ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ-Μάθημα 3

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Στόχοι του Μαθήματος

- Μελέτη της Θεωρίας και κατανόηση της έννοιας της ορίζουσας.
- Εφαρμογές σε οικονομικά προβλήματα και συσχέτιση των μαθηματικών με την οικονομική θεωρία αλλά και με μαθήματα που θα χρησιμοποιήσουν την συγκεκριμένη έννοια (π.χ οικονομετρία).

ΟΡΙΖΟΥΣΑ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$. Εφαρμόζοντας για παράδειγμα την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$\begin{cases} \alpha'\alpha x + \alpha'\beta y = \alpha'\gamma \\ -\alpha\alpha' x - \alpha\beta' y = -\alpha\gamma' \end{cases}$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$y(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \alpha'\gamma - \alpha\gamma'$ και x $(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \gamma\beta' - \gamma'\beta$.

Ο συντελεστής των x και y αποτελεί την λεγόμενη ορίζουσα του συστήματος

Ορισμός: Στον διανυσματικό χώρο των πινάκων 2×2 τον οποίο συμβολίζουμε $\mathrm{M}_{2\times 2}$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς ορίζουμε μια συνάρτηση

D: $\mathrm{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ με τιμή D(A)= $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ με A= $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}$ και συμβολίζεται με

$$\mathrm{D(A)}= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

Έννοια Ορίζουσας Ι (Περίπτωση 2x2 πίνακα

Στην περίπτωση του υπολογισμού του αντίστροφου ενός πίνακα Α $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ εισαγάγαμε τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Η ποσότητα $ad-bc$ ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα Α και αποτελεί μια από τις βασικές έννοιες για τον υπολογισμό πινάκων καθώς και για την λύση γραμμικών συστημάτων όπως θα παρατηρήσουμε και στην συνέχεια.

Έννοια Ορίζουσας σε πίνακα 2x2

- Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(F)$

Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός $|A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

- Για παράδειγμα,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \det(A) \equiv |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \left[(2*4) - (-1)(3)\right] = 11$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την ορίζουσα mxn πίνακα και για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε την έννοια της απεικόνισης.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Όπως έχουμε καθιερώσει σε προηγούμενα κεφάλαια, με F παριστάνουμε ένα από τα σύνολα R και C.

Επίσης με $A \in M_n(F)$ το σύνολο των nxn πινάκων με στοιχεία από το F.

Ο συμβολισμός που θα επικρατήσει για λόγους χρηστικότητας θα είναι $A \in M_n$

Έννοια Ορίζουσας ΙΙ

Ορίζουσα είναι μία απεικόνιση $\det: M_n(F) \to F : A \to \det A$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Εάν δύο γραμμές του πίνακα ταυτίζονται τότε η ορίζουσα του είναι μηδέν.
2. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι 1.
3. Εάν δύο γραμμές του πίνακα ταυτίζονται η ορίζουσα είναι μηδέν.

$$a_i = \lambda x + \mu y \Rightarrow \det(A) = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \mu \det \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_i \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα $n^{ης}$ τάξης

Ορισμός: Στον διανυσματικό χώρο των πινάκων n×n τον οποίο συμβολίζουμε $\mathrm{M}_{n\times n}$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς ορίζουμε μια συνάρτηση

$$D:\mathrm{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

με τις ιδιότητες:

