ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ

Μάθημα 9ο Διαφορικές Εξισώσεις

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ας θεωρήσουμε ως προς εξέταση μια μεταβλητή S(t) η οποία υποδηλώνει τις καταθέσεις ανά μήνα και έστω ότι ο ρυθμός μεταβολής των καταθέσεων ισούται με μια σταθερά α. Τότε θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = a$$

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση η οποία περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους αυτής. Συνήθης καλείται όταν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μια μεταβλητή ενώ σε αντίθετη περίπτωση καλείται διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους.

Οικονομικά & Σ.Δ.Ε

- Διαχρονική Εξέλιξη Μεγεθών
- Οικονομικά Μεγέθη που συγκλίνουν (ισορροπία) στο απώτερο μέλλον.
- Υποδείγματα Domar-Malthus κ.λ.π

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (1)

Διαφορική Εξίσωση Ορισμός:

Έστω I ανοιχτό διάστημα (φραγμένο ή μη) $I \subseteq \Omega$

και Ω ανοιχτό υποσύνολο του R^{n+1}

Η εξίσωση $f(x, y(x), y^{1}(x), \ldots\ldots, y^{n}(x)) = 0$ όπου $F(x, y, y') = 0$

$$y^{\kappa}(x) = {d^{k} y(x)}/{dx^{k}}$$

καλείται συνήθης διαφορική εξίσωση.

$y' + 8x^{3}y + 8y = 0$

Ανεξάρτητη Μεταβλητή

Εξαρτημένη με την y′

$y(x), y^{1}(x), \ldots\ldots, y^{n}(x)$

Σ.Δ.Ε & Μ.Δ.Ε

- Στην περίπτωση που η εξαρτημένη μεταβλητή είναι συνάρτηση δύο ή και περισσοτέρων μεταβλητών και υπάρχουν μερικές παράγωγοι τότε μιλάμε για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (*εκτός της παρούσας ύλης*).

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (2)

- Λύση μια διαφορικής εξίσωσης y=φ(x) σε ένα διάστημα I όταν αυτή είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$F(x, \phi(y), \phi(y')) = 0$$

Για όλα τα x που ανήκουν στο I.
Το γράφημα της λύσης καλείται ολοκληρωτική καμπύλη. Με απλά λόγια όταν μια συνάρτηση της παραπάνω μορφής την επαληθεύει.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (3)

Η συνάρτηση Y:I→R θα καλείται λύση όταν ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις:

$$y \in D^n(I)$$

$$(x, y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)) \in Ix\Omega$$

$$f(x, y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)) \forall x \in I$$

Γενική λύση θα καλείται η οικογένεια των συναρτήσεων $y = y(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n), x \in I$ για κάθε τιμή των ανεξάρτητων ci όπου η $y = y(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)$ είναι λύση της $f(x, y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)) = 0$

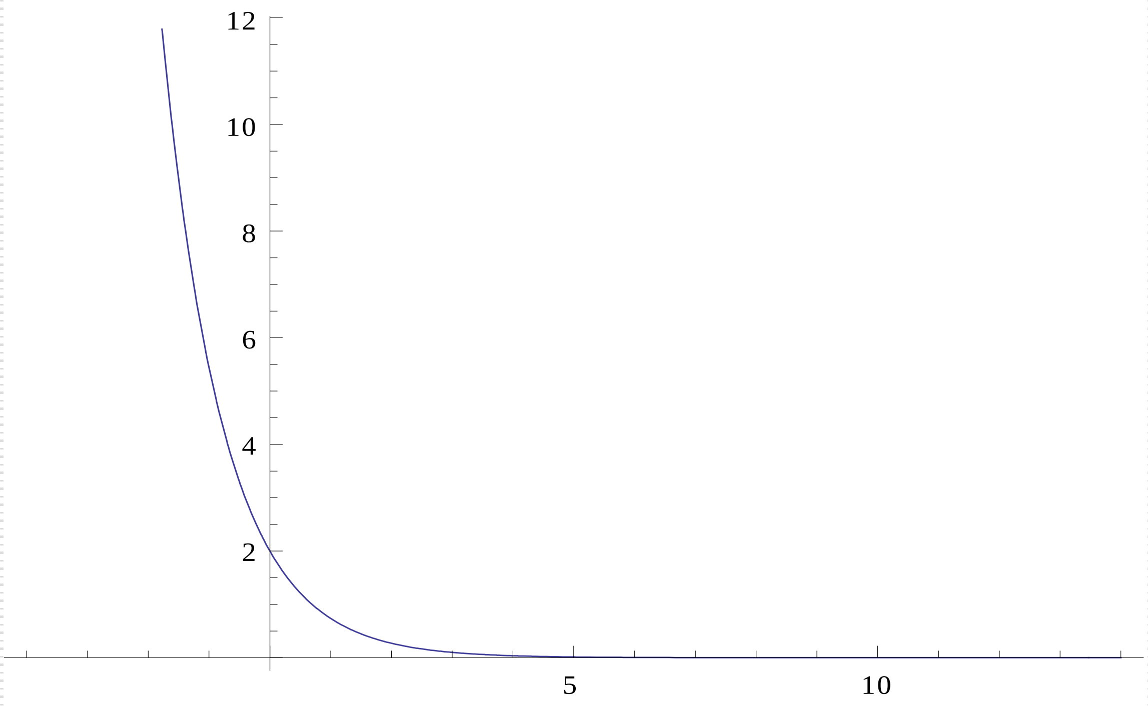
ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (4)

