - 4*5 \end{bmatrix} \sim$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\0 & 1 & 7 & -7 & -5\\0 & 2 & 14 & -14 & -15\end{bmatrix}\sim \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\0 & 1 & 7 & -7 & -5\\0-2*0 & 2-2*1 & 14-2*7 & -14-2*(-7) & -15-2*(-5)\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\0 & 1 & 7 & -7 & -5\\0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\0 & 1 & 7 & -7\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_1\\\chi_2\\\chi_3\\\chi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-5\\-5\end{bmatrix}$$

Επειδή η τελευταία εξίσωση είναι

$$0\chi_1 + 0\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 = -5$$

Η οποία είναι αδύνατη άρα και το αρχικό σύστημα δεν έχει λύση

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λυθεί το σύστημα με τον κανόνα Cramer

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-4 & 1 & 6\\2 & 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-9\\13\end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$detA = det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-4 & 1 & 6\\2 & 7 & 5\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 6\\7 & 5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-4 & 6\\2 & 5\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-4 & 1\\2 & 7\end{vmatrix}$$
$$= (5-42) - 2(-20-12) + 3(-28-2) = -37 + 64 - 90 =$$

$$= -63 \neq 0$$

$$detA_1 = det\begin{pmatrix}9 & 2 & 3\\-9 & 1 & 6\\13 & 7 & 5\end{pmatrix} = 9\begin{vmatrix}1 & 6\\7 & 5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-9 & 6\\13 & 5\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-9 & 1\\13 & 7\end{vmatrix} = -315$$

$$detA_2 = det\begin{pmatrix}1 & 9 & 3\\-4 & -9 & 6\\2 & 13 & 5\end{pmatrix} = 63$$

$$detA_3 = det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -4 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix} = -126$$

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = -\frac{315}{-63} = 5$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{63}{-63} = -1$$

$$x_3 = \frac{detA_3}{detA} = -\frac{126}{-315} = 0,4$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Μια επιχείρηση παράγει 3 διαφορετικά προϊόντα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς. Να υπολογίσετε τις τιμές και ποσότητες ισορροπίας για κάθε προιόν

$$Q_{D1} = 45 - 2P_1 + 3P_2 - 7P_3 \mid Q_{S1} = -5 + 4P_1$$

$$Q_{D2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 3P_3 \mid Q_{S2} = -19 + 5P_2$$

$$Q_{D3} = 30 - P_1 + 2P_2 - 8P_3 \mid Q_{S3} = -6 + 2P_3$$

ΛΥΣΗ

$$Q_{D1} = Q_{S1} \Rightarrow 45 - 2P_1 + 3P_2 - 7P_3 = -5 + 4P_1 \Rightarrow -6P_1 + 3P_2 - 7P_3 = -50$$

$$Q_{D2} = Q_{S2} \Rightarrow 16 + 2P_1 - P_2 + 3P_3 = -19 + 5P_2 \Rightarrow 2P_1 - 6P_2 + 3P_3 = -35$$

$$Q_{D3} = Q_{S3} \Rightarrow 30 - P_1 + 2P_2 - 8P_3 = -6 + 2P_3 \Rightarrow -P_1 + 2P_2 - 10P_3 = -36$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & -7 \\ 2 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -35 \\ -36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & -7 & -50 \\ 2 & -6 & 3 & -35 \\ -1 & 2 & -10 & -36 \end{bmatrix} \sim \Gamma_2 \to 3\Gamma_2 + \Gamma_1 \sim \Gamma_3 \to 6\Gamma_3 - \Gamma_1 \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{9}{15}\Gamma_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & -7 & -50 \\ 0 & -15 & 2 & -155 \\ 0 & 0 & -71,2 & -296 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,8 \\ 18,6 \\ 4,15 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,2 \\ 74 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 14/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι 1ης τάξης

$$\alpha) f(x,y) = \frac{3x - y^2}{x^2 + 1}$$

$$\beta) f(x,y) = e^{xy^2}$$

$$\gamma) f(x,y) = \ln(x^2 - 4xy + y^2)$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{3x-y^2}{x^2+1}\right)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(3x-y^2)}{\partial x} * (x^2+1) - \frac{\partial(x^2+1)}{\partial x} * (3x - y^2)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{\left(3(x^2+1) - 2x(3x-y^2)\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{3x-y^2}{x^2+1}\right)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(3x-y^2)}{\partial y} * (x^2+1) - \frac{\partial(x^2+1)}{\partial y} * (3x - y^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{(-2y(x^2+1) - 0)}{(x^2+1)^2}$$
$$= -\frac{2y}{x^2+1}$$

$$\beta) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial e^{xy^2}}{\partial x} = \frac{\partial xy^2}{\partial x} e^{xy^2} = y^2 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial e^{xy^2}}{\partial y} = \frac{\partial xy^2}{\partial y} e^{xy^2} = 2xye^{xy^2}$$

$$\gamma) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\ln(x^2 - 4xy + y^2))}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - 4xy + y^2)}{\partial x} * \frac{1}{x^2 - 4xy + y^2}$$
$$= \frac{2x - 4y}{(x^2 - 4xy + y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\ln(x^2 - 4xy + y^2))}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - 4xy + y^2)}{\partial y} * \frac{1}{x^2 - 4xy + y^2}$$
$$= \frac{2y - 4x}{x^2 - 4xy + y^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης

$$a)\ f(x,y) = e^y lnx$$

$$b)\ f(x,y) = (y-x)^4$$

$$c) f(x,y) = x^2y^5$$

ΛΥΣΗ

$$a)\ \ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(e^y lnx)}{\partial x} = \frac{e^y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(e^y lnx)}{\partial x^2} = \frac{e^y}{-x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(e^y lnx)}{\partial y} = e^y lnx \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(e^y lnx)}{\partial y^2} = e^y lnx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(e^y lnx)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{e^y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{e^y}{x}$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial((y-x)^4)}{\partial x} = -4(y-x)^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2((y-x)^4)}{\partial x^2} = 12(y-x)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial((y-x)^4)}{\partial y} = 4(y-x)^3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2((y-x)^4)}{\partial y^2} = 12(y-x)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12(y-x)^3$$

$$c) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^5 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20x^2y^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 10xy^4$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται $y = y^3 + 2xy^2 - x = 5$. Να βρεθεί $\frac{dy}{dx}$.

ΛΥΣΗ

Η συναρτησιακή εξάρτηση του *y στο x* δίνεται έμμεσα.Λόγω της παρουσίας του όρου y^3είναι αδύνατον να κάνουμε αναδιάταξη της εξίσωσης.

$$\theta \acute{\varepsilon} \tau \omega f(x,y) = y^3 + 2xy^2 - x \quad \text{ή} \quad z = y^3 + 2xy^2 - x \ \ \kappa \alpha \iota\ \acute{\alpha} \rho \alpha\ z = 5$$

$$z = 5 => dz = 0$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0 => \frac{\partial z}{\partial x}dx = -\frac{\partial z}{\partial y}dy => \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} => \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

$$f_x = 2y^2 - 1 \qquad f_y = 3y^2 + 4xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\left(\frac{2y^2 - 1}{3c^2 + 4xy}\right)$$

Μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ μπορεί να περιγραφεί γραφικά; Πόσες διαστάσεις χρειαζόμαστε; Μια συνάρτηση 4 μεταβλητών πόσες διαστάσεις χρειάζεται;

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ $των$ $f(x,y) = x^2 + y^3$ kai $f(x,y) = x^2y$

ΛΥΣΗ

$$a)\ f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$b) f_x = 2yx \qquad f_{xx} = 2y \qquad f_{xy} = 2x$$

$$f_y = x^2 f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = 2x$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Με δεδομένη τη συνάρτηση ζήτησης:

$$Q = 500 - 3P - 2P_A + 0.01Y$$

$$όπου\ P = 20, \qquad P_A = 30, \qquad Y = 5000\ \ να\ υπολογίσετε$$

α) την ελαστικότητα ζήτησης

β) την σταυροειδή ελαστικότητα ζήτησης

γ) την εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης

ΛΥΣΗ

α)

$$E_P = \frac{\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q}$$

$$Q = 500 - 3P - 2P_A + 0.01Y => Q = 430$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = -3$$

$$E_P = \frac{\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q} = -3 * \frac{20}{430} = -\frac{6}{43}$$

β)

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} = \frac{\partial Q}{\partial P_A}\frac{P_A}{Q} = -2$$

$$E_{P_A} = \frac{\partial Q}{\partial P_A}\frac{P_A}{Q} = -2 * \frac{30}{430} = -\frac{6}{43}$$

γ)

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = 0.01$$

$$E_Y = \frac{\partial Q}{\partial Y}\frac{Y}{Q} = 0.01 * \frac{5000}{430} = \frac{5}{43}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθούν τα διαφορικά $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης

$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y \quad kai \quad f(x, y, z) = x^3y - y^3z + z^3x - yz^2 + xyz$

ΛΥΣΗ

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (3x^2 + 2yx)dx + (x^2 - 4y - 10)dy$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy = (6x + 2y)dx^2 + (-4)dy^2 + 2xdxdy$$

$$f(x, y, z) = x^3y - y^3z + z^3x - yz^2 + xyz$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$

$$= (3yx^2 + z^3 + yz)dx + (x^3 - 3zy^2 - z^2 + xz)dy + (-y^3 + 3xz^2 - 2yz + xy)dz =$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dzdy =$$

$$= 6ydx^2 - 6zy\, dy^2 + (6xz - 2y)dz^2 + (3x^2 + z)dxdy + (3z^2 + y)dxdz + (-3y^2 - 2z + x)dzdy$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να βρεθεί dy/dx

$$F(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y + 25 = 0$$

ΛΥΣΗ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$F_x = 3x^2 + 2yx \qquad F_y = x^2 - 4y - 10$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + 2yx}{x^2 - 4y - 10}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρεθεί η εσσιανή μήτρα της

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + \ln(x_1 * x_3)$$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{1}{x_3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{x_3^2}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x_3^2} \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης των

$$f(x,y) = e^{5x^3 - 2y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x^2}{y^3}, \qquad f(x,y) = (x^2 + 5y)(2x + 4y^5)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 21/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής:

$$Q = AK^{a}L^{1-a}$$

Όπου τα K, Lσυμβολίζουν κεφάλαιο και εργασία αντίστοιχα και τα A, α είναι σταθερές με A>0 και 0<α<1. Να δείξετε ότι το οριακό προϊόν εργασίας είναι θετικό και ότι είναι φθίνουσα συνάρτησης της εργασίας όταν το K είναι σταθερό.

ΛΥΣΗ

$$MPL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial (AK^{a}L^{1-a})}{\partial L} = \frac{(1-a)AK^{a}}{L^{a}} > 0, \text{γιατί}\, \alpha > 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\partial^2 (AK^{a}L^{1-a})}{\partial L^2} = -\frac{a(1-a)AK^{a}}{L^{a+1}} < 0, \qquad \text{γιατί}\, 0 < \alpha < 1$$

Άρα το Οριακό προϊόν της εργασίας (MPL) είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ με $K = 0.2t + 5$και $L = 5e^{0.1t}$. Να βρεθεί η τιμή της Υ για t=0.