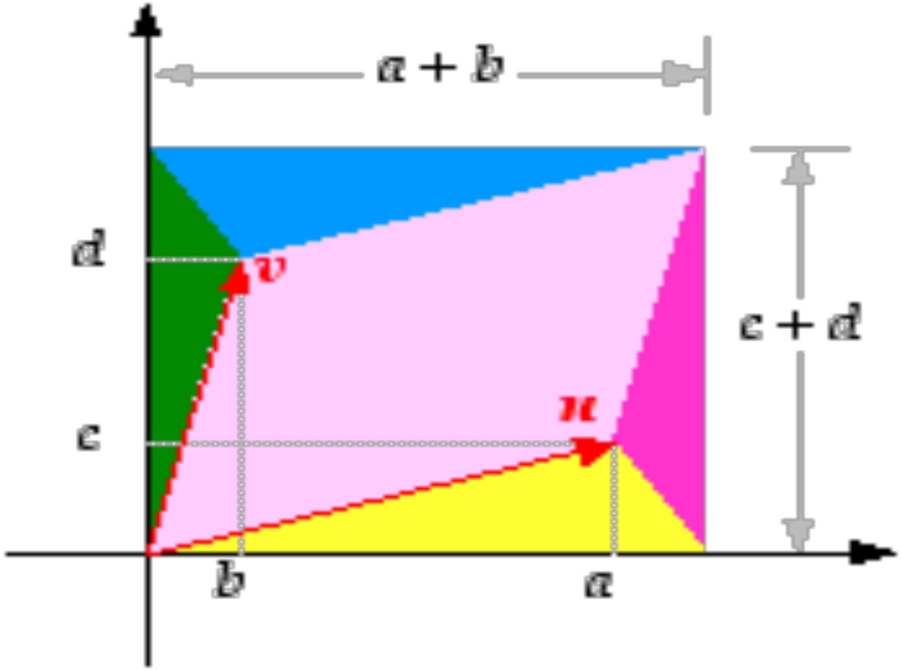
1. Είναι n-γραμμική, δηλαδή γραμμική ως προς κάθε στήλη.
2. Μηδενίζεται όταν δύο στήλες είναι ίσες.
3. Η τιμή της στον μοναδιαίο πίνακα είναι 1.

Η συνάρτηση D ονομάζεται ορίζουσα n-τάξης . Η τιμή της D(A) ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα A.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Ας θεωρήσουμε 2 διανύσματα u (b,d) and v(a,c)