Προφανώς μια λύση μια διαφορικής εξίσωσης y=φ(x) σε ένα διάστημα I μπορεί να έχει την μορφή $y^{n}(x) = y(x), y^{1}(x), \ldots\ldots, y^{n-1}(x)$ (2)
και άρα η ΣΔΕ έχει την λυμένη της μορφή.
Μια οικογένεια λύσεων που περιέχει όλες τις λύσεις θα καλείται *πλήρης (γενική)*.
Για ορισμένες τιμές των σταθερών απο την την μερική.
Κάθε λύση που δεν ανήκει στην γενική άρα κι στην πλήρη καλείται *ιδιάζων (μερική).*

Μπορείτε να κατανοήσετε την διαφορά;

Γραφική Απεικόνιση Λύσεων

Για την διαφορική y'+y=0 με y(0)=2



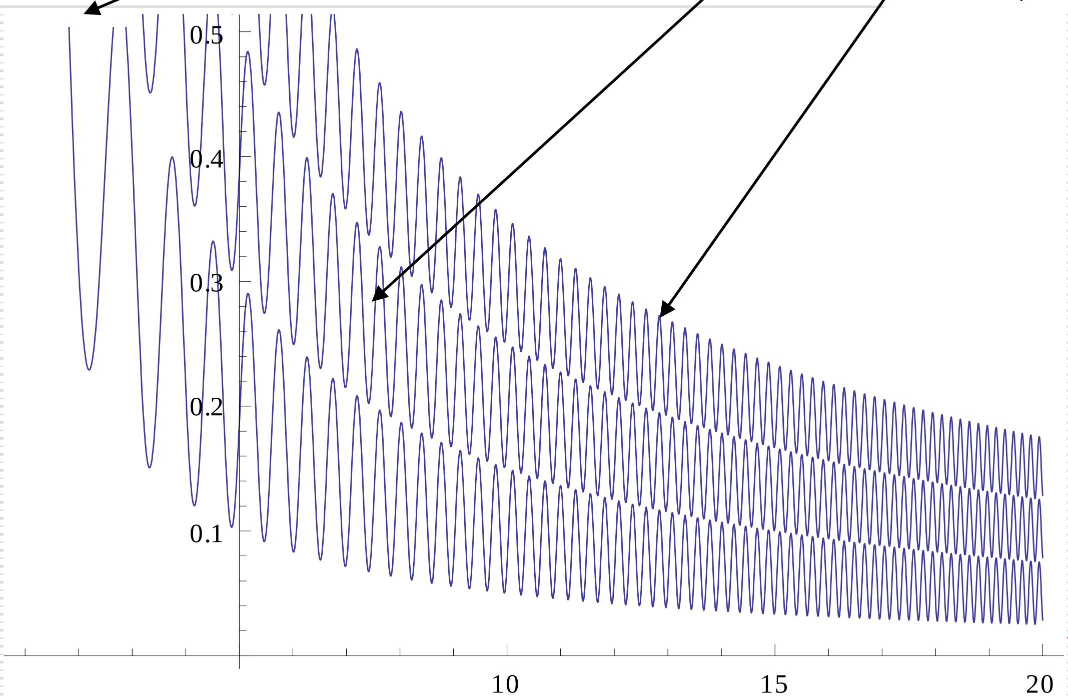
Τι παρατηρείται;