ΛΥΣΗ

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{dK}{dt}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial\left(10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}\right)}{\partial K} = 10L - \frac{1}{2\sqrt{K}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial\left(10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}\right)}{\partial L} = 10K - \frac{1}{2\sqrt{L}}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(0.2t + 5)}{dt} = 0.2$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(5e^{0.1t})}{dt} = 0.5e^{0.1t}$$

$$\frac{dY}{dt}=\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{dK}{dt}=\left(10L-\frac{1}{2\sqrt{K}}\right)*0.2+\left(10K-\frac{1}{2\sqrt{L}}\right)*0.5e^{0.1t}=$$

$$=\left(5e^{0.1t}-\frac{1}{10\sqrt{0.2t+5}}\right)+\left(5e^{0.1t}(0.2t+5)-\frac{1e^{0.1t}}{4\sqrt{5e^{0.1t}}}\right)=$$

$$=\left(5e^{0}-\frac{1}{10\sqrt{5}}\right)+\left(25e^{0}-\frac{1e^{0}}{4\sqrt{5e^{0}}}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Επιχείρηση που δρα υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού πουλάει 2 αγαθά G1 καιG2 για 1000 και 800 χ.μ. αντίστοιχα. Το συνολικό κόστος παραγωγής αυτών των αγαθών δίνεται από $TC=2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2$, όπου Q_1,Q_2τα επίπεδα παραγωγής των G1, G2 αντίστοιχα. Υπολογίστε το μέγιστο κέρδος και τις τιμές των Q_1,Q_2στις οποίες επιτυγχάνεται.

ΛΥΣΗ

Το γεγονός ότι η επιχείρηση δρα υπό συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού μας δείχνει ότι η τιμή του κάθε αγαθού είναι σταθερή στην αγορά και δεν εξαρτάται από τα Q_1,Q_2. Αν η επιχείρηση πουλάει Q_1 μονάδες από το G1 που κοστολογούνται στα 1000 χμ τότε τα έσοδα είναι

$$TR_1=1000Q_1$$

Παρομοίως για το αγαθό G2

$$TR_2=800Q_2$$

Και τα συνολικά έσοδα θα είναι

$$TR=TR_1+TR_2=1000Q_1+800Q_2$$

Και η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\begin{aligned}\pi=TR-TC&=1000Q_1+800Q_2-(2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2)\\&=1000Q_1+800Q_2-2Q_1^2-2Q_1Q_2-Q_2^2\end{aligned}$$

Συνθήκες 1ης τάξης θα πρέπει $\frac{\partial\pi}{\partial Q_1}=0\ και\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_2}=0$

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1}=0=>1000-4Q_1-2Q_2=0=>4Q_1+2Q_2=1000=>\cdots=>Q_1=100$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 => 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0 => 2Q_1 + 2Q_2 = 800 => \cdots => Q_2 = 300$$

Συνθήκες 2ης τάξης θα πρέπεινα δείξουμε ότι αυτό το σημείο είναι όντως μέγιστο

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} < 0, \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} < 0, \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right) > 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2 < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 = (-4)(-2) - (-2)^2 = 4 > 0$$

Το κέρδος μεγιστοποιείται παράγοντας 100 μονάδες G1 και 300 μονάδες G2. Για να βρούμε το κέρδος :

$$\pi = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2 =>$$

$$\pi = 1000 * 100 + 800 * 300 - 2(100)^2 - 2 * 100 * 300 - (300)^2 = 170000$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε μια επιχείρηση επιτρέπεται να χρεώνει διαφορετικές τιμές για τους εγχώριους και τους διεθνείς πελάτες. Η εξίσωση ζήτησης για την εγχώρια αγορά είναι $P_1 + Q_1 = 500$ και η εξίσωση ζήτησης για τη διεθνή αγορά είναι $2P_2 + 3Q_2 = 720$και η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι $TC = 50000 + 20Q$όπου $Q = Q_1 + Q_2$. Καθορίστε την πολιτική τιμολόγηση της επιχείρησης ώστε να μεγιστοποιεί το κέρδος με διάκριση τιμής και υπολογίστε την τιμή του μέγιστου κέρδους.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση συνολικών εσόδων για την εγχώρια αγορά είναι

$$TR_1 = P_1Q_1 = (500 - Q_1)Q_1 = 500Q_1 - Q_1^2$$

Η συνάρτηση συνολικών εσόδων για την εγχώρια αγορά είναι

$$TR_2 = P_2Q_2 = \left(360 - \frac{3}{2}Q_2\right)Q_2 = 360Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2$$

Τα συνολικά έσοδα που λαμβάνονται από τις πωλήσεις και στις 2 αγορές είναι

$$TR = TR_1 + TR_2 = 500Q_1 - Q_1^2 + 360Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2$$

Το συνολικό κόστος παραγωγής είναι

$$TC = 50000 + 20Q = 50000 + 20Q_1 + 20Q_2$$

Η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι

$$\pi = TR - TC = \left(500Q_1 - Q_1^2 + 360Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2\right) - (50000 + 20Q_1 + 20Q_2) =$$

$$= 480Q_1 - Q_1^2 + 340Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2 - 50000$$

Συνθήκες 1ης τάξης

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 => 480 - 2Q_1 = 0 => \cdots => Q_1 = 240$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 => 340 - 3Q_2 = 0 => \cdots => Q_2 = \frac{340}{3}$$

Συνθήκες 2ης τάξης

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -3$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 = (-2)(-3) - 0^2 = 6 > 0$$

$$P_1 = 500 - Q_1 = 500 - 240 = 260$$

$$P_2 = 360 - \frac{3}{2}Q_2 = 360 - \frac{3}{2}\left(\frac{340}{3}\right) = 190$$

Η συνάρτηση κέρδους θα είναι:

$$\pi = 480Q_1 - Q_1^2 + 340Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2 - 50000 = 26866{,}67$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα μονοπώλιο λειτουργεί με πολλαπλές παραγωγικές διαδικασίες στις οποίες οι συναρτήσεις συνολικού κόστους είναι

$$TC_1 = 36 + 0.003q_1^3 \qquad TC_2 = 45 + 0.005q_2^3$$

Εάν το συνολικό κόστος προϊόν πωλείται σε μια αγορά με συναρτήσεις ζήτησης $p = 320 - 0.1q,\ όπου\ q = q_1 + q_2$, πόσο θα έπρεπε να παράγει κάθε εργοστάσιο για να μεγιστοποιήσει το συνολικό του κέρδος;

ΛΥΣΗ

α)

$$TR = pq = (320 - 0.1q)q = 320q - 0.1q^2 =$$

$$= 320(q_1 + q_2) - 0.1(q_1 + q_2)^2 =$$

$$= 320q_1 + 320q_2 - 0.1(q_1^2 + 2q_1\, q_2 + q_2^2) =$$

$$= 320q_1 + 320q_2 - 0.1q_1^2 - 0.2q_1q_2 - 0.1q_2^2$$

$$\pi = TR - TC = TR - TC_1 - TC_2$$

$$= (320q_1 + 320q_2 - 0.1q_1^2 - 0.2q_1q_2 - 0.1q_2^2) - (36 + 0.003q_1^3) - (45 + 0.005q_2^3) =$$

$$= 320q_1 + 320q_2 - 0.1q_1^2 - 0.2q_1q_2 - 0.1q_2^2 - 0.003q_1^3 - 0.005q_2^3 - 81$$

Συνθήκες 1ης τάξης

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 => 320 - 0.2q_1 - 0.2q_2 - 0.009q_1 = 0 => \cdots => q_2^2 = 0.6q_1^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 => 320 - 0.2q_1 - 0.2q_2 - 0.015q_2 = 0 => \cdots => q_2 = 0.7746q_1$$

$$320 - 0.2q_1 - 0.2(0.7746q_1) - 0.009q_1^2 = 0 =>$$

$$0.009q_1^2 + 0.35492q_1 - 320 = 0$$

$$q_1 = -\frac{0.35492 \pm \sqrt{(0.35492)^2 - 4(0.009)(-320)}}{0.018} = \frac{-0.35492 \pm 3.4126}{0.018}$$

Άρα $q_1 = 169.87 \ \kappa\alpha\iota \ \ q_2 = 131.58$

Συνθήκες 2ης τάξης

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial q_1^2} = -0.2 - 0.018q_1 = -3.25766 < 0$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial q_2^2} = -0.2 - 0.03q_2 = -4.1474 < 0$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -0.2$$

$$\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 = (-3{,}25766)(-4{,}1474) - (-0{,}2)^2 = 13{,}51 - 0{,}04$$

Όλες οι συνθήκες 2ης τάξης για τη μέγιστη τιμή των κερδών ικανοποιούνται για $q_1 = 169.87 \ \kappa\alpha\iota \ \ q_2 = 131.58$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθεί η γενική λύση της παρακάτω δ.ε.

$$y' = \frac{y}{x} \ \ , y' = y^2 cosx$$

ΛΥΣΗ

$$i)\ y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} => x\,dy = y\,dx => \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Που πρόκειται για δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών. Με απλή ολοκλήρωση θα πάρουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} => \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c => ln|y| = ln|x| + c => ln|y| - ln|x| = c =>$$

$$ln\left|\frac{y}{x}\right| = c => \left|\frac{y}{x}\right| = e^c => \frac{y}{x} = \pm e^c => y = c_1 x \ (c_1 = \pm e^c)$$

$$ii) y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y' = y^2 cosx => \frac{dy}{dx} = y^2 cosx => \frac{dy}{y^2} = cosx\, dx$$

Που πρόκειται για δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών. Με απλή ολοκλήρωση των 2 μελών θα πάρουμε

$$\frac{dy}{y^2} = cosx\, dx => \int \frac{dy}{y^2} = \int cosx\, dx => -\frac{1}{y} = sinx + c => y = -\frac{1}{sinx + c}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να βρεθεί η γενική λύση της παρακάτω δ.ε.

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

ΛΥΣΗ

$$y' = f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

Για κάθε λ>0:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda \mathrm{x})^3 + (\lambda \mathrm{y})^3}{(\lambda \mathrm{x})(\lambda \mathrm{y})^2} = \frac{\lambda^3 (x^3 + y^3)}{\lambda^3 (xy^2)} = f(x, y)$$

Άρα η δ.ε. είναι ομογενής. θεωρούμε την αντικατάσταση $y = ux, \;\; u = u(x)$

$$(ux)' = \frac{x^3 + (ux)^3}{x(ux)^2} => u'x + u = \frac{x^3(1 + u^3)}{x^3 u^2} => u'x + u = \frac{(1 + u^3)}{u^2} =>$$

$$u'x = \frac{(1 + u^3)}{u^2} - u => u'x = \frac{1}{u^2} => \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u^2} => u^2 du = \frac{dx}{x}$$

Που πρόκειται για δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών. Με απλή ολοκλήρωσητων 2 μελών θα πάρουμε

$$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x} + c => \frac{1}{3} u^3 = ln|x| + c$$

Με αντικατάσταση του $u = y/x$

$$\frac{1}{3} u^3 = ln|x| + c => \frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = ln|x| + c$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 28/05/2021

Έστω οι μεταβλητές χ, y όπου η y είναι συνάρτηση της χ, δηλαδή y= y(χ). Μια σχέση των μεταβλητών χ, y στην οποία εμφανίζεται τουλάχιστον μία παράγωγος της συνάρτησης y= y(χ), είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Για παράδειγμα οι σχέσεις:

$$xy' - (x^2+1)y = 0, \qquad xy'' + 3x^2y''' - y^2 + 1 = 0$$

Είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Όμως η σχέση :

$$x^2y^4 + xe^y + 2x + y = 0$$

Δεν είναι διαφορική εξίσωση αφού σε αυτή δεν εμφανίζεται κάποια παράγωγος της εξίσωσης y= y(χ). Άγνωστος μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση y(χ). Σε μια δ.ε. μπορεί να εμφανίζονται περισσότεροι από μια παράγωγοι της y= y(χ). Η τάξη της μεγιστοτάξιας παραγώγου που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση αποτελεί την τάξη της δ.ε.