$(a + b)(c + d) - (a + b)c - b(c + d) = ad - bc$

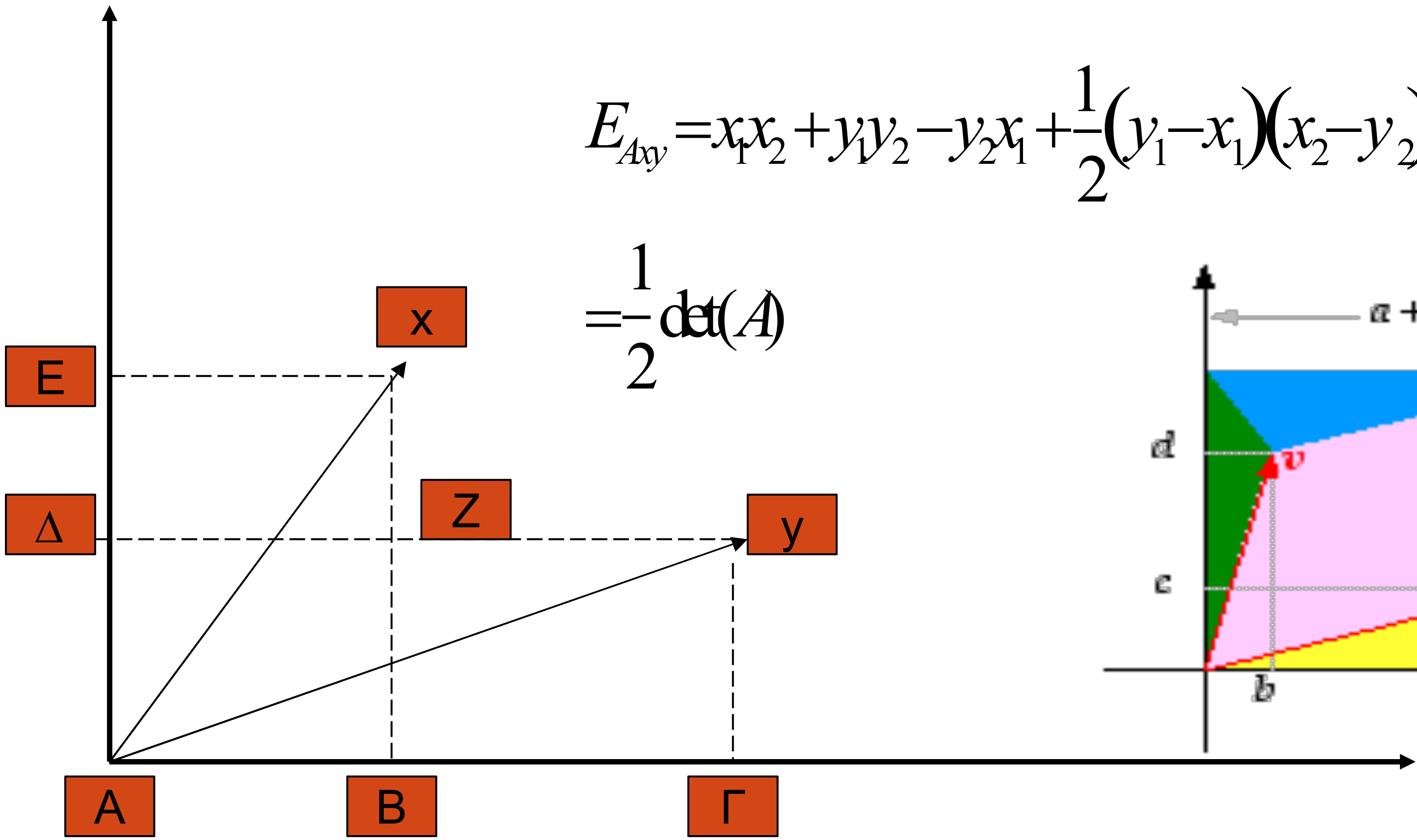


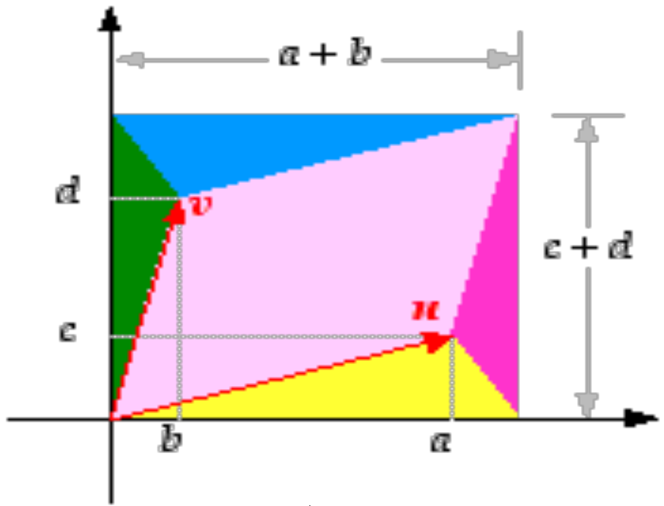
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Ας θεωρήσουμε 2 διανύσματα $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$E_{Axy} = x_1x_2 + y_1y_2 - y_2x_1 + \frac{1}{2}(y_1 - x_1)(x_2 - y_2) - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}y_1y_2$$

$$= \frac{1}{2}\det(A)$$





Έννοια Ορίζουσας ΙΙΙ

- Η Ορίζουσα ενός πίνακα Α συμβολίζεται ως

$$|A| = \det(A)$$

- Για κάθε τετραγωνικό πίνακα υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση όπου ισχύει ότι:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \forall j = 1,2,\ldots,n$$

A_{ij} (n-1)x(n-1)

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΚΑΤΑ LAPLACE

ΕΛΑΣΣΟΝΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑ

Ελάσσων Ορίζουσα

Να υπολογιστούν οι ελάσσων ορίζουσες των παρακάτω πινάκων: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathrm{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει ο συμπαράγοντας (cofactor)

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}, \forall \mathrm{j}=1,2,..,\mathrm{n}$$

ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΜΗΤΡΕΣ-ΠΙΝΑΚΕΣ

Συνδέοντας σε αυτήν την περίπτωση τις ορίζουσες με τους πίνακες θα πρέπει να ορίσουμε τα εξής:

- Ένας πίνακας θα καλείται ιδιάζων (singular) εάν η ορίζουσα του ισούται με το μηδέν και μη ιδιάζων εάν ισχύει το αντίστροφο.
- Η ορίζουσα διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.
- Για κάθε άνω τριγωνικό πίνακα ισχύει ότι

η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ-ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Έστω πίνακας $A \in M_n$.
Για κάθε (i,j) που παίρνουν τιμές από 1 έως N συμβολίζουμε με Aij τον (n-1)x (n-1) πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη. O **προσαρτημένος πίνακας** του A είναι o adjA είναι ο nxn πίνακας που στη θέση του (i,j)έχει το στοιχείο $(-1)^{i+j}$

Η ποσότητα $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ ονομάζεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του A και συμβολίζεται συνήθως με cij-Cij .