Γραφική Απεικόνιση Λύσεων

```
s1 = DSolve[y'[x] == y[x]/x + Cos[x^2], y[x], x]

d1 = Plot[1/x + Sin[x^2]/(2 x), {x, 1, 20}]
d2 = Plot[2/x + Sin[x^2]/(2 x), {x, 1, 20}]
d3 = Plot[3/x + Sin[x^2]/(2 x), {x, 1, 20}]

Show[d1, d2, d3, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```



Η γενική λύση μιας δ.ε είναι γνωστή και ως γενικό ολοκλήρωμα ενώ η διαδικασία καλείται ολοκλήρωση.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (4)

- Τάξη ΣΔΕ

Ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται.

- Βαθμός

Εάν η συνάρτηση F που ορίζει την $f(x, y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)) = 0 \quad (1)$ είναι ένα πολυώνυμο στις μεταβλητές $y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)$
τότε η (1) ονομάζεται πολυωνυμικής μορφής ΣΔΕ. Στην περίπτωση αυτή ο βαθμός ως προς την $y^n(x)$ καλείται βαθμός της ΣΔΕ

- Γραμμική: Η συνάρτηση (1) θα είναι γραμμική όταν η F είναι γραμμική συνάρτηση των $y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)$

Η γενική μορφή μιας γραμμικής είναι η παρακάτω

$$F_n(x)y^n(x) + F_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \ldots. + F_0 y(x) = g(x)$$

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμική και να βρεθεί η τάξη της:

1. $3y^5 + 2xy^{(4)} = 0$
2. $y'' + xy' + lnx = 4$
3. $(y'')^5 + xy^{(8)} = x^{1/2}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (5)

- Ομογενής

Όταν ο σταθερός όρος σε μία γραμμική εξίσωση μηδενίζεται τότε αυτή θα καλείται ομογενής.

$$F_n(x)y^n(x) + F_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \ldots. + F_0 y(x) = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Να εξετάσετε το βαθμό και την τάξη των παρακάτω ΔΕ.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\frac{d^2 y}{dx^2} + 6y + 7x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6y = 0$$

$$y''' + 4y'' + 6y' + 7y = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x - 1 = 0$$

$$(y''')^2 + 6y' = 0$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Απαραίτητη θεωρείται η γνώση ολοκληρωμάτων για την επίλυση ΣΔΕ. Συνεπώς θυμίζουμε

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int dx/x = \log\left|x\right| + c \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ & ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Η εύρεση λύσης στο διάστημα που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(x_0) = y_0, y^1(x_0) = y_1, \ldots\ldots, y^{n-1}(x) = y_{n-1}$ όπου $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1}$ προκαθορισμένοι πραγματικοί αριθμοί αποτελεί πρόβλημα αρχικών τιμών. Με άλλα λόγια το πρόβλημα της εύρεσης μιας λύσης της $f(x, y(x), y^1(x), \ldots\ldots, y^n(x)) = 0 \quad (1)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(x_0) = y_0, y^1(x_0) = y_1, \ldots\ldots, y^{n-1}(x) = y_{n-1}$ λέγεται πρόβλημα αρχικών τιμών

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ & ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Εάν η συνάρτηση y ή και οι παραγωγοί της προκαθορίζονται στα δύο άκρα ενός διαστήματος $I=[x_1, x_2]$ τότε οι αντίστοιχες συνθήκες καλούνται συνοριακές.

Η εύρεση λύσης στο διάστημα $I=[x_1, x_2]$ που ικανοποιεί δεδομένες συνοριακές συνθήκες αποτελεί ΠΣΤ.

Η λύση του ΠΑΤ είναι μια μερική λύση της δ.ε του ΠΑΤ αφού η λύση προέρχεται από την γενική λύση για τιμή του c.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η $y'(x) = x^3 + \cos x$ με αρχική συνθήκη y(1)=1

ΛΥΣΗ

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = x^3 + \cos x \Leftrightarrow dy = x^3 dx + \cos x dx \Leftrightarrow$$

$$\int dy = \int x^3 dx + \cos x dx \Leftrightarrow y = x^4/4 + \sin x + c$$

Επειδή όμως έχουμε την συνθήκη $y(1) = 1$ τότε

$$1 = 1^4/4 + \sin 1 + c \Leftrightarrow c = 3/4 - \sin 1$$

Άρα $y = x^4/4 + \sin x + 3/4 - \sin 1$

Εύρεση διαφορικής εξίσωσης από την γενική της λύση I

- Έστω ότι έχουμε την συνάρτηση y=y(x) στης οποίας τον τύπο εμφανίζονται κάποιες αυθαίρετες σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Θέλουμε να βρούμε την διαφορική εξίσωση της οποίας η y=y(x) αποτελεί την γενική λύση.

1. Παραγωγίζουμε την y=y(x) τόσες φορές όσες και οι σταθερές οι οποίες περιέχει.