Μια συνήθης δ.ε. είναι γραμμική όταν σε οποιδήποτε όρο της εμφανίζεται ως παράγοντας το πολύ μια από τις y, y', y",…

Σύμφωνα λοιπόν με αυτό τον ορισμό η γενική μορφή μιας γραμμικής δ.ε. είναι:

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y + f(x) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για κάθε μια από τις παρακάτω δ.ε. να εξετασθεί αν είναι γραμμική και να βρεθεί η τάξη της

$$i)\ 2y^4 + xy^{(3)} = 0 \qquad ii) x^2y'' + xe^xy' + 2y = 0 \qquad iii) e^{y'} + y = 0$$

$$iv) yy''' + xy' + e^x = 0 \qquad v)\left((y'')\right)^4 + (e^x sinx)y = 0 \qquad vi)(y'')^{\left(\frac{1}{2}\right)} + xy^{(7)} = 0$$

ΛΥΣΗ

i) μη-γραμμική, 3ης τάξης

ii) γραμμική, 2ης τάξης

iii) μη-γραμμική, 1ης τάξης

iv) μη-γραμμική, 3ης τάξης

v)μη-γραμμική, 2ης τάξης

vi) μη-γραμμική, 7ης τάξης

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $y = e^{x^2}$είναι λύση της δ.ε. $y'' - 2xy' - 2y = 0$

ΛΥΣΗ

Για να είναι λύση της δ.ε. θα πρέπει να την ικανοποιεί. Δηλαδή αν θέσουμε $y = e^{x^2}$ θα πρέπει να ισχύει η δ.ε.

$$y = e^{x^2} => y' = e^{x^2} 2x => y'' = e^{x^2} 4x^2 + 2e^{x^2}$$

Με αντικατάσταση των y, y', y'' το α' μέλος της $y'' - 2xy' - 2y = 0$ γίνετα:

$$y'' - 2xy' - 2y = e^{x^2} 4x^2 + 2e^{x^2} - 2xe^{x^2} 2x - 2e^{x^2} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x + 2)sinydx + xcosydy = 0 \qquad για\ y(1) = \frac{\pi}{2}$$

ΛΥΣΗ

$$(x + 2)sinydx + xcosydy = 0 => (x + 2)sinydx = -xcosydy \ => \frac{x + 2}{x} dx = -\frac{cosy}{siny} dy$$

Δηλαδή πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Με απλή ολοκλήρωση θα γίνει:

$$\frac{x + 2}{x} dx = -\frac{cosy}{siny} dy => \int \frac{x + 2}{x} dx = -\int \frac{cosy}{siny} dy => \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = -\int \frac{d(siny)}{siny} + c =>$$

$$\int dx + 2\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{d(siny)}{siny} + c => x + 2ln|x| = -ln|siny| + c \qquad (1)$$

Στην (1) εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $y(1) = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή x=1, y=π/2

$$1 + 2ln1 = -ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + c => c = 1$$

Άρα η (1)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

$$x + 2ln|x| = -ln|siny| + 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθεί η δ.ε. $y' - \frac{1}{x}y = xcosx$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για δ.ε. 1ης τάξης η οποία είναι γραμμική. Για την επίλυση της ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

(α) θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 => \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} => \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και με απλή ολοκλήρωση θα πάρουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} => \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c_1 => ln|y| = ln|x| + c_1 => ln|y| - ln|x| = c_1 = > ln\left|\frac{y}{x}\right| = c_1 =>$$

$$\left|\frac{y}{x}\right| = e^{c_1} => \frac{y}{x} = \pm e^{c_1} => y = c * x$$

Όπου θέσαμε $c = \pm e^{c_1}$. Έτσι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $y_0 = c * x \quad (1)$

(β) τώρα αναζητούμε μια μερική λύση της δοσμένης δ.ε. και είναι της μορφής $y_\mu = c(x) * x$, όπως προκύπτει από την γενική λύση (1) της αντίστοιχης ομογενούςαν θέσουμε όπου c το $c(x)$.

Η $y_\mu = c(x) * x$ ικανοποιεί τη δοσμένη δ.ε.

$$y_\mu' - \frac{1}{\chi}y_\mu = xcosx => (c(x) * x)' - \frac{1}{x}(c(x) * x) = xcosx => c'_{(x)}x + c(x) - c(x) = xcosx =>$$

$$c'_{(x)}x = xcosx => c'_{(x)} = cosx => c(x) = sinx$$

$$y_\mu = (sinx)x = x * sinx$$

(γ) η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης της δοσμένης:

$$y = y_0 + y_\mu => y = cx + xsinx$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Με εναλλαγή των ρόλων των χ και Υ να βρεθεί η λύση της δ.ε.$(y^2 - 6x)dy + 2ydx = 0$

ΛΥΣΗ

Συνήθως σε μια δ.ε. με μεταβλητές x, yτον ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής παίζει το χ και το ρόλο της άγνωστης συνάρτησης παίζει το y. Εδώ θα κάνουμε εναλλαγή ρόλων.

$$(y^2 - 6x)dy + 2ydx = 0 => y^2 - 6x + 2y\frac{dx}{dy} = 0 => \frac{y}{2} - \frac{3x}{y} + \frac{dx}{dy} = 0 =>$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3y}{x} = -\frac{y}{2} \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία δ.ε. είναι γραμμική με άγνωστη συνάρτηση την $x = x(y)$. Έτσι για την επίλυση ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία

(α) θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 => \frac{dx}{x} = 3\frac{dy}{y} => ln|x| = 3ln|y| + c_1 => ln|x| - 3ln|y^3| = c_1 =>$$

$$ln\left|\frac{x}{y^3}\right| = c_1 => \frac{x}{y^3} = \pm e^{c_1} => x = cy^3 \ , \quad c = \pm e^{c_1}$$

Άρα η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$x_0 = cy^3 \qquad (2)$$

(β) μια μερική λύση της δ.ε. (1) έχει τη μορφή

$$x_\mu = c(y)y^3 \qquad (3)$$

Η x_μ ικανοποιεί τη δ.ε. (1). Άρα:

$$\frac{dx_\mu}{dy} - \frac{3}{y}x_\mu = -\frac{y}{2} => \frac{d(c(y)y^3)}{dy} - \frac{3}{y}(c(y)y^3) = -\frac{y}{2} =$$

$$> c'_{(y)}y^3 + c(y)3y^2 - c(y)3y^2 = -\frac{y}{2} =>$$

$$c'_{(y)}y^3 = -\frac{y}{2} => c'_{(y)} = -\frac{1}{2y^2} => c(y) = \frac{1}{2y}$$

Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε

$$x_\mu = c(y)y^3 => x_\mu = \frac{1}{2y}y^3 => x_\mu = \frac{1}{2}y^2$$

(γ) η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x = x_0 + x_\mu => x = cy^3 + \frac{1}{2}y^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λυθεί η δ.ε. $y' - \frac{1}{x}y = y^3$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη δ.ε. είναι τύπου Bernoullιμε α=3. Θεωρούμε την αντικατάσταση

$$y = u^{\frac{1}{1-3}} => y = u^{-\frac{1}{2}} \quad (1), \qquad u = u(x)$$

$$y' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}-1}u' => y' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u' \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u' - \frac{1}{x}u^{-\frac{1}{2}} = \left(u^{-\frac{1}{2}}\right)^3 => * u^{\frac{3}{2}} => -\frac{1}{2}u' - \frac{1}{x}u = 1 => u' + \frac{2}{x}u = -2 \ =>$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = 0 => \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x} => ln|u| = -2ln|x| + c_1 => ln|u| + 2ln|x| = c_1$$
$$=>$$

$$u_0 = cx^{-2}$$

Με την μέθοδο καταβολής των σταθερών βρίσκουμε μια μερική λύση της δ.ε.

$$u_\mu = -\frac{2}{3}x$$

Άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$u = u_0 + u_\mu => u = cx^{-2} - \frac{2}{3}x$$

$$y = \left(cx^{-2} - \frac{2}{3}x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ 04/06/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθούν οι ακόλουθες δ.ε.

$$i)\ y'' - 3y' + 2y = 0 \quad ii) y'' - 9y = 0 \quad iii) y'' - 6y + 9y = 0$$

ΛΥΣΗ

i)

$$y \to 1,\ \ y' \to \lambda,\ \ y'' \to \lambda^2$$

Και προκύπτει η χαρακτηριστικήαλγεβρική εξίσωση:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Άρα η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} => y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

ii)

$y \to 1,\ \ y' \to \lambda,\ \ y'' \to \lambda^2$ και προκύπτει η χαρακτηριστικήαλγεβρική εξίσωση: $\lambda^2 - 9 = 0$

Που έχει ρίζες $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3$. Άρα η γενική λύση είναι:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

iii)

$y \to 1,\ \ y' \to \lambda,\ \ y'' \to \lambda^2$ και προκύπτει η χαρακτηριστικήαλγεβρική εξίσωση:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ με διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Άρα η γενική λύση είναι:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η δ.ε. $y'' + ky = 0$, όπου k είναι πραγματικός αριθμός

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη δ.ε. είναι ομογενής γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Με $y \to 1,\ y'' \to \lambda^2$ προκύπτει η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση:

$$\lambda^2 + k = 0$$

Ανάλογα με το πρόσημο του δοσμένου πραγματικού αριθμού kδιακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) να είναι $k = -m^2 < 0$. Τότε η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση γράφεται

$$\lambda^2 - m^2 = 0$$

Με ρίζες $\lambda_1 = m,\ \lambda_2 = -m$. Άρα στην περίπτωση αυτή η γενική λύση είναι:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

(ii) να είναι $k = w^2 > 0$. Τότε η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση γράφεται

$$\lambda^2 + w^2 = 0$$

Με συζυγείς μιγαδικές ρίζες $0 \pm iw$. Σε αυτή την περίπτωση η γενική λύση είναι:

$$y = e^{0x}(c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx)) => y = c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx)$$

(iii) να είναι k=0. Άρα θα είναι $\lambda^2 = 0 => \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Σε αυτή την περίπτωση η γενική λύση είναι:

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} => y = c_1 + c_2 x$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η δ.ε. $y' + \frac{1}{x} y = -y^2 + \frac{1}{x^2}$, αν είναι γνωστό ότι έχει μερική λύση την $y_1 = \frac{1}{x}$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη δ.ε. είναι τύπου Riccati. Έτσι για την επίλυση της θεωρούμε την αντικατάσταση:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} => y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$$

Όπου u=u(x). με παραγώγιση θα γίνει:

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{u^2} u'$$

Και με αντικατάσταση:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{u^2}u'+\frac{1}{\chi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)^2+\frac{1}{x^2}=>$$

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{u^2}u'+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xu}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{u^2}-\frac{2}{xu}+\frac{1}{x^2}=>$$

$$-\frac{1}{u^2}u'+\frac{3}{xu}=-\frac{1}{u^2}=>u'-\frac{3}{x}u=1 \qquad (1)$$

Που είναι μια γραμμική δ.ε. 1ης τάξης. Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$u'-\frac{3}{x}u=0=>u'=\frac{3}{x}u=>\frac{du}{dx}=\frac{3u}{x}=>\frac{du}{u}=3\frac{dx}{x}=>\int\frac{du}{u}=3\int\frac{dx}{x}+c_1=>$$

$$\ln|u|=3ln|x|+c_1=>\ln|u|-ln|x^3|=c_1=>\left|\frac{u}{x^3}\right|=e^{c_1}=>\frac{x}{y^3}=\pm e^{c_1}=>u_o=cx^3$$

Μια μερική λύση της δ.ε. σύμφωνα με την μέθοδο μεταβολής των σταθερών είναι :

$$u_\mu=c(x)x \;=>u_\mu=-\frac{1}{2}x$$

Άρα η γενική λύση της γραμμικής δ.ε. είναι $u=u_o+u_\mu=>u=cx^3-\frac{1}{2}x$

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{cx^3-\frac{1}{2}x}$$

Διάλεξη Δεύτερη Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ

Δευτέρα 5/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής $Q = L^{4/5}K^{1/5}$ όπου Qείναι η παραγωγή, K το κεφάλαιο και Lη εργασία. Να υπολογίσετε τις οριακές παραγωγικότητες ως προς την εργασία και το κεφάλαιο.