Ποια τα αλγεβρικά συμπληρώματα της 2x2 μήτρας;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί ο προσαρτημένος πίνακας του πίνακα A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$adjA = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ποια τα αλγεβρικά συμπληρώματα ενός 3x3 πίνακα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η αγορά τσαγιού και καφέ περιγράφονται από τις παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς. Μπορείτε να υπολογίσετε το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας;

$$D_t = 100 - 5P_t + 3P_c, S_t = -10 + 2P_t$$

$$D_c = 120 - 8P_c + 2P_t, S_c = -20 + 5P_c$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Τριγωνικός Πίνακας)

Για κάθε τριγωνικό πίνακα άνω ή και κάτω ισχύει ότι η ορίζουσα τους ισούται με το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του. $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

Η ορίζουσα διαγωνίου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Θεώρημα (ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς μια γραμμή ή στήλη)

Εάν $A=(a_{ij})$ είναι ένας nxn πίνακας και i,j τότε με A_{ij} συμβολίζουμε τον (n-1)x(n-1) πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{i+2} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{nj} \det A_{nj}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η πρώτη από τις δυο προηγούμενες ταυτότητες λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A ως προς την i γραμμή.
Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος είναι τα στοιχεία της i γραμμής. Όμοια η δεύτερη ταυτότητα λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη j στήλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα:

$$B=\begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Ο γραμμοισοδύναμος πίνακας μας δίνει την ίδια τιμή ορίζουσας?

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Θα έχουμε ότι:

$c_{11} = (-1)^{i+j}\det(A_{11}) = a_{22}$

$c_{21} = (-1)^{2+1}\det(A_{21}) = -a_{12}$

....

....

Να κάνετε το ίδιο για τον πίνακα

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Αν ο πίνακας Α έχει μια μηδενική γραμμή, τότε detA=0.
- Αν ο πίνακας Α έχει δυο γραμμές ανάλογες, τότε detA=0.
- Αν ο πίνακας Α είναι άνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός), τότε η ορίζουσα του Α είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων. Ιδιαίτερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1.
- $$\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$$
- Εάν προσθέσουμε στα στοιχεία μιας γραμμής ενός πίνακα Α το πολλ/σιο στοιχείων μιας άλλης γραμμής τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει.

- Εάν ένας πίνακας προκύπτει με εναλλαγή γραμμών από άλλον πίνακα τότε η ορίζουσα του αλλάζει πρόσημο.
- Για κάθε άνω ή κάτω τριγωνικό ισχύει $\det(A) = a_{11}a_{22}....a_{nn}$

(*<u>Καλό θα ήταν να κάνατε τις αποδείξεις</u>*)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Προσοχή για κάθε πίνακα Α
οι προτάσεις και οι τύποι
που αναφέρονται στις γραμμές
της ορίζουσάς του ισχύουν
και για τις στήλες του πίνακα Α.

$$\forall \text{ πίνακα } \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}$$

$$1.\ \det(A^t) = \det A$$

$$2.\ \det(A^k) = (\det A)^k$$

$$3.\ \det(AB) = (\det A)(\det B)$$

$$4.\ \det \overline{A} = \overline{\det A}$$

Θεώρημα (κριτήριο αντιστρέψιμου πίνακα)

- Ένας πίνακας $A \in M_n$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο εάν η ορίζουσα του είναι διαφορετική του μηδενός

Παράδειγμα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 11 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ένας πίνακας Α θα καλείται αντιστρέψιμος να και μόνο εάν η ορίζουσα του είναι διαφορετική του μηδενός. Εάν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του Α τότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & & c_{n2} \\ & & & \\ & & & \\ c_{n1} & & & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Η εύρεση του αντίστροφου πίνακα μπορεί να γίνει και με την μέθοδο Gauss-Jordan

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+w} a_{qw} \det(A_{pw}) = 0, \forall q \neq p$$

$$[A/I] = \ldots\ldots = [I/A^{-1}]$$

$$A \cdot adjA = adjA \cdot A = \det A \cdot I$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Ι

1. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος (εάν υπάρχει του παρακάτω πίνακα)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες

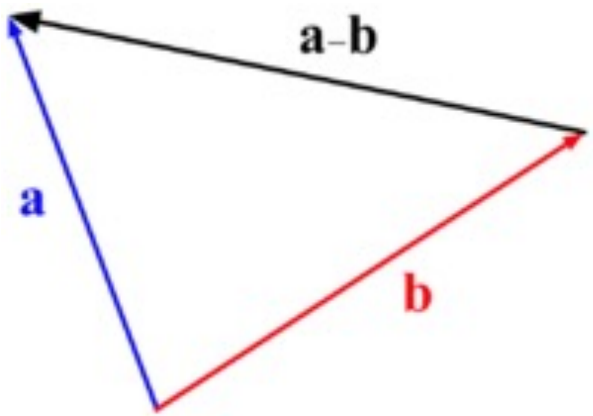
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2b & 2c \\ 1 & b-a-c & 2c \\ 1 & 2 & c-a-b \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+b & d \\ a & b & c & 1+d \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

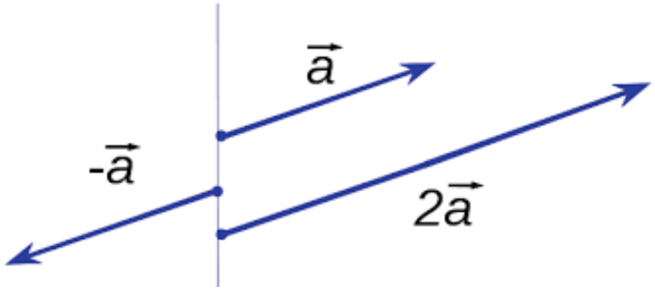
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΙ

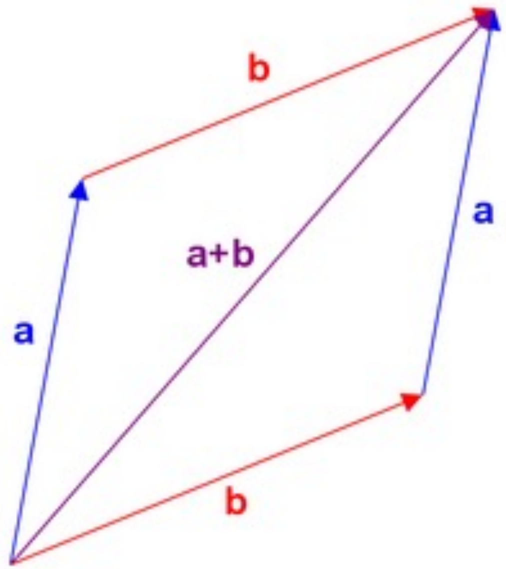
Μια επιχείρηση παράγει δύο εκροές τις y_1,y_2 χρησιμοποιώντας δύο εισροές τις x_1,x_2. Πως θα συμβολίζεται την ποσότητα της i εισροής που απαιτείται για την παραγωγή 1 μονάδας j; Εάν ο πίνακας εισροών εκροών δίνεται ως $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ και υποθέσουμε ότι η επιχείρηση παράγει 20 και 15 μονάδες αντίστοιχα ποια τα επίπεδα εισροών; Εάν τώρα γνωρίζουμε τα επίπεδα εισροών ότι είναι 30 και 25 μονάδες αντίστοιχα ποια τα επίπεδα εκροών;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ III

Ένα άτομο επένδυσε 50000 ευρώ σε τρεις διαφορετικές τράπεζες με ετήσια επιτόκια 1.5%,3% και 5%. Εάν ο συνολικό τόκος που θα εισπράξει για ένα έτος είναι 1780 ευρώ και το ποσό που επένδυσε με 3% είναι κατά 4000 μεγαλύτερο του ποσού που επένδυσε με 5%, να υπολογίσετε τα ποσά που επένδυσε σε κάθε τράπεζα.







Πράξεις διανυσμάτων

Στο σύνολο των διανυσμάτων κάποιες από τις πράξεις που είναι οι πράξεις του πολλαπλασιασμού με αριθμό, η πρόσθεση και το εσωτερικό γινόμενο.