2. Απαλείφουμε τις σταθερές και έτσι προκύπτει η ζητούμενη διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η δ.ε που έχει ως λύση την $y = c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x}$ (1).

Βρίσκουμε τις παραγώγους: $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{3x}$ (2)

$y'' = 4c_1 e^{2x} - 9c_2 e^{3x}$ (3)

Εύρεση διαφορικής εξίσωσης από την γενική της λύση I

$$D = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & -3e^{3x} \\ 4e^{2x} & -9e^{3x} \end{vmatrix} = -18e^{5x} + 12\ e^{5x} = -6\ e^{5x}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} y' & -3e^{3x} \\ y'' & -9e^{3x} \end{vmatrix} = -9e^{3x}\ y' + 3e^{3x}\ y''$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & y' \\ 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 2e^{2x}\ y' - 4e^{2x}\ y''$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-9e^{3x}\ y' + 3e^{3x}\ y''}{-6\ e^{5x}} = \frac{3}{2}e^{-2x}y' - \frac{1}{2}\ e^{-2x}y''$$

$$c_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2e^{2x}\ y' - 4e^{2x}\ y''}{-6\ e^{5x}} = -\frac{1}{3}e^{-3x}y' + \frac{2}{3}\ e^{-3x}y''$$

Αντικαθιστούμε τα c_1, c_2 στην (1) και έχουμε

$$y = c_1e^{2x} - c_2e^{3x} = \left(\frac{3}{2}e^{-2x}y' - \frac{1}{2}\ e^{-2x}y''\right)\ e^{2x} - \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}y' + \frac{2}{3}\ e^{-3x}y''\right)\ e^{3x}$$

$$y = \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{3}\ y' - \frac{2}{3}\ y''$$

$$y = \frac{11}{6}y' - \frac{7}{6}\ y''$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$y' = g(y)$$

Η διαφορική εξίσωση της παραπάνω μορφής πάρα πολύ απλά έχει λύση την εξής: $y' = g(y) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = g(y) \Leftrightarrow$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = x + c$$

Να λυθεί η $y' = -2y$

Εφαρμογή στα Οικονομικά

Υποθέστε ότι η ενεργειακή κατανάλωση στην Ελλάδα αυξάνει με σταθερό ποσοστό 3% κάθε έτος. Εάν την περίοδο 1999 η οποία θεωρείται και περίοδος βάσης η κατανάλωση ήταν 200Twh να υπολογίσετε την κατανάλωση σε συνάρτηση του χρόνου.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΛΙΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ

Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \quad (3)$ όπου οι συναρτήσεις f(x,y),g(x,y) είναι ορισμένες σε διάστημα D. Εάν υπάρχει διαφορίσιμη h(x,y): $f(x,y)dx + g(x,y)dy = dh(x,y)$
η παραπάνω εξίσωση (3) θα καλείται ακριβής. Η λύση αυτής δίνεται

$$\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} g(x,y)dy = c$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΛΙΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ

- Κριτήριο ακρίβειας:

Έστω ότι οι συναρτήσεις f(x,y) και g(x,y) έχουν συνεχείς παραγώγους στο D, όπου D είναι ένα ανοιχτό και απλά συνεκτικό χωρίο στο R^2. Τότε η (3) είναι ακριβής αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΛΙΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ

- Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$1.\ e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$$

$$2.\ \left(x + \sin y\right)dx + \left(x\cos y - 2y\right)dy = 0$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η εξίσωση $y' = f(x)g(y)$ η οποία με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να πάρει την μορφή $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Κάθε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών είναι ακριβής καθώς $f_x = g_y = 0$

Η λύση των ΣΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών ακολουθεί πιστά την θεωρία όπως παρουσιάστηκε παραπάνω.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ- Εφαρμογές

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$y' = 5x^2 + 6x + 2 \text{ που διέρχεται απο το } (0,1)$$

$$\mathrm{y} = \ln\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)$$

$$e^{3x} e^{2y} dy - e^{-5y} dx = 0$$

$$xy\left(1 + x^2\right) y' = 1 + y^2$$

Εφαρμογή στα Οικονομικά

Ας θεωρήσουμε ότι η ποσότητα κεφαλαίου $K(t)$ σε χρόνο t που επενδύεται σε μια βιομηχανία. Έστω το κεφάλαιο μειώνεται με ρυθμό d και ότι το αρχικό ποσό επένδυσης στην βιομηχανία είναι I. