ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

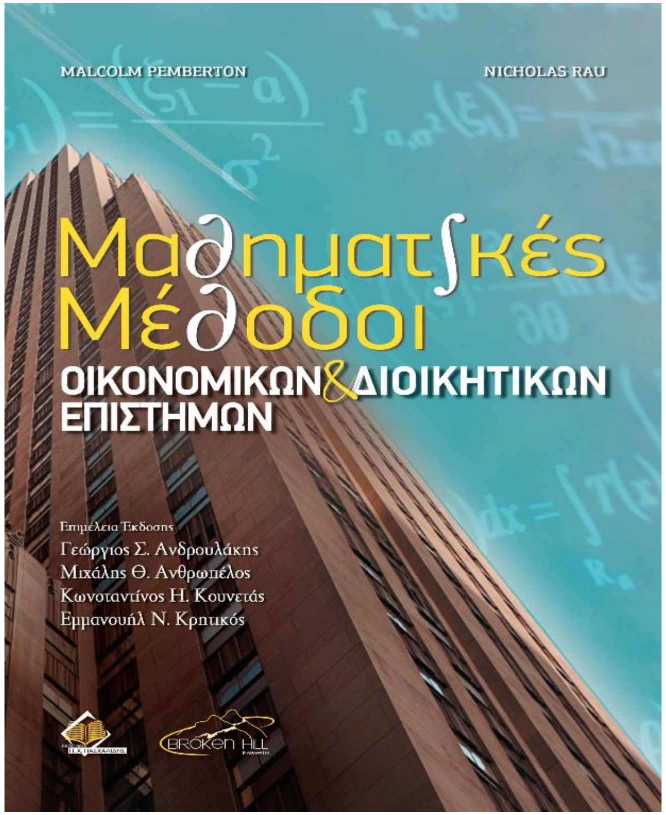
ΜΑΘΗΜΑ 1-2-ΠΙΝΑΚΕΣ ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΥΓΡΑΜΜΑΤΑ


MIKE ROSS ΚΑΙ PIOTR LIS
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΟΥΝΕΤΑΣ
ΤΡΙΤΗ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ
ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ


MALCOLM PEMBERTON
NICHOLAS RAU
Μαθηματικές Μέθοδοι
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Επιμέλεια Έκδοσης
Γεώργιος Σ. Ανδρουλάκης
Μιχάλης Θ. Ανθρωπέλος
Κωνσταντίνος Η. Κουνετάς
Εμμανουήλ Ν. Κρητικός


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ALPHA C. CHIANG
KEVIN WAINWRIGHT
ΚΡΙΤΙΚΗ

Εισαγωγή στους πίνακες και στα διανύσματα

Έστω ότι είστε υπεύθυνοι για την ενοικίαση αυτοκινήτων για τους υπαλλήλους της επιχείρησής σας. Οι εβδομαδιαίες τιμές ενοικίασης πέντε διαφορετικών μεγεθών αυτοκινήτων είναι:

Μικρού μεγέθους αμάξια -$139, μεσαίου μεγέθους αμάξια -£160, μεγάλα αμάξια -£205, επταθέσια αμάξια -£340, πολυτελείς λιμουζίνες -£430. Για την επόμενη εβδομάδα γνωρίζετε ότι οι απαιτήσεις της επιχείρησης θα είναι: 4 μικρά αμάξια, 3 αμάξια μεσαίου μεγέθους, 12 μεγάλα αμάξια, 2 επταθέσια , 1 λιμουζίνα. Πώς θα υπολογίσετε το συνολικό ποσό για την ενοικίαση αμαξιών; Εάν υπολογίσετε τη συνολική δαπάνη ως

$$4\times 139+3\times 160+12\times 205+2\times 340+1\times 430=4606$$

τότε ο υπολογισμός θα είναι σωστός. Στην πραγματικότητα θα έχετε κάνει έναν πολλαπλασιασμό πινάκων χωρίς να το έχετε συνειδητοποιήσει!

ΠΙΝΑΚΑΣ

Ένας πίνακας A με στοιχεία από το σύνολο F (συνήθως θεωρούμε τα σύνολα R ή C) είναι μια διάταξη mxn στοιχείων της μορφής:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right], \forall i=1,2,\dots m,\ j=1,2,\dots,n$$

Να υπολογίσετε ;έναν 3Χ3 πίνακα όπου για τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ισχύει ότι aij=2i-j

Λέμε τότε ότι το μέγεθος ή ο τύπος του πίνακα είναι mxn με m γραμμές και n στήλες.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right), \forall\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$

mxn πίνακες με στοιχεία από το F. Οι συγκεκριμένοι πίνακες θα είναι ίσοι όταν ισχύει

$$\left(a_{ij}\right)=\left(b_{ij}\right) \qquad \forall i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$$

και θα λέμε ότι A=B.