Ιδιότητες του χώρου $\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε το επίπεδο $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2)\colon\ x_i \in \mathbb{R}\}$ και ορίζουμε 2 πράξεις (+, ·). Με x, y, z ∈ $\mathbb{R}^2$ και λ, μ ∈ $\mathbb{R}$, ισχύουν οι ιδιότητες:

1. x+y ∈ $\mathbb{R}^2$
2. $x + (y + z)$=$(x + y)$+z
3. x+0=x
4. Για κάθε x∈ $\mathbb{R}^2$ υπάρχει x΄: x+ x΄=0
5. x+y=y+x
6. Για κάθε λ ∈ $\mathbb{R}$, και για κάθε x ∈ $\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι λ · x ∈ $\mathbb{R}^2$
7. 1 · x=x
8. $(\lambda + \mu)$ ·x=λ ·x+μ ·x
9. λ · $(x + y)$=λ ·x+λ · y
10. $(\lambda\mu)$ ·x= λ · (μx)

Ορισμός διανυσματικού χώρου

Έστω V ένα σύνολο και K ένα αντιμεταθετικό σώμα. Αν στο V ορίζονται οι πράξεις : $\dot{+}: V \times V \to V$ και $*: \mathrm{K} \times V \to V$

Με τις ιδιότητες 1-10 τότε το σύνολο (V,$\dot{+}$, $*$) λέγεται **διανυσματικός ή γραμμικός χώρος**.

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

1. Το $\mathbb{R}^2$ είναι διανυσματικός χώρος επί του συνόλου των πραγματικών αριθμών
2. Το σύνολο V=$\mathbb{R}^A$ όλων των συναρτήσεων $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
3. Το σύνολο των πινάκων m ×n επί των πραγματικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος ως προς την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα.

Βάση διανυσματικού χώρου

Το σύνολο $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ θα ονομάζεται βάση του διανυσματικού χώρου V αν τα $e_1, e_2, \dots, e_n$

1. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
2. Παράγουν το χώρο V

Παράδειγμα: Τα $\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελούν βάση του χώρου των τετραγωνικών πινάκων 2×2.

Παράδειγμα

Τα $\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελούν βάση του χώρου των τετραγωνικών πινάκων 2×2.

Λύση

Θα ελέγξουμε πρώτα αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα δηλαδή

$$\kappa \mathrm{A}_1 + \lambda\, \mathrm{A}_2 + \mu\, \mathrm{A}_3 + \nu\, \mathrm{A}_4 = \mathbb{O}$$

Με κ=λ=μ=ν=0

$$\kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως κ=λ=μ=ν

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι παράγουν τον χώρο, δηλαδή ένας οποιοσδήποτε 2χ2 πίνακας μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Πράγματι:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{z} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{w} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραμμικές συναρτήσεις

Έστω V, E δύο διανυσματικοί χώροι επί του ίδιου σώματος K. H συνάρτηση $f\colon V \to E$ λέγεται γραμμική, αν για όλα τα x, y ∈V και λ ∈K έχουμε

i. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

ii. $f(\lambda x) = \lambda\, f(x)$

Παράδειγμα

Αν θεωρήσουμε τον χώρο P_n , $n \in \mathbb{N}$ των πολυωνύμων μιας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές τότε

η παραγώγιση D: $\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1}$ και

η ολοκλήρωση J: $\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n+1}$

είναι γραμμικές συναρτήσεις.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ Ι

Από το Λύκειο είναι γνωστή η έννοια των διανυσμάτων και των πράξεων μεταξύ αυτών. Μάλιστα γνωρίζουμε ότι ο χώρος R^n είναι διανυσματικός χώρος. Δύο βασικές έννοιες που θα πρέπει να γνωρίζουμε είναι οι παρακάτω:

1. Το διάνυσμα $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ καλείται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$u_1 = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}), u_2 = (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}), \ldots, u_n = (u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nn})$$

με συντελεστές $a_1, a_2, \ldots, a_n$

J στοιχείο

$$x = a_1 u_{1j} + a_2 u_{2j} + \ldots + a_n u_{nj}$$

Εάν α=ο €x=0
Το αντίστροφο;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΙΙ

Τα διανύσματα

$$u_1 = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}), u_2 = (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}), \ldots, u_n = (u_{n1}, u_{n2}, \ldots, u_{nn})$$

θα καλούνται γραμμικώς εξαρτημένα εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ώστε:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k = \sum_{i=1}^{k} a_iu_i = 0$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ (εάν η παραπάνω σχέσ ισχύει μόνο για ..) $\longrightarrow$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$