ΛΥΣΗ

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς κεφάλαιο και εργασία:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial\left(L^{4/5}K^{1/5}\right)}{\partial L} = \frac{4}{5}L^{-1/5}K^{1/5} = \frac{4}{5}\frac{Q}{L}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial\left(L^{4/5}K^{1/5}\right)}{\partial K} = \frac{1}{5}L^{4/5}K^{-4/5} = \frac{1}{5}\frac{Q}{K}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Το κόστος παραγωγής δύο προϊόντων δίνεται από την σχέση $TC = \left(K^2 + L^2 + Q_1^2 + Q_2^2\right)^3$ όπου Qείναι η παραγωγήστα δύο προϊόντα, K το κεφάλαιο και Lη εργασία. Πως επηρεάζει μια μεταβολή στην ποσότητα του κεφαλαίου το οριακό κόστος ως προς το πρώτο προϊόν και πως μια μεταβολή στην ποσότητα της εργασίας το οριακό κόστος ως προς το δεύτερο προϊόν.

ΛΥΣΗ

Η άσκηση μας ζητάει την μεταβολή των οριακών ποσοτήτων $\frac{\partial TC}{\partial Q_1}, \frac{\partial TC}{\partial Q_2}$ αφού μεταβληθούν το κεφάλαιο και η εργασία. Άρα, ζητάει να υπολογίσουμε τις παρακάτω παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_1}\right) \equiv \frac{\partial^2 TC}{\partial K \partial Q_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_2}\right) \equiv \frac{\partial^2 TC}{\partial L \partial Q_2}$$

Συνεπώς πρώτα θα γίνουν οι εξής υπολογισμοί:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_1} = \frac{\partial\left(\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)^3\right)}{\partial Q_1} = 6Q_1\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)^2$$
$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = \frac{\partial\left(\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)^3\right)}{\partial Q_2} = 6Q_2\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)^2$$

Για τον υπολογισμό θα έχουμε τα εξής

$$\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left(6Q_1\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)^2\right) = 24KQ_1\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q_2}\right) = \frac{\partial}{\partial L}\left(6Q_2\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)^2\right) = 24LQ_2\left(K^2+L^2+Q_1^2+Q_2^2\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3-ChainRule

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση $Q = f(x,y,z) = x^2+3y^2-2z^2+4x-y+3z-1$ όπου

$x(t)=t^2-2t+1, y(t)=3t-2, z(t)=t^2+4t-3$. Να υπολογιστεί η μεταβολή της συνάρτησης Qως προς t (να βρεθεί η τιμή όταν t=2).

ΛΥΣΗ

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Με βάση την συνάρτησή μου $Q = f(x,y,z) = x^2+3y^2-2z^2+4x-y+3z-1$ υπολογίζω

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x+4, \frac{\partial Q}{\partial y} = 6y-1, \frac{\partial Q}{\partial z} = -4z+3,$ θα πρέπει όμως να παραγωγίσω και τα εξής:

$\frac{dx}{dt} = 2t-2, \frac{dy}{dt} = 3, \frac{dz}{dt} = 2t+4$. Επομένως,

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{dz}{dt}=(2x+4)(2t-2)+(6y-1)(3)+(-4z+3)(2t+4)=$$
$$=\left(2\left(t^2-2t+1\right)+4\right)(2t-2)+3\left(6\left(3t-2\right)-1\right)+\left(-4\left(t^2+4t-3\right)+3\right)(2t+4)$$

Ποια η τιμή όταν t=2. Όταν t=2 τότε x=1,y=4 και το z=9. Με αντικατάσταση,

$$\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=2}=-183$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογιστεί η εσσιανή ορίζουσα της συνάρτησης $f(x,y,z)=xy^2z^3$ και η τιμή της στο σημείο A(1,-1,1).

ΛΥΣΗ

Η εσσιανή ορίζουσα ορίζεται ως εξής: $H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix}$

Ξεκινάμε με το υπολογισμό των παραγώγων πρώτης τάξης: $\frac{\partial\left(xy^2z^3\right)}{\partial x}=y^2z^3, \frac{\partial\left(xy^2z^3\right)}{\partial y}=2xyz^3, \frac{\partial\left(xy^2z^3\right)}{\partial z}=3xy^2z^2$, και συνεχίζουμε με τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$\frac{\partial^2\left(y^2z^3\right)}{\partial x\partial x}=0, \frac{\partial^2\left(2xyz^3\right)}{\partial y\partial y}=2xz^3, \frac{\partial^2\left(3xy^2z^2\right)}{\partial z\partial z}=6xy^2z,$. Συνεχίζουμε τους υπολογισμούς έχοντα υπόψη και το θεώρημα του Schwarz. Συνεπώς,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2yz^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2\left(3xy^2z^2\right)}{\partial x\partial z}=3y^2z^2, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\left(3xy^2z^2\right)}{\partial y\partial z}=6xyz^2.$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε ότι,

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2yz^3 & 3y^2z^2\\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2\\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z\end{bmatrix}$$

Η τιμή της στο σημείο Α(1,-1,1) μπορεί να υπολογιστεί με απλή αντικατάσταση:

$$H=\begin{bmatrix}0 & 2yz^3 & 3y^2z^2\\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2\\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ -2 & 2 & -6\\ 3 & -6 & 6\end{bmatrix}$$ και υπολογίζουμε την ορίζουσα που ισούται με 30.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να εξεταστεί εάν οι συναρτήσεις $u(x,y)=2\frac{x}{y}, v(x,y)=\ln x-\ln y (x,y>0)$ είναι εξαρτημένες.

ΛΥΣΗ

Για να απαντήσουμε στο ερώτημά μας θα πρέπει να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα.

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\left(2\frac{x}{y}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(2\frac{x}{y}\right)}{\partial y}\\ \frac{\partial\left(\ln x-\ln y\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(\ln x-\ln y\right)}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{y} & \frac{-2x}{y^2}\\ \frac{-1}{x} & \frac{1}{y}\end{vmatrix}=\frac{1}{y}\frac{2}{y}-\left(\frac{-2x}{y^2}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y^2}=0$$

Άρα, οι δύο συναρτήσεις είναι εξαρτημένες.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η παραγωγή ενός προϊόντος δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση $Q(K,L)=2K^2+2L^2+40KL$ όπου Κ το κεφάλαιο και L η εργασία. Ωστόσο, η εργασία και το κεφάλαιο εξαρτώνται από τις επενδύσεις και τους φόρους με βάση τις κάτωθι συναρτήσεις

$K(I,T) = I^2 + T^2, L(I,T) = 2I^2 + 3T^3$. Ποια η οριακή μεταβολή στην παραγωγή κατά την μεταβολή του επιπέδου επενδύσεων και των φόρων;

ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσουμε την οριακή μεταβολή θα πρέπει να υπολογίσουμε την εξής ποσότητα: $dQ(K,L) = \frac{\partial Q}{\partial I} dI + \frac{\partial Q}{\partial T} dT$. Συνεπώς, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα

$$\frac{dQ}{dI} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial I} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial I} = (4K + 40L)2I + (4L + 40K)4I = I(168K + 84L)$$

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial T} = (4K + 40L)2T + (4L + 40K)9T^2 = 4T(2K + 20L + 90KT + 9LT)$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial I} dI + \frac{\partial Q}{\partial T} dT = \left[I(168K + 84L)\right] dI + \left[4T(2K + 20L + 90KT + 9LT)\right] dT$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

Διάλεξη Τρίτη Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ

Δευτέρα 12/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η συνάρτηση παραγωγής ενός αγροτικού προϊόντος δίνεται παρακάτω ως εξής $Q(x,y)=40x-x^2+60y-2y^2$ όπου x οι μονάδες εργασίας και y η έκταση της γης. Να υπολογιστεί το διαφορικό για αύξηση κατά μια μονάδα στα x,y όταν x=10, y=10.

ΛΥΣΗ

Για να λύσουμε την άσκηση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του διαφορικού. Με βάση αυτό θα έχουμε ότι:

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy=\frac{\partial\left(40x-x^2+60y-2y^2\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial\left(40x-x^2+60y-2y^2\right)}{\partial y}dy=$$
$$=\left(40-2x\right)dx+\left(60-4y\right)dy$$

Με dx=dy=1. Συνεπώς, $dQ=\left(40-20\right)1+\left(60-40\right)1=40$

Υπολογίστε μόνοι σας τα $Q(10,10)=...,Q(11,11)=...$ και υπολογίστε την διαφορά τους. Τι παρατηρείτε;

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής με την μορφή ενός αγροτικού προϊόντος δίνεται παρακάτω ως εξής $Q(K,L)=aK^2L$. Να υπολογίσετε πως συνδέονται οι ποσοστιαίες μεταβολές των ποσοτήτων παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας.

ΛΥΣΗ

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial K}dK+\frac{\partial Q}{\partial L}dL=2aKLdK+aK^2dL\Leftrightarrow\frac{dQ}{Q}=\frac{2aKL}{Q}dK+\frac{aK^2}{Q}dL$$
$$\Leftrightarrow\frac{dQ}{Q}\cdot 100=\frac{2aKL}{aK^2L}dK\cdot 100+\frac{aK^2}{aK^2L}dL\cdot 100\Leftrightarrow\frac{dQ}{Q}\cdot 100=\frac{2dK}{K}\cdot 100+\frac{dL}{L}\cdot 100$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε μια επιχείρηση ισχύει η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής $Q(t_1,t_2,L)=\left(t_1^2+t_2^2\right)^2+\sqrt{t_1t_2+L}$ με t_1 οι ώρες εργασίας ανά ημέρα της μηχανής Α και t_2 οι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ώρες εργασίας της μηχανής B και L ο αριθμός των εργαζομένων. Αυτή τη στιγμή $t_1=7$, $t_2=6$ και $L=50$.

1. Εάν $t_1=7.1$, $t_2=6.2$ και $L=52$ ποια είναι η παραγωγή;
2. Εάν το κόστος είναι 20.000 για τον ελάχιστο αριθμό ωρών λειτουργίας της μηχανής Α, 90.000 για την μηχανή Β και 30.000 για κάθε νέο εργαζόμενο, ποιος ο φθηνότερος τρόπος αύξησης της παραγωγής;

ΛΥΣΗ

1. Θα πρέπει να υπολογίσουμε το διαφορικό της παραπάνω συνάρτησης με βάση τις κάτωθι μεταβολές $dt_1 = 7.1-7=0.1, dt_2 = 6.2-6=0.2, dL = 52-50=2$.

Θα έχουμε ότι,

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial Q}{\partial t_2}dt_2 + \frac{\partial Q}{\partial L}dL =$$

$$= \frac{\partial\left(\left(t_1^2+t_2^2\right)^2+\sqrt{t_1t_2+L}\right)}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial\left(\left(t_1^2+t_2^2\right)^2+\sqrt{t_1t_2+L}\right)}{\partial t_2}dt_2 + \frac{\partial\left(\left(t_1^2+t_2^2\right)^2+\sqrt{t_1t_2+L}\right)}{\partial L}dL =$$

$$= \left[4t_1\left(t_1^2+t_2^2\right)+\frac{t_2}{2\sqrt{t_1t_2+L}}\right]dt_1 + \left[4t_2\left(t_1^2+t_2^2\right)+\frac{t_1}{2\sqrt{t_1t_2+L}}\right]dt_2 + \frac{1}{2\sqrt{t_1t_2+L}}dL =$$

$$= 2380.31 \bullet 0.1 + 2040.36 \bullet 0.2 + 0.0521 \bullet 2 = 646.21$$

1. Έχετε υπολογίσει τις τρεις οριακές μεταβολές ως εξής: $\left.\frac{\partial Q}{\partial t_1}\right|_P = 2380.31, \left.\frac{\partial Q}{\partial t_2}\right|_P = 2040.36, \left.\frac{\partial Q}{\partial L}\right|_P = 0.0521$ όπου P=$t_1=7$, $t_2=6$ και $L=50$.
   Συνδυάζοντας με το προαναφερόμενο κόστος θα έχουμε ότι

Για την μηχανή Α: $\cos t : \frac{1}{2380.31}20.000 = 8.40$

Για την μηχανή Β: $\cos t : \frac{1}{2040.36}90.000 = 44.11$

Για τους εργαζόμενους: $\cos t : \frac{1}{0.052}30.000 = 576.923$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός αγαθού δίνονται ως εξής: $\begin{matrix} Q = 2 - 0.5P + 0.02Y \\ Q = -2 + 7.5P \end{matrix}$. Να υπολογίσετε το κατά πόσο θα μεταβληθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας του προϊόντος αυτού στην αγορά εάν το εισόδημα αυξηθεί κατά 100 ευρώ.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζω το εξής σύστημα εξισώσεων: $\begin{matrix} f(Q,P,Y) = Q - 2 + 0.5P - 0.02Y = 0 \\ g(Q,P,Y) = Q + 2 - 7.5P = 0 \end{matrix}$. Μπορώ να υπολογίσω την Ιακωβιανή ορίζουσα ως εξής:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial Q} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & -7.5 \end{vmatrix} = -8$$

Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το εξής:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial Q} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dQ}{dY} \\ \frac{dP}{dY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial Y} \\ -\frac{\partial g}{\partial Y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{dQ}{dY} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{dP}{dY} = -\frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial Q}\frac{dQ}{dY} + \frac{\partial g}{\partial P}\frac{dP}{dY} = -\frac{\partial g}{\partial Y} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} f_Q \frac{dQ}{dY} + f_P \frac{dP}{dY} + f_Y = 0 \\ g_Q \frac{dQ}{dY} + g_P \frac{dP}{dY} + g_Y = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} f_Q \frac{dQ}{dY} + f_P \frac{dP}{dY} = -f_Y \\ g_Q \frac{dQ}{dY} + g_P \frac{dP}{dY} = -g_Y \end{matrix}$$

Για να υπολογίσω τώρα την ποσότητα

$$\frac{dQ}{dY} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial P} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial Q} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0.5 & 0.02 \\ -7.5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & -7.5 \end{vmatrix}} = \frac{-0.15}{-8} = 0.01875,$$

Ομοίως θα έχουμε ότι $\dfrac{dP}{dY} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial Q} & \dfrac{\partial f}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial Q} & \dfrac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial Q} & \dfrac{\partial f}{\partial P} \\ \dfrac{\partial g}{\partial Q} & \dfrac{\partial g}{\partial P} \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0.02 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & -7.5 \end{vmatrix}} = \dfrac{-0.02}{-8} = 0.0025$

Επομένως ένα έχουμε μια μεταβολή κατά ΔΥ=100 ευρώ η μεταβολή που θα έχω στο ΔQθα ισούται με 1.875 ενώ στο ΔΡ θα ισούται με 0.25.

Τρίτη 13/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια οικονομία περιγράφεται από τις παρακάτω σχέσεις $\begin{matrix} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 90 + 0.8(Y - T) \\ T = 50 + 0.25Y \end{matrix}$ όπου Y το εισόδημα, Cοι δαπάνες κατανάλωσης, I_0οι αυτόνομες επενδύσεις, Gooι δαπάνες από την κυβέρνηση και T τα φορολογικά έσοδα. Να υπολογίσετε το κατά πόσο θα μεταβληθούν το εισόδημα, η κατανάλωση ισορροπίας και τα φορολογικά έσοδα όταν οι αυτόνομες επενδύσεις μεταβληθούν κατά 10 μονάδες.

ΛΥΣΗ

Οι ενδογενείς μεταβλητές είναι το εισόδημα, η κατανάλωση και τα φορολογικά έσοδα ενώ οι εξωγενείς οι αυτόνομες επενδύσεις και οι κυβερνητικές δαπάνες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

Διαλέξεις Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ

Δευτέρα 19/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα x,y υπό συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού. Εάν το κόστος παραγωγής δίνεται από την συνάρτηση $TC = 6x^2 + 10xy + 7y^2$ να υπολογιστούν οι ποσότητες που πρέπει να παράγει η επιχείρηση ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της.

ΛΥΣΗ

Συνεπώς θα πρέπει να σχηματίσουμε την συνάρτηση κερδών.

$$\Pi(x,y) = TR(x,y) - TC(x,y) = \left(p_x x + p_y y\right) - \left(6x^2 + 10xy + 7y^2\right)$$

Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τα δύο προϊόντα για την συγκεκριμένη συνάρτηση κερδών.

$$\frac{\partial \Pi(x,y)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\left[\left(p_x x + p_y y\right) - \left(6x^2 + 10xy + 7y^2\right)\right]}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow p_x - 12x - 10y = 0 \Leftrightarrow p_x = 12x + 10y$$

$$\frac{\partial \Pi(x,y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\left[\left(p_x x + p_y y\right) - \left(6x^2 + 10xy + 7y^2\right)\right]}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow p_y - 10x - 14y = 0 \Leftrightarrow p_y = 10x + 14y$$

Συνεχίζω με τους υπολογισμούς για το κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου.

$$\frac{\partial \Pi^2(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left[p_x - 12x - 10y\right]}{\partial x} = -12 \equiv \Pi_{xx}$$

$$\frac{\partial \Pi^2(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial\left[p_y - 10x - 14y\right]}{\partial y} = -14 \equiv \Pi_{yy}$$

$$\frac{\partial \Pi^2(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \Pi^2(x,y)}{\partial x \partial y} = -10 \equiv \Pi_{xy} = \Pi_{yx}$$

Υπολογίζω την ποσότητα $\Delta = \mathrm{A\Gamma} - \mathrm{B}^2 = 68 > 0$ και μιλάμε για τοπικό μέγιστο. Ποιες όμως είναι οι ποσότητες;;

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν σε ποσότητα Qκαι με κόστος $TC = 50 + 4Q$. Το προϊόν διατίθεται σε δύο αγορές σε ποσότητες Q_1, Q_2 και σε τιμές $P_1 = Q_1^{-\frac{1}{2}}, P_2 = 200 - 2Q_2$.Να υπολογίσετε τις ποσότητες που μεγιστοποιούν το κέρδος και το μέγιστο κέρδος. Επίσης δείξτε ότι το κέρδος μεγιστοποιείται όταν MC=MR$_1$=MR$_2$.

ΛΥΣΗ

Συνεπώς θα πρέπει να σχηματίσουμε την συνάρτηση κερδών.

$$\Pi(Q_1,Q_2) = TR(Q_1,Q_2) - TC(Q_1,Q_2) = (P_1Q_1 + P_2Q_2) - (50+4Q) =$$

$$= \left(Q_1Q_1^{-\frac{1}{2}} + (200-2Q_2)Q_2\right) - \left[50 + 4(Q_1+Q_2)\right] = Q_1^{\frac{1}{2}} + 200Q_2 - 2Q_2^2 - 50 - 4Q_1 - 4Q_2 =$$

$$= Q_1^{\frac{1}{2}} - 4Q_1 - 2Q_2^2 + 196Q_2 - 50$$

Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τα δύο προϊόντα για την συγκεκριμένη συνάρτηση κερδών.

$$\frac{\partial\Pi(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\left[Q_1^{\frac{1}{2}} - 4Q_1 - 2Q_2^2 + 196Q_2 - 50\right]}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}Q_1^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0 \Leftrightarrow Q_1 = \frac{1}{64}$$

$$\frac{\partial\Pi(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\left[Q_1^{\frac{1}{2}} - 4Q_1 - 2Q_2^2 + 196Q_2 - 50\right]}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 196 - 4Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_2 = 49$$

Συνεχίζω με τους υπολογισμούς για το κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου.

$$\frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1{}^2} = \frac{\partial\left[\frac{1}{2}Q_1^{-\frac{1}{2}} - 4\right]}{\partial Q_1} = -\frac{1}{4}Q_1^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2{}^2} = \frac{\partial[196-4Q_2]}{\partial Q_2} = -4$$

$$\frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2\partial Q_1} = \frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1\partial Q_2} = 0$$

Για τις συνθήκες δεύτερης τάξης η εσσιανή ορίζουσα ορίζεται ως εξής:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^{\ 2}} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^{\ 2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} Q_1^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = Q_1^{-\frac{3}{2}}$$

Οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες είναι η εξής: $H_1 = -\frac{1}{4} Q_1^{-\frac{3}{2}} < 0, H_2 = Q_1^{-\frac{3}{2}} > 0$. Άρα ο Εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος σε όλο το πεδίο ορισμού του και επομένως στο σημείο έχουμε μέγιστο.

Δευτέρα 20/04/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η συνάρτηση χρησιμότητας Uγια δύο αγαθά X,Yενός καταναλωτή είναι της μορφής $U(X,Y) = 5XY - X^2 - 6Y^2 - 4X + 6Y$. Για ποιες ποσότητες μεγιστοποιείται η χρησιμότητά του;

ΛΥΣΗ

Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τα αγαθά για την συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας.

$$\frac{\partial U(X,Y)}{\partial X} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \left[5XY - X^2 - 6Y^2 - 4X + 6Y\right]}{\partial X} = 0 \Leftrightarrow -2X + 5Y - 4 = 0$$

$$\frac{\partial U(X,Y)}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \left[5XY - X^2 - 6Y^2 - 4X + 6Y\right]}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow 5X - 12Y + 6 = 0$$

με λύση (X,Y)=(18,8).

Για τις συνθήκες δεύτερης τάξης ηεσσιανή ορίζουσα ορίζεται ως εξής:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι $H_1 = -2 < 0, H_2 = 24 > 0$ οπότε η συνάρτηση χρησιμότητας θα έχει μέγιστο στο σημείο (X,Y)=(18,8).