Πότε οι δύο πίνακες θα είναι ίσοι;

$$A=\mathrm{B}, A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ (1)

- Τετραγωνικός Πίνακας

Ένας πίνακας θα καλείται τετραγωνικός όταν ισχύει ότι $m=n$.Δηλαδή ο αριθμός των στηλών είναι ο ίδιος με τον αριθμό των γραμμών. Π.χ ο παρακάτω πίνακας 3x3.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός 5X5 πίνακα όπου ισχύει ότι $a_{ij}=i^{j-i}+j^{i}$

- Πίνακας Στοιχείο $\mathrm{B}=[1]$
- Πίνακας γραμμή $\mathrm{X}=[1 \quad 2 \quad 3]$
- Πίνακας Στήλη $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ (2)

- Άνω Τριγωνικός:

Ένας πίνακας θα καλείται άνω τριγωνικός εάν έχει την παρακάτω μορφή. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Κάτω Τριγωνικός αντίστοιχα $\forall i < j : a_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ -8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ (3)

- Κύρια διαγώνιος ενός Πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

Κύρια Διαγώνιος

- Ένας πίνακας τετραγωνικός της παρακάτω μορφής θα καλείται διαγώνιος δηλαδή όταν

$$\forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Διαγώνιος

ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ (4)

- Ανάστροφος (transpose) ενός πίνακα $A=(a_{ij})$ διάστασης mxn καλείται ο πίνακας n xm $A^t=(a_{ij})=(b_{ji})$
- Μηδενικός θα καλείται ένας πίνακας όταν όλα του τα στοιχεία ισούται με το μηδέν $(a_{ij})=0$
- Συμμετρικός:

Ένας πίνακας θα καλείται συμμετρικός όταν τα στοιχεία που βρίσκονται συμμετρικά προς την κύρια διαγώνιό του είναι ίσα: $a_{ij}=a_{ji}\forall i\neq j$

- Αντισυμμετρικός

Ένας πίνακας θα καλείται αντισυμμετρικός όταν

$$a_{ij}=-a_{j\imath}\forall i\neq j$$

ΕΙΔΗ ΠΙΝΑΚΩΝ (5)

- Συζυγής ενός πίνακα $A=\left(a_{ij}\right)$ καλείται ο πίνακας έχει ως στοιχεία τα συζυγή στοιχεία του Α.
- Ανάστροφοσυζυγής ενός πίνακα $A=\left(a_{ij}\right)$ διάστασης mxn καλείται ο πίνακας $A^{*}=\overline{A}^{t}$
- Διαγώνιος καλείται κάθε τετραγωνικός nxn πινακας Α, ο οποίος έχει μηδενικά όλα τα στοιχεία του που δεν βρiίσκονται στην κύρια διαγώνιο.
- Μοναδιαίος καλείται ο διαγώνιος πίνακας του όποιου τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ισούται με την μονάδα.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (1)

- ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Ας θεωρήσουμε δύο πίνακες $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Το άθροισμα των δύο αυτών πινάκων θα δίνεται ως $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})$
Δηλαδή θα προκύπτει εάν προσθέσουμε τα επιμέρους στοιχεία.

- ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού έστω κ με ένα πίνακα οποιαδήποτε διάστασης προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία του πίνακα Α με τον αριθμό αυτόν. Ο πολλ/μος αυτός καλείται βαθμωτός.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (2)

- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ

$1.\ A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = B + A = (b_{ij}) + (a_{ij})$

$2.\ (A + B) + G = A + (B + G)$

$3.\ A + 0 = 0 + A$

$4.\ k(A + B) = kA + kB$

$5.\ (k + m)A = kA + mA$

$6.\ (km)A = kmA$

$7.\ 1A = A, 0A = 0$

$8.\ A - A = 0$

$9.\ (A^t)^t = A \text{ και } (A^*)^* = A$

$10.\ (A + B)^t = A^t + B^t$

$11.\ (kA)^t = kA^t, (kA)^* = kA^*$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ
(ΠΡΑΞΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (3)

- ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ δύο πίνακες με διαστάσεις mxn και nxl. Βασική προϋπόθεση για να ισχύσει ο πολλ/μος πινάκων είναι η εξής:

$$A \times B$$

$$mxn - nxl$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (3)

- ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σχηματικά ο πολλαπλασιασμός πινάκων δίνεται ως εξής:

$$A \times B = \begin{pmatrix} \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot\cdot & \cdot\cdot & b_{1l} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & b_{2l} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & b_{nl} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{pmatrix}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (4)

- ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σχηματικά ο πολλαπλασιασμός πινάκων δίνεται ως εξής:

$$A\times B=\begin{pmatrix} \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdots & \cdot\cdot & a_{i1}b_{1l}+a_{i2}b_{2l}+\ldots+a_{in}b_{nl} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{pmatrix}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (4)

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ 30 & 45 \\ 40 & 65 \\ 50 & 85 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

Δίνονται οι πίνακες που εκφράζουν τις ποσότητες τεσσάρων αγαθών που αγοράζονται από 2 καταναλωτέςκαι τις τιμές των αγαθών αυτών κατά την διάρκεια τριών διαφορετικών ημερών.

- Τι εκφράζει κάθε στήλη και κάθε γραμμή στους πίνακες αυτούς;
- Ποια η δαπάνη για το πρώτο άτομο την δεύτερη ημέρα;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω Α=(α_{ij}) πίνακας τύπου $m\times l$ και Β=(β_{st}) πίνακας τύπου $l\times n$. **Γινόμενο, ΑΒ** των πινάκων Α και Β θα ονομάζεται ο πίνακας ΑΒ=(γ_{it}) τύπου $m\times n$ όπου στη θέση (i,t) υπάρχει το στοιχείο

$$\sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{a_{ik}\beta_{kt}} = \boldsymbol{a_{i1}\beta_{1t} + a_{i2}\beta_{2t+\cdots+}a_{il}\beta_{lt}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το γινόμενο ΑΒ ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός στηλών του Α ισούται με τον αριθμό γραμμών του Β.

$$\begin{bmatrix} & \cdots & \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots \boldsymbol{a_{il}} \\ & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \boldsymbol{\beta_{1t}} & \\ \cdots & \boldsymbol{\beta_{2t}} & \cdots \\ & \vdots & \\ & \boldsymbol{\beta_{lt}} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{a_{i1}\beta_{1t} + a_{i2}\beta_{2t+\cdots+}a_{il}\beta_{lt}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Δεν ισχύει ότι αν ΑΒ= $\mathbb{O}$ τότε Α= $\mathbb{O}$ ή Β= $\mathbb{O}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ (4)

- Ιδιότητες στον Πολλαπλασιασμό και όχι μόνο!

1. $AB \neq BA$, δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική
2. $(A+B)G = AG + BG$, αριστερά επιμεριστική ιδιότητα
3. $G(A+B) = GA + GB$, δεξιά επιμεριστική ιδιότητα
4. $G(AB) = (GA)B$, $(AB)G = A(BG)$
5. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
6. $IA = AI = A$, I καλείται μοναδιαίος πίνακας
7. $0A = 0$
8. $(AB)^t = B^t A^t$
9. $(AB)^* = B^* A^*$

ΚΑΠΟΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα γινόμενα Α*Β, Α*Γ, Γ*Α και Β*Α για τους παρακάτω πίνακες:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραμμοπράξεις-Γραμμοισοδύναμος Πίνακας

Έστω πίνακας A που ανήκει στο M. Καθεμία από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών του πίνακαA.

1. Πολλαπλασιασμός μια γραμμής του πίνακα A με ένα μη μηδενικό στοιχείο.
2. Εναλλαγή δύο (ή ανά ζεύγη μη μηδενικών γραμμών του πίνακα A.
3. Πρόσθεση σε μία οποιαδήποτε γραμμή του A πολλαπλάσιο άλλης γραμμής.

Γραμμοπράξεις-Γραμμοισοδύναμος Πίνακας

Ο πίνακας Β που προκύπτει από τον πίνακα Α με βάση μιας πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών όπως αυτές αναφέρθηκαν παραπάνω καλείται γραμμοισοδύναμος.

Παράδειγμα γραμμοπράξεων

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -3r_1 + r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -2r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{6} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -6r_2 + r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to 4r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κλιμακωτός Πίνακας-Ανηγμένος Κλιμακωτός (1)

Ένας πίνακας Α θα καλείται κλιμακωτός εάν πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το 1.
2. Το πρώτο 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά του πρώτου 1 της προηγούμενης γραμμής.
3. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές

Προφανώς οι κλιμακωτοί άνω και κάτω ακολουθούν την ίδια λογική με τους τριγωνικούς άνω και κάτω.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 9 & 10 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Κλιμακωτός Πίνακας-Ανηγμένος Κλιμακωτός (2)

- Με βάση τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

  και με κατάλληλες στοιχειώδεις πράξεις των γραμμών να καταλήξετε στον πίνακα

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Κλιμακωτός Πίνακας-Ανηγμένος Κλιμακωτός (3)

Ένας πίνακας A θα καλείται ανηγμένος κλιμακωτός εάν πληρούνται οι εξής προϋπόθεση:

1. Το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

Τι θα λέγατε για τους παρακάτω πίνακες;

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΔΥΝΑΜΗ ΠΙΝΑΚΑ (1)

Για έναν τετραγωνικό πίνακα Α ορίζεται η –δύναμη του ως εξής: $A^k = A \times A \times \ldots\ldots.A, k$ φορές

Ισχύουν ότι

$$1.\ A^0 = \mathrm{I},\ A^1 = A$$

$$2.\ A^m A^k = A^{m+k}$$

$$3.\ \left(A^m\right)^k = A^{mk}$$

$$4.\ (\lambda A)^k = \lambda^k A^k$$

$$5.\ A^k = diag\left(a_{11}^k, \ldots, a_{nn}^k\right)$$

Δύναμη Πίνακα (2)

Να υπολογίσατε την 2006-οστη δύναμη του παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΙ ΠΙΝΚΑΚΕΣ

Δυο πίνακες Α,Β διαστάσεων mxn θα καλούνται αντιμεταθετικοί εάν ισχύει ότι ΑΒ=ΒΑ. Για αντιμεταθετικούς πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής:

$$1.\left(AB\right)^{k} = A^{k}B^{k}$$

$$2.\left(A+B\right)^{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^{k-j}B^{j}$$

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}, k! = 1, 2, ..., k, 0! = 1$$

Αντίστροφος Πίνακα (1)

Ένας τετραγωνικός πίνακας Α λέγεται αντιστρέψιμος ή μη ιδιάζων όταν υπάρχει πίνακας Β τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I$$

Ο πίνακας Β εάν υπάρχει καλείται αντίστροφος. Είναι μοναδικός και συμβολίζεται με A^{-1}

Για τους παρακάτω πίνακα Α και Γ να εξετάσετε εάν υπάρχουν οι αντίστροφοί τους και να υπολογιστούν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακα (2)

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για δύο πίνακες A.B διάστασης mxn:

$$1. AB = 0 \Rightarrow A = 0, B = 0$$

$$2. AB = 0,\ B \text{ αντιστρέψιμος} \Rightarrow A = 0$$

$$3. AB = 0,\ \mathrm{A} \text{ αντιστρέψιμος} \Rightarrow B = 0$$

$$4. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$5. (kB)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$

Αντίστροφος Πίνακα (3)

Για ένα πίνακα A 2x2 ο αντίστροφος του υπολογίζεται ως εξής:

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για δύο πίνακες A.B διάστασης mxn:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, ad - cb \neq 0$$

Ο Αντίστροφος Πίνακας και η Επίλυση Συστήματος Ταυτόχρονων Εξισώσεων

Σε ένα σύστημα ταυτόχρονων γραμμικών εξισώσεων ο βασικός κανόνας για την ύπαρξη μοναδικής λύσης είναι ότι ο αριθμός των άγνωστων μεταβλητών πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων και να μην υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των εξισώσεων. Εφόσον αυτές οι συνθήκες ισχύουν, τότε η ανάλυση πινάκων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσουμε οποιοδήποτε αριθμό αγνώστων μεταβλητών. Με δεδομένο ότι ο αριθμός των αγνώστων μεταβλητών είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων ο πίνακας των συντελεστών **A** πρέπει να είναι τετραγωνικός, δηλαδή ο αριθμός των γραμμών θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών. Επίσης εάν γνωρίζουμε τις τιμές των **A** και **b** και θέλουμε να βρούμε το **x** χρησιμοποιώντας τον τύπο $x=A^{-1}b$ τότε πρέπει πρώτα να δούμε εάν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον αντίστροφο πίνακα γιατί σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να μην υπάρχει.

Ασκήσεις

1. Αν $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ να υπολογιστούν οι πίνακες $\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ και να δειχθεί ότι είναι συμμετρικοί.