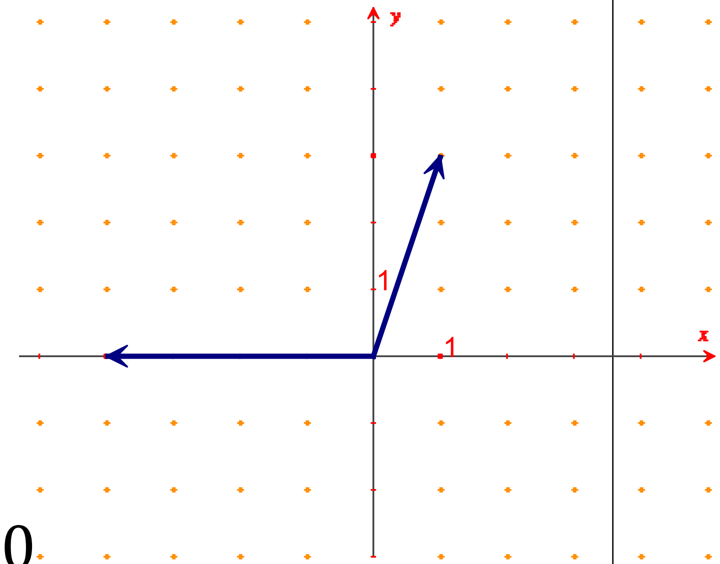
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΙΙ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Εάν τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων και αντίστροφα.
2. Εάν ν διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και τα κ διανύσματα θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_t, \ldots., u_k$
3. Εάν ένα από τα ν διανύσματα είναι το μηδενικό τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παράδειγμα 1

Τα διανύσματα $\vec{u}$ =(-4, 0) και $\vec{v}$ =(1,3) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

Πράγματι θεωρούμε κ, λ στους πραγματικούς τέτοια ώστε



$$k\vec{u} + \lambda\vec{v} = \vec{0}$$
$$k(-4,0) + \lambda(1,3) = (0,0)$$
$$(-4k, 0) + (\lambda, 3\lambda) = (0,0)$$
$$(-4k + \lambda, 3\lambda) = (0,0)$$
$$-4k + \lambda = 0 \quad \text{και } 3\lambda = 0$$

Επιλύοντας αυτό το σύστημα έχουμε $\lambda = 0$ και $k = 0$

Επομένως τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 2

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{u}$ =(-2, 4) και $\vec{v}$ =(1,-2) είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Πράγματι

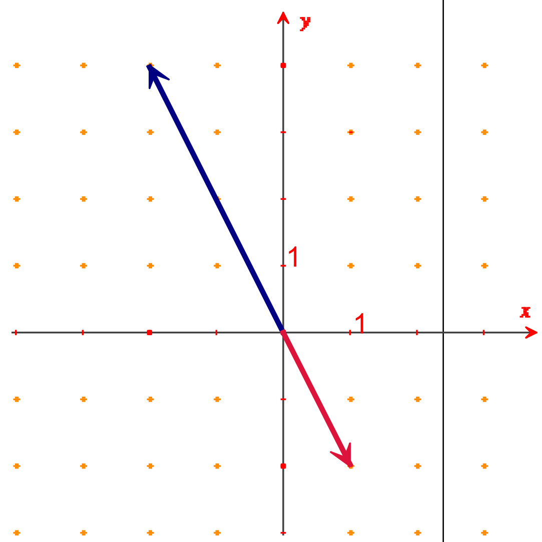
$$k\vec{u} + \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$k(-2,4) + \lambda(1,-2) = (0,0)$$

$$(-2k, 4k) + (\lambda, -2\lambda) = (0,0)$$

$$(-2k + \lambda, 4k - 2\lambda) = (0,0)$$

$$-2k + \lambda = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad 4k - 2\lambda = 0$$



Επιλύοντας το σύστημα

$$\begin{cases} -2k + \lambda = 0 & (1) \\ 4k - 2\lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) $\lambda = 2k$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε $4k - 4k = 0$

Το σύστημα είναι αόριστο που σημαίνει ότι τα k και λ δεν είναι και τα δύο μηδέν

Επομένως τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Διάσταση ενός διανυσματικού χώρου R λέγεται ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων του R. Η διάσταση του χώρου καλείται και βαθμός (rank).
- Το σύνολο των διανυσμάτων $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ λέγεται βάση ενός διανυσματικού χώρου όταν τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κάθε στοιχείο του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \dots, u_n$

Παράδειγμα: Τα $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελούν βάση του χώρου των τετραγωνικών πινάκων 2×2.