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=6x+8y+1$ για τα σημεία του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ(2,1) και ακτίνα 5.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε την κάτωθι συνάρτηση Langrange ως εξής:

$$L(x,y,,\lambda)=f(x,y)\pm\lambda g(x,y)=6x+8y+1\pm\lambda\left[(x-2)^2+(y-1)^2-25\right]$$

Τα πιθανά ακρότατα θα προκύψουν με βάση το παρακάτω σύστημα:

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left\{6x+8y+1\pm\lambda\left[(x-2)^2+(y-1)^2-25\right]\right\}}{\partial x}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6+2\lambda(x-2)=0\Leftrightarrow\lambda(x-2)=-3\ (1)$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left\{6x+8y+1\pm\lambda\left[(x-2)^2+(y-1)^2-25\right]\right\}}{\partial y}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8+2\lambda(y-1)=0\Leftrightarrow\lambda(y-1)=-4\ \ (2)$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left\{6x+8y+1\pm\lambda\left[(x-2)^2+(y-1)^2-25\right]\right\}}{\partial \lambda}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2-25=0\ \ (3)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) $\frac{\lambda(x-2)}{\lambda(y-1)}=\frac{-3}{-4}\Leftrightarrow 4(x-2)=3(y-1)$. Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε τα σημεία $P_1(5,5,-1)$ και $P_2(-1,-3,1)$ ως σημεία στάσης.

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\lambda}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial\lambda}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & x-2\\ 0 & \lambda & y-1\\ x-2 & y-1 & 0\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & y-1\\ y-1 & 0\end{vmatrix}+(x-2)\begin{vmatrix}0 & \lambda\\ x-2 & y-1\end{vmatrix}=$$
$$=-\lambda(y-1)^2-\lambda(x-2)^2=-\lambda(x+y-3)$$

Για το σημείο $P_1(5,5,-1)$ με αντικατάσταση στην εσσιανή θα έχω ότι

$H=-\lambda\left(x+y-3\right)=7>0$. Ωστόσο $H_1=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\lambda=-1<0$ και

$H_2=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & y-1\\ y-1 & 0\end{vmatrix}=-\lambda\left(y-1\right)^2$. Συνεπώς τοπικό μέγιστο.

Για το σημείο $P_2(-1,-3,1)$ με αντικατάσταση στην εσσιανή θα έχω ότι $H=-\lambda\left(x+y-3\right)=7>0$ και $H_2=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & y-1\\ y-1 & 0\end{vmatrix}=-\lambda\left(y-1\right)^2$. Ωστόσο $H_1=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\lambda=1>0$,Συνεπώς τοπικό ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα νοικοκυριό καταναλώνει δύο αγαθά σε ποσότητες x_1, x_2 με βάση την συνάρτηση χρησιμότητας $U\left(x_1,x_2\right)=x_1^{0.6}x_2^{0.4}$. Εάν η τιμή μονάδας των δύο αγαθών είναι $p_1=2$ και $p_2=4$ και το διαθέσιμο ποσό ανά μήνα για τα δύο αγαθά είναι 120 ευρώ να υπολογιστούν οι ποσότητες που επιλέγει το νοικοκυριό.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε την κάτωθι συνάρτηση Langrange ως εξής:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=U\left(x_1,x_2\right)\pm\lambda BC\left(x_1,x_2\right)=x_1^{0.6}x_2^{0.4}\pm\lambda\left[I-p_1x_1-p_2x_2\right]=x_1^{0.6}x_2^{0.4}\pm\lambda\left[120-2x_1-4x_2\right]$$

Τα πιθανά ακρότατα θα προκύψουν με βάση το παρακάτω σύστημα:

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left\{x_1^{0.6}x_2^{0.4}\pm\lambda\left[120-2x_1-4x_2\right]\right\}}{\partial x_1}=0\Leftrightarrow 0.6x_1^{-0.4}x_2^{0.4}-2\lambda=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.6x_1^{-0.4}x_2^{0.4}=2\lambda \ (1)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left\{x_1^{0.6}x_2^{0.4}\pm\lambda\left[120-2x_1-4x_2\right]\right\}}{\partial x_2}=0\Leftrightarrow 0.4x_1^{0.6}x_2^{-0.6}-4\lambda=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.4x_1^{0.6}x_2^{-0.6}=4\lambda \ (2)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left\{x_1^{0.6}x_2^{0.4}\pm\lambda\left[120-2x_1-4x_2\right]\right\}}{\partial \lambda}=0\Leftrightarrow 120-2x_1-4x_2=0 \ (3)$$

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη θα έχουμε ότι $\frac{0.6x_1^{-0.4}x_2^{0.4}}{0.4x_1^{0.6}x_2^{-0.6}}=\frac{2\lambda}{4\lambda}\Leftrightarrow x_1=3x_2$. Με βάση την σχέση αυτήν στην εξίσωση (3) $x_2=12$ και $x_1=3x_2=36$. Από την σχέση (1) πρέπει να υπολογίσω το λ.

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial\lambda}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial\lambda}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}\end{vmatrix}=$$

Δευτέρα 10/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα προϊόν παράγεται με την χρήση κεφαλαίου και εργασίας με βάση την σχέση $Q(K,L)=K^{1/4}L^{1/2}$. Ποιος ο οριακός λόγος υποκατάστασης πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος Q=3 όταν χρησιμοποιούνται K=1 και L=9 μονάδες από τον κάθε συντελεστή αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος δίνεται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}=-\frac{\frac{1}{2}K^{1/4}L^{-1/2}}{\frac{1}{4}K^{-3/4}L^{1/2}}=-2K^{-1/2}L^{-1}=\frac{-2}{9}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα με βάση τις ακόλουθες συναρτήσεις ζήτησης $Q_1=14-0.25P_1, Q_2=24-0.5P_2$. Η συνάρτηση συνολικού κόστους της επιχείρησης δίνεται από την εξής σχέση $TC=Q_1^2+5Q_1Q_2+Q_2^2$. Να υπολογίσετε τα επίπεδα παραγωγής στα οποία μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση κερδών της επιχείρησης δίνεται ως εξής:

$$\Pi(Q_1,Q_2)=P_1Q_1+P_2Q_2-TC(Q_1,Q_2)=(56-4Q_1)Q_1+(48-2Q_2)Q_2-\left[Q_1^2+5Q_1Q_2+Q_2^2\right]=$$
$$=56Q_1-4Q_1^2+48Q_2-2Q_2^2-Q_1^2-5Q_1Q_2-Q_2^2=$$
$$=-5Q_1^2+56Q_1-3Q_2^2+48Q_2-5Q_1Q_2$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των παραγώγων πρώτης τάξεως ως προς τις ποσότητες. Συνεπώς,

$$\frac{\partial\Pi(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left(-5Q_1^2+56Q_1-3Q_2^2+48Q_2-5Q_1Q_2\right)}{\partial Q_1}=0\Leftrightarrow-10Q_1+56-5Q_2=0$$
$$\frac{\partial\Pi(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\left(-5Q_1^2+56Q_1-3Q_2^2+48Q_2-5Q_1Q_2\right)}{\partial Q_2}=0\Leftrightarrow-6Q_2+48-5Q_1=0$$

Θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα για υπολογίσουμε τα πιθανά ακρότατα από τις παραπάνω δύο εξισώσεις $(Q_1,Q_2)=\left(\frac{96}{35},\frac{40}{7}\right)$

Επίσης ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξεως:

$\frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1^2}=-10<0,\frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2^2}=-6<0,\frac{\partial\Pi^2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1\partial Q_2}=-5$. Συνεπώς η Εσσιανή μήτρα/ πίνακας υπολογίζεται ως εξής: $\mathrm{H}=\begin{bmatrix}-10 & -5\\ -5 & -6\end{bmatrix}=-35<0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή εξαρτάται από τρία αγαθά με βάση την εξής συνάρτηση: $U(Q_1,Q_2,Q_3)=-Q_1^2-Q_2^2-2Q_3^2+10Q_1+20Q_2+40Q_3$.Εάν η τιμή απόκτησης των αγαθών (Q_1,Q_2,Q_3) είναι (P_1,P_2,P_3) αντίστοιχα και ο καταναλωτής επιθυμεί να ξοδέψει mμονάδες βρείτε τις ποσότητες που πρέπει να αποκτήσει για να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητά του.

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε την συνάρτηση Lagrange ως εξής:

$$L = U\left(Q_1, Q_2, Q_3\right) \pm \lambda g\left(I\right) = -Q_1^2 - Q_2^2 - 2Q_3^2 + 10Q_1 + 20Q_2 + 40Q_3 \pm \lambda\left(P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - m\right)$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των παραγώγων πρώτης τάξεως ως προς τις ποσότητες. Συνεπώς,

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = 0 \Leftrightarrow -2Q_1 + 10 + \lambda P_1 = 0 \Leftrightarrow 2Q_1 - \lambda P_1 = 10$$
$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = 0 \Leftrightarrow -2Q_2 + 20 + \lambda P_2 = 0 \Leftrightarrow 2Q_2 - \lambda P = 20$$
$$\frac{\partial L}{\partial Q_3} = 0 \Leftrightarrow -4Q_3 + 40 + \lambda P_3 = 0 \Leftrightarrow 4Q_3 - \lambda P_3 = 40$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - m = 0 \Leftrightarrow P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 = m$$

Επίσης ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξεως:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2} = -2, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_3} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial \lambda} = P_1$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_1} =, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2} =, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_3} =, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial \lambda} =,$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_3 \partial Q_1} =, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_3 \partial Q_2} =, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_3^2} =, \frac{\partial^2 L}{\partial Q_3 \partial \lambda} =,$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1} =, \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2} =, \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_3} =, \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} =,$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Μια οικονομία περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις όπου Yείναι το εισόδημα, Cοι δαπάνες για κατανάλωση, Ιοοι αυτόνομες επενδύσεις, G_0οι κυβερνητικές δαπάνες και Tτα φορολογικά έσοδα.Κατά πόσον θα μεταβληθούν το εισόδημα ισορροπίας, η κατανάλωση ισορροπίας και η φορολογία εάν οι αυτόνομες επενδύσεις μεταβληθούν κατά 10 μονάδες;

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = 90 + 0.8(Y - T)$$
$$T = 50 + 0.25Y$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΛΥΣΗ

Οι ενδογενείς μεταβλητές είναι αυτές του εισοδήματος, των δαπανών για κατανάλωση και των φορολογικών εσόδων ενώ οι μεταβλητές I_0 και G_0είναι οι εξωγενείς. Ζητείται να υπολογίζεται τα εξής:

$\frac{dY^*}{dI_0} = ?, \frac{dC^*}{dI_0} = ? \frac{dT^*}{dI_0} = ?$ Ξαναγράφουμε τις εξισώσεις στην εξής μορφή:

$\varphi_1(\bullet) = Y - C - I_0 - G_0 = 0$

$\varphi_2(\bullet) = C - 90 - 0.8Y + 0.8T = 0$ και υπολογίζω την Ιακωβιανή ορίζουσα ως εξής:

$\varphi_3(\bullet) = T - 50 + 0.25Y = 0$

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_{1Y} & \varphi_{1C} & \varphi_{1T} \\ \varphi_{2Y} & \varphi_{2C} & \varphi_{2T} \\ \varphi_{3Y} & \varphi_{3C} & \varphi_{3T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.8 & 1 & 0.8 \\ -0.25 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.4 \neq 0$$

Για να υπολογίσω το $\frac{dY^*}{dI_0} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{1I_0} & \varphi_{1C} & \varphi_{1T} \\ \varphi_{2I_0} & \varphi_{2C} & \varphi_{2T} \\ \varphi_{3I_0} & \varphi_{3C} & \varphi_{3T} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{1Y} & \varphi_{1C} & \varphi_{1T} \\ \varphi_{2Y} & \varphi_{2C} & \varphi_{2T} \\ \varphi_{3Y} & \varphi_{3C} & \varphi_{3T} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{0.4} = 2.5$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

Δευτέρα 17/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $y' = y^2 \cos x$.

ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση $y' = y^2 \cos x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ είναι της μορφής $y' = f(x)g(y)$

Συνεπώς, πρόκειται για χωριζομένων μεταβλητών. Το πρώτο μας βήμα είναι να χωρίσουμε τις συναρτήσεις στα δύο μέλη.

$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = \cos x dx$, το δεύτερο βήμα είναι να ολοκληρώσουμε:

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -\sin x + c \Leftrightarrow y = \frac{-1}{\sin x + c}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $y' = -2y, y(x) > 0, y(0) = 5$.

ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση $y' = -2y$ είναι της μορφής $y' = f(x)g(y)$ και είναι χωριζομένων μεταβλητών.

$y' = -2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Leftrightarrow \ln|y| = -2x + c$ που αποτελεί και την λύση της ΣΔΕ.

Ωστόσο μας δίνεται και η ΠΑΤ όπου $y(0) = 5 \Leftrightarrow \ln|5| = -2 \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = \ln 5$. Άρα, η λύση της ΣΔΕ είναι $\ln|y| = -2x + \ln 5$. Επειδή $y(x) > 0$ θα έχω ότι $\ln y = -2x + \ln 5 \Leftrightarrow y = 5e^{-2x}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένας πληθυσμός αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 4% ετησίως ανά έτος. Εάν ο αρχικός πληθυσμός είναι 10.000 να υπολογίσετε το ν πληθυσμό την χρονική στιγμή t (πάντα σε έτη).

ΛΥΣΗ

Έστω P(t) ο πληθυσμός της περιοχής. Τότε, $\frac{P'(t)}{P(t)} = 4\% \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = 0.04P \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = 0.04dt \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P} = 0.04\int dt \Leftrightarrow \ln P = 0.04t + c$.

Επειδή όταν t=0 ο αρχικός πληθυσμός είναι 10.000 θα ισχύει ότι $\ln(10.000) = c$. Άρα η λύση θα είναι η εξής $\ln P = 0.04t + \ln(10.000)$ (*παρακαλώ λύστε ως προς P*).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $x' = \frac{x}{t}\left(1 + \ln(\frac{x}{t})\right)$.

ΛΥΣΗ

Δουλεύουμε την ΣΔΕ μας $x' = \frac{x}{t}\left(1 + \ln(\frac{x}{t})\right) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{x}{t}\ln(\frac{x}{t}) \Leftrightarrow tdx - x(1 + \ln(\frac{x}{t}))dy = 0$.

Εξετάζω την ομογένεια. Δηλαδή, $f(kx,kt) = \frac{kx}{kt}\left(1 + \ln(k\frac{kx}{t})\right) = k^0 f(kx,kt)$.Είναι ομογενής βαθμού μηδενικού και θεωρώ την αντικατάστασηx=ut. Συνεπώς,

$$(ut)' = \frac{ut}{t}\left(1 + \ln(\frac{ut}{t})\right) \Leftrightarrow u't + u = u(1 + \ln u) \Leftrightarrow u't + u = u + u\ln u \Leftrightarrow u't = u\ln u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt}t = u\ln u \Leftrightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \ln|\ln u| = \ln|t| + c$$

Τώρα θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το u. Άρα,

$$\ln|\ln u| = \ln|t| + c \Leftrightarrow \ln\left|\ln\frac{x}{t}\right| = \ln|t| + c \Leftrightarrow \left|\ln\frac{x}{t}\right| = e^{\ln|t|+c} \Leftrightarrow |x| = |t|e^{e^{\ln|t|+c}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

ΛΥΣΗ

Είναι ομογενής καθώς $(\kappa^2x^2 + \kappa^2y^2)dx - 2\kappa\kappa dy = \kappa^2(x^2 + y^2)dx - 2\kappa^2dy = \kappa^2\left[(x^2 + y^2)dx - 2xydy\right]$

Θεωρούμε την αντικατάσταση y=ux. Συνεπώς, $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)dx=2xydy \Leftrightarrow y^{'}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$,

$$(ux)^{'}=\frac{x^2+(ux)^2}{2x(ux)} \Leftrightarrow u^{'}x+u=\frac{x^2(1+u)}{2x^2u} \Leftrightarrow 2u^{'}xu+2u^2=1+u \Leftrightarrow 2u^{'}xu=1+u-2u^2 \Leftrightarrow$$

$$u^{'}x=\frac{1-u^2}{2u} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x=\frac{1-u^2}{2u} \Leftrightarrow \frac{2u}{1-u^2}du=\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int\frac{2u}{1-u^2}du=\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$-\ln\left|u^2-1\right|=\ln|x|+c \Leftrightarrow -\ln\left|\left(y/x\right)^2-1\right|=\ln|x|+c$$

Τρίτη 18/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $xy^{'}=2y+x^3\sin x$.

ΛΥΣΗ

Προσπαθώ να φέρω σε γνωστή μορφή της ΣΔΕ που έχω να επιλύσω.

$xy^{'}=2y+x^3\sin x \Leftrightarrow y^{'}-\frac{2}{x}y=x^2\sin x$ όπου παρατηρώ ότι είναι ΣΔΕ γραμμική πρώτης τάξης. Γνωρίζω ότι $A(x)=-\frac{2}{x}, B(x)=x^2\sin x$. Συνεπώς η λύση θα είναι της μορφής,

$$y=e^{-\int A(x)dx}\left[c+\int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right]=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[c+\int x^2\sin xe^{-\int\frac{2}{x}dx}dx\right]=$$

$$=e^{\ln x^2}\left[c+\int x^2\sin xe^{-\ln x^2}dx\right]=x^2\left[c+\int x^2\sin x\frac{1}{x^2}dx\right]=x^2\left(c+\int\sin xdx\right)=$$

$$=x^2\left(x-\cos x\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένας καταναλωτής επενδύει σε έναν λογαριασμό συνταξιοδότησης που πληρώνει τόκο 6% ετησίως. Αρχικά καταθέτει 1000 ευρώ και σχεδιάζει να πραγματοποιήσει μελλοντικές καταθέσεις 2400 ευρώ ετησίως. Υποθέστε ότι οι καταθέσεις γίνονται συνεχώς και ότι το ποσό ανατοκίζεται συνεχόμενα. Έστω P(t) το ποσό των χρημάτων στον λογαριασμό μετά την αρχική κατάθεση. Ποιο είναι αυτό το ποσό;

ΛΥΣΗ

Εάν ο καταναλωτής δεν καταθέτει ή δεν παίρνει λεφτά από τον λογαριασμό του τότε:

$\frac{P'(t)}{P(t)} = k, k = 6\%$. Λαμβάνοντας υπόψη και το γεγονός ότι θα γίνονται καταθέσεις τότε ο ρυθμός μεταβολής των χρημάτων του θα είναι αποτέλεσμα των δύο αυτών πράξεων. Αρα,

$P'(t) = 0.06P(t) + 2400 \Leftrightarrow P'(t) - 0.06P(t) = 2400$ Παρατηρώ ότι $A(t) = -0.06, B(t) = 2400$. Συνεπώς η λύση θα είναι της μορφής,

$$P(t) = e^{-\int A(t)dx}\left[c + \int B(t)e^{\int A(t)dt}dt\right] = e^{\int 0.06dt}\left[c + \int 2400^{-\int 0.06dt}dt\right] = e^{0.06t}\left(c + \int 2400e^{-0.06t}dt\right) =$$
$$e^{0.06t}\left(c + 2400\int e^{-0.06t}dt\right) = e^{0.06t}\left(-4000e^{-0.06t} + c\right)$$

Γνωρίζουμε ότι P(0)=1000. Με αντικατάσταση θα έχουμε $P(0) = e^{0.06\cdot 0}\left(-4000e^{-0.06\cdot 0} + c\right) \Leftrightarrow 1000 = c$ Οπότε η λύση διαμορφώνεται ως εξής: $P(t) = e^{0.06t}\left(-4000e^{-0.06t} + 1000\right) = -40000 + 41000e^{0.06t}$

Δευτέρα 24/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού ως προς την τιμή p δίνεται ως εξής $\varepsilon_p = \frac{8-q}{q}, q > 8$.

Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης εάν η τιμή είναι ίση με 3 όταν η ζητούμενη ποσότητα ισούται με q=10.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από την θεωρία μας ότι $\varepsilon_p = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \frac{8-q}{q}$. Πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση της ποσότητας ως προς την τιμή όπου $\varepsilon_p = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = q^{'}(p)\frac{p}{q} = \frac{8-q}{q}$. Εάν την δουλέψουμε λίγο θα έχουμε ότι: $\frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \frac{8-q}{q} \Leftrightarrow \frac{dq}{dp}p = \frac{8}{q} - 1$. Παρατηρώντας αυτή βλέπουμε ότι είναι ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών. Άρα,

$\frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \frac{8-q}{q} \Leftrightarrow \frac{dq}{8-q} = \frac{dp}{p}$, ολοκληρώνοντας θα έχουμε

$\int \frac{dq}{8-q} = \int \frac{dp}{p} \Leftrightarrow -\ln(8-q) = \ln p - \ln c \Leftrightarrow \ln p(q-8) = \ln c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(q-8) = c$
. Γνωρίζουμε ότι για q=10 η τιμή p=3 . Άρα, $3(10-8) = c \Rightarrow c = 6$. Η συνάρτηση ζήτησης ισούται με $q(p) = \frac{6}{p} + 8$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} - \frac{2y}{t} = 4ty^2$.

ΛΥΣΗ

Με βάση την μορφή της καταλαβαίνουμε ότι είναι Bernoulli. Πρώτο βήμα μας είναι να πολλαπλασιάσουμε με το y^{-2}. Συνεπώς, $\frac{dy}{dt}y^{-2} - \frac{2y}{t}y^{-2} = 4ty^2y^{-2} \Leftrightarrow y^{'}y^{-2} - \frac{2y}{t}y^{-2} = 4ty^2y^{-2} \Leftrightarrow y^{'}y^{-2} - \frac{2}{t}y^{-1} = 4t$. Θέτουμε $y^{-1} = w(t) \Rightarrow -y^{-2}y^{'} = w^{'}$. Με αντικατάσταση στην παραπάνω διαφορική θα έχουμε:

$w^{'} - \frac{2}{t}w = 4t$ που πρόκειται για μια ΣΔΕ γραμμικής πρώτης τάξης με λύση:

$$y = e^{-\int A(t)dt}\left[c + \int B(t)e^{\int A(t)dx}dt\right] = e^{-\int \frac{2}{t}dt}\left[c + \int 4te^{\int \frac{2}{t}dt}dt\right] =$$
$$= e^{-\ln t^2}\left[c + \int 4te^{\ln t^2}dt\right] = \frac{1}{t^2}\left[c + \int 4t^3 dt\right] = \frac{1}{t^2}\left(c + t^4\right)$$

Τρίτη 25/05/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς σε μια ανταγωνιστική αγορά δίνονται ως εξής: $Q_d = 50 - 0.2P, Q_s = -10 + 0.3P$ και ο ρυθμός προσαρμογής της τιμής, όταν η αγορά είναι εκτός ισορροπίας είναι $\frac{dP}{dt} = 0.4(Q_d - Q_s)$. Διατυπώστε και επιλύστε την σχετική διαφορική εξίσωση με δεδομένο ότι η τιμή είναι 100 την χρονική περίοδο t=0.