2. Να βρεθούν αν υπάρχουν οι αντίστροφοι των πινάκων

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

4. Να εξεταστεί αν ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται ο πίνακας Α, $n \times n$ για τον οποίο ισχύει

$$\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} + \mathrm{I} = \mathbb{O}$$

Να δειχθεί ότι

i. Ο πίνακες Α, Α-2Ι είναι αντιστρέψιμοι
ii. Οι πίνακες $\mathrm{A}^5 + 2\mathrm{A}^3 - 5\mathrm{A}^2 + 6\mathrm{A} + \mathrm{I}$ και $\mathrm{A}^4(\mathrm{A} - \mathrm{I})^5 - \mathrm{I}$ απλοποιούνται και γράφονται ως εκφράσεις των πινάκων Α και Ι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση 2X-3(A-X)=7(X+B), όπου

A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ και B=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ και

X πίνακας 3×3

2. Να λυθεί το σύστημα ως προς τους πίνακες X, Y τύπου 2×2 :

$$2X+3Y=\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$3X-2Y=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Εάν για τον πίνακα Α ισχύει ότι $\mathrm{A}^4 - \mathrm{A}^2 + \mathrm{I} = \mathbb{O}$ να δειχθεί ότι $\mathrm{A}^6 = -\mathrm{I}$

ΙΧΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

- Ίχνος (trace-tr(A)) ενός πίνακα A θα καλούμε τα άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Για το ίχνος ενός πίνακα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$$1.\ tr(A+B)=trA+trB$$

$$2.\ tr(\lambda A)=\lambda trA$$

$$3.\ tr(AB)=tr(BA)$$

$$4.\ tr(A^{t})=trA$$

Βαθμός Πίνακα

Βαθμός ή τάξη (rank) ενός πίνακα A mxn ονομάζουμε το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων της κυρίας διαγωνίου ενός ισοδύναμου κλιμακωτού άνω ή κάτω του πίνακα A. Ο βαθμός ενός πίνακα επαληθεύει πάντα την σχέση $rank(A) \leq \min(m,n)$

Ποιος ο βαθμός του παρακάτω πίνακα;

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Εννοια Υποπίνακα

Αν από έναν πίνακα Α διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες ή κάποιες γραμμές και στήλες τότε ο πίνακας που απομένει ονομάζεται **υποπίνακας** του Α.

Αν ένας πίνακας Α χωριστεί σε υποπίνακες τότε τα στοιχεία του είναι και αυτά πίνακες και ο Α ονομάζεται **σύνθετος πίνακας.**

$$\underset{(4\times 3)}{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(3\times 2)}{\mathbf{A}_{11}} & \underset{(3\times 1)}{\mathbf{A}_{12}} \\ \hline \underset{(1\times 2)}{\mathbf{A}_{21}} & \underset{(1\times 1)}{\mathbf{A}_{22}} \end{array}\right]$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

1. Να υπολογιστεί το γινόμενο του πραγματικού αριθμού κ=-3 με τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
2. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα γινόμενα ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ και να εξετάσετε εάν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

3. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες .Ισχύει η ιδιότητα

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ

Ενας διανομέας καταγράφει τις εβδομαδιαίεςπωλήσεις Η/Υ σε τρία καταστήματα λιανικής σε διαφορετικής περιοχές της χώρας. Η τιμή κόστους δίνεται παρακάτω (Βασικό 480, ενισχυμένο 600 και πρόσφατο 1020):

	Βασικό	Ενισχυμένο	Πρόσφατο.
Κατάστημα Α	150	320	180
Κατάστημα Β	170	420	190
Κατάστημα Γ	201	63	58

Οι τιμές πώλησης:

	Βασικό	Ενισχυμένο	Πρόσφατο.
Κατάστημα Α	520	750	1580
Κατάστημα Β	520	690	1390
Κατάστημα Γ	590	720	1780

Να υπολογίσετε

Α)Το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος των Η/Υ σε κάθε κατάστημα.

Β)Τα συνολικά εβδομαδιαία έσοδα απο κάθε μοντέλο για κάθε κατάστημα.

Γ) Το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος από κάθε κατάστημα

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Ross, M and Lis, P., Βασικά Μαθηματικά για Οικονομολόγους 1η Εκδοση, 2020 (Κεφάλαιο 16)
- Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών, Pemberton Malcolm, Rau Nicholas (Κεφάλαια 11 & 12)
- Ξεπαπαδέας Α.Π., Γιαννίκος Ι.Χ, Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά (Τόμος Β'), 1η Εκδοση, 2009 (Κεφάλαιο 5)