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ & ΑΛΛΑ I

- Το μήκος ενός διανύσματος (norm) ουσιαστικά παριστάνει απόσταση (π.χ Ευκλείδιες αποστάσης) αλλά για ένα διανυσματικό χώρο είναι μια πραγματική συνάρτηση:

$$\mathrm{w{:}A} \to \mathrm{R}:$$

$$1.\mathrm{w(x)} \geq 0, \forall x \in A$$

$$2.\mathrm{w(ax)=aw(x)}, \forall x \in A, a \in R$$

$$3.\mathrm{w(x+y)} \leq \mathrm{w(x)+w(y)}, \forall x, y \in A$$

- Τι είναι ο μετρικός χώρος;

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ & ΑΛΛΑ ΙΙ

- Εσωτερικό γινόμενο: εάν

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in A$$

τότε $x\bullet y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$1.\ x\bullet y=y\bullet x$$

$$2.\ (ax)\bullet y=a(x\bullet y)$$

$$3.\ (x+y)\bullet z=x\bullet z+y\bullet z$$

$$4.\ x\bullet y\geq 0$$

$$5.\ x\bullet x=x\Leftrightarrow x=0$$

$$6.\ \theta=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\frac{\|x\bullet y\|}{\|x\|\bullet\|y\|}$$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ & ΑΛΛΑ III

- Εξωτερικό γινόμενο:το γινόμενο ενός διανύσματος στήλης με ένα διάνυσμα γραμμής που καταλήγει σε μια τετραγωνική μήτρα. Εάν

$$x = \left(x_1, x_2, .., x_n\right), y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} \in A$$

$$yx = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & y_1 x_3 & & y_1 x_n \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & y_2 x_3 & & y_2 x_n \\ \\ \\ y_n x_1 & y_n x_2 & y_n x_3 & & y_n x_n \end{pmatrix}$$

ΒΑΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

- Βαθμός ενός πίνακα Α καλείται ο μέγιστος αριθμός των γραμμικώς ανεξαρτήτων γραμμών ή στηλών του (r(A)).
- Θεώρημα: Ο βαθμός προσδιορίζεται από την τάξη της μεγαλύτερης μη μηδενικής ορίζουσας.
- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$1.\, r\left(I\right) = n, I \in M_n$$

$$2.\, r(A) = r(A^t) = r(A^t A) = r(AA^t)$$

$$3.\, r(A+B) \leq \max\left\{r(A), r(B)\right\}$$

$$4.\, r(AB) \leq \max\left\{r(A), r(B)\right\}$$

$$5.\, r(A) = tr(A), A \text{ ταυτοδύναμη}$$

6. A διαγώνια r(A)=?

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τον βαθμό των παρακάτω πινάκων-μητρών:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & ` \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εάν τα x,y,z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, να εξετάσετε εάν τα παρακάτω είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

1. x,x+y,x+y+z
2. x+y,y+z,z+x
3. x-y,y-z,z-x

Να εξετάσετε εάν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

1. (1,1,1),(0,1,-2)
2. (1,1,0) , (1,1,1) και (0,1,-1)
3. (0,1,1) , (0,2,1) και (1,5,3)

ΑΣΚΗΣΗ

Μια κλειστή οικονομία περιγράφεται από ένα σύστημα εξισώσεων που δίνουν τις συνθήκες ισορροπίας στις αγορές αγαθών και χρήματος, τις σχέσεις IS και LM.Η αγορά χρήματος LM και η αγορά αγαθών περιγράφονται από τις σχέσεις (C η δαπάνη του καταναλωτή,T τα φορολογικά έσοδα,Y το συνολικό προϊόν,I οι επενδυτικές δαπάνες,R το επιτόκιο,G οι δημόσιες δαπάνες,L η ζήτηση χρήματος,M η σταθερή προσφορά χρήματος:

$$C = 15 + 0.8\left(Y - T\right)$$

$$T = -25 + 0.25Y$$

$$I = 65 - R$$

$$G = 94$$

$$L = 5Y - 50R$$

$$M = 1500$$

$$Y = C + I + G$$

$$M = L$$

Τι να διαβάσω

- Κεφάλαιο 6 Ξεπαπαδέα-Κεφάλαιο 5 Λουκάκη
- Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών, Pemberton and Rau (κεφάλαια 12-13)
- Σημειώσεις από το http://eclass.upatras.gr
- Ασκήσεις φροντιστηρίου.