ΛΥΣΗ

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης θα πρέπει μα αντικατάσταση να έχουμε:

$$\frac{dP}{dt} = 0.4(Q_d - Q_s) = 0.4\left(50 - 0.2P + 10 - 0.3P\right) = 0.4\left(60 - 0.5P\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{dP}{dt} = 24 - 2P$$

Άρα θα πρέπει να επιλύσετε την παραπάνω διαφορική εξίσωση η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξεως.

$$\frac{dP}{dt} = 24 - 2P \Leftrightarrow P^{'}\left(t\right) + 2P(t) - 24 = 0 .$$

$$y = e^{-\int A(t)dt}\left[c + \int B(t)e^{\int A(t)dx}dt\right] = e^{-\int 2dt}\left[c + \int (-24)e^{\int 2dt}dt\right] = ..$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + y\right)dy = 0$.

ΛΥΣΗ

Θα εξετάσουμε εάν είναι ακριβής. Υπολογίζουμε τα εξής:

$$f_y = \frac{\partial\left(x^2 + 2xy\right)}{\partial y} = 2x$$

$$g_x = \frac{\partial\left(x^2 + y\right)}{\partial x} = 2x$$

και συνεπώς η διαφορική μας εξίσωση είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.

Ψάχνουμε μια συνάρτηση P(x,y) όπου θα ισχύει το εξής:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(x^2 + 2xy\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(x^2 + y\right)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση ως προς $\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + y\right)dy = 0$ ως προς χκρατώντας το γσταθερό παίρνουμε:

$$P(x,y) = \int\left(x^2 + 2xy\right)dx + c(y) = \int x^2 dx + \int\left(2xy\right)dx + c(y) \Leftrightarrow$$

$$P(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + c(y)$$

Τώρα η συνάρτησηP(x,y) που υπολογίσαμε θα πρέπει να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(x^2 + y\right) \Leftrightarrow \frac{\partial\left(\frac{x^3}{3} + x^2 y + c(y)\right)}{\partial y} = \left(x^2 + y\right) \Leftrightarrow x^2 + c^{'}(y) = x^2 + y \Leftrightarrow c(y) = {}^{y^2}\!\big/_{2} + c_1$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε ότι $P(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + {}^{y^2}\!\big/_{2} + c_1$

Άρα η γενική λύση θα είναι

$$P(x,y) = c_2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 y + {}^{y^2}\!\big/_{2} + c_1 = c_2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 y + {}^{y^2}\!\big/_{2} = c^*$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $\left(y^2 + x\right)dx - 2xydy = 0$ *(γνωρίζουμε ότι η ΣΔΕ έχει πολλαπλασιαστή Euler ο οποίος είναι συνάρτηση μόνον της μεταβλητής x).*

ΛΥΣΗ

Θα εξετάσουμε εάν είναι ακριβής. Υπολογίζουμε τα εξής:

$$f_y = \frac{\partial\left(y^2+x\right)}{\partial y} = 2y$$
$$g_x = \frac{\partial(-2xy)}{\partial x} = -2y$$

και συνεπώς η διαφορική μας εξίσωση δεν είναι άμεσα ολοκληρώσιμη.

Με βάση την θεωρία μας $\mu(x)\left(y^2+x\right)dx - \mu(x)2xydy = 0$ θα πρέπει να είναι ακριβής και συνεπώς να ισχύει ότι:

$$f_y = g_x \Leftrightarrow \frac{\partial\mu(x)\left(y^2+x\right)}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x)(-2xy)}{\partial x} \Leftrightarrow 2y\mu(x) = \mu^{'}(x)(-2xy) - 2y\mu(x) \Leftrightarrow$$
$$4y\mu(x) = \mu^{'}(x)(-2xy) \Leftrightarrow 2\mu(x) = -x\mu^{'}(x) \Leftrightarrow -x\frac{d\mu}{dx} = 2\mu(x)$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Συνεπώς,

$$-x\frac{d\mu}{dx} = 2\mu(x) \Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{x}dx \Leftrightarrow \int\frac{d\mu}{\mu} = \int\frac{-2}{x}d \Leftrightarrow \ln|\mu| = -2\ln|x| \Leftrightarrow \mu(x) = x^{-2}$$

Με πολλαπλασιασμό των μελών με τον πολλαπλασιαστή του Eulerθα έχουμε ότι

$x^{-2}\left(y^2+x\right)dx - x^{-2}2xydy = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$. Για την λύση της ακριβούς ΣΔΕ θα πρέπει να

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\frac{y}{x}$$

Με βάση την προηγούμενη άσκηση

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y^2}{x}+c(x)\right) = \left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{y^2}{x^2}+c^{'}(x) = \frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow c^{'}(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$\int c^{'}(x)dx = \int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow c(x) = \ln|x| + c_1$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε: $P(x,y) = -\frac{y^2}{x} + \ln|x| + c_1$. Άρα η γενική λύση της ΣΔΕ είναι

$$P(x,y) = c_2 \Leftrightarrow -\frac{y^2}{x} + \ln|x| + c_1 = c_2 \Leftrightarrow -\frac{y^2}{x} + \ln|x| = c^*$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

Δευτέρα 31/05/2021

Ζ. Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξεως

Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι η παρακάτω: $y^n(x)+a_{n-1}y^{n-1}+...+a_o y=0 \Leftrightarrow y''+a_1y'+a_o y=0$. Για την επίλυση της συγκεκριμένης Δ.Ε δοκιμάζουμε την λύση της μορφής $y=e^{\lambda t}$. Άρα θα έχουμε

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+\alpha_1\lambda e^{\lambda t}+\alpha_2 e^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow e^{\lambda t}\left(\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_2\right)=0 \quad \text{με}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha_1\pm\sqrt{\alpha_1-4\alpha_2^2}}{2}$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις Δ>0, Δ<0, Δ=0.

1) Πρώτη Περίπτωση όπου Δ>0

Έχουμε δύο πραγματικές ρίζες $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ με γενική λύση $y_t=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$

2) Δεύτερη Περίπτωση όπου Δ=0

Έχουμε διπλή πραγματική ρίζα $\mu=\frac{-a_1}{2}$ και η $y_t=e^{\mu t}$ λύση της Δ.Ε. Θα έχουμε

$$2\mu e^{\mu t}+\mu^2te^{\mu t}+a_1\left(e^{\mu t}+\mu te^{\mu t}\right)+a_2te^{\mu t}=\left(2\mu+a_1\right)e^{\mu t}+\left(\mu^2+2\mu a_1+a_2\right)e^{\mu t},$$ με γενική λύση $y=e^{\mu t}\left(A_1+A_2t\right)$.

3) Τρίτη Περίπτωση όπου Δ<0

Έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές $\lambda_{1,2}=u\pm iv, u=\frac{-a_1}{2}, v=\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}$, και γενική λύση $y(t)=A_1'e^{(u+vi)t}+A_2'e^{(u-vi)t}$

$$y=e^{ut}\left(A_1\cos(vt)+A_2\sin(vt)\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''-3y'+2y=0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $y'' \equiv \lambda^2, y' \equiv \lambda, y = 1$ προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ με ρίζες τις 1 και 2. Άρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - y' - 2y = 0$

ΛΥΣΗ

Με βάση τα παραπάνω η χαρακτηριστική εξίσωση της ΣΔΕ είναι της μορφής $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ με ρίζες τις 2 και -1. Άρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 2y' + 5y = 0$

ΛΥΣΗ

Τι παρατηρείται τώρα;Με βάση τα παραπάνω η χαρακτηριστική εξίσωση της ΣΔΕ είναι της μορφής $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ με ρίζες μη πραγματικές αλλά μιγαδικές.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 9y = 0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $y'' \equiv \lambda^2, y' \equiv \lambda, y = 1$ προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2 - 9 = 0$ με διπλή ρίζα το -3,+3. Άρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

ΛΥΣΗ

Προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ με διπλή ρίζα το -3. Άρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = e^{-3x}\left(c_1 + c_2 x\right)$. Επειδή όμως $y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = e^{-3\cdot 0}\left(c_1 + c_2 \cdot 0\right) \Leftrightarrow c_1 = 0$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $y'(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -3e^{-3\cdot 0}\left(0 + c_2 0\right) + e^{-3\cdot 0} c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2$.Άρα η γενική της λύση είναι η παρακάτω $y = 2xe^{-3x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

ΛΥΣΗ

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να γράφουμε την χαρακτηριστικής εξίσωση με βάση τον μετασχηματισμό που έχουμε χρησιμοποιήσει στην θεωρία μας. Αυτή είναι $\lambda^2 + 9 = 0$ με λύση πλέον μιγαδικές ρίζες της μορφής: $a \pm ib = \pm 3i (\alpha = 0)$. Η γενική της λύση τότε θα είναι της μορφής:

$$y = e^{ax}\left(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)\right) \Rightarrow y = \left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right) \quad (1).$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ΠΑΤ $y(0) = 0, y'(0) = 1$ θα έχουμε ότι

$y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \left(c_1 \cos(3\cdot 0) + c_2 \sin(3\cdot 0)\right) \Leftrightarrow c_1 = 0$ *και*

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = -3c_1 \sin(3\cdot 0) + 3c_2 \cos(3\cdot 0) \Leftrightarrow c_1 = \dfrac{-1}{3}$. Η γενική μας λύση $y = \left(\dfrac{-1}{3}\cos(3x)\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''-6y'+10y=0$

ΛΥΣΗ

Στην τρίτη διαφορική εξίσωση που εξετάζουμε παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $y''\equiv\lambda^2, y'\equiv\lambda, y=1$ προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2-6\lambda+10=0$ με μιγαδικές ρίζες $a\pm ib=3\pm i$. Άρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης με a=3, b=1 είναι της μορφής

$$y=e^{ax}\left(c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right)\Rightarrow y=e^{3x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για μια ΣΔΕ δεύτερης τάξεως μη ομογενής. Το πρώτο μας βήμα είναι να λύσουμε την ομογενής δηλαδή την $y''+y=0$. Με βάση όσο έχουμε πει παραπάνω θα έχουμε ότι $\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=\pm i$ με λύση της μορφής $y=e^{ax}\left(c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right)\Rightarrow y=\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$.

Έστω $y_0(x)=\left(c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\right)$. Με βάση την μέθοδο Langrangeέχουμε τις συνθήκες,

$$c_1'y_1(x)+c_2'y_2(x)=0\Leftrightarrow c_1'\cos(x)+c_2'\sin(x)=0\Leftrightarrow c_1'\cos(x)+c_2'\sin(x)=0$$

$$c_1'y_1'(x)+c_2'y_2'(x)=f(x)\Leftrightarrow c_1'\left[\cos(x)\right]'+c_2'\left[\sin(x)\right]'=\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow -c_1'\sin(x)+c_2'\cos x=\frac{1}{\cos x}$$

Οι λύσεις του συστήματος $\begin{array}{l} c_1'=\tan(x)\Leftrightarrow c_1=\ln\left|\cos x\right|+k_1^* \\ c_2'=1\Leftrightarrow c_2=x+k_2^* \end{array}$. Οπότε η γενική μας λύση

$$y_0(x)=\left(c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\right)=\ln\left|\cos x\right|\cos(x)+x\sin x+k_1^*\cos(x)+k_2^*\sin(x)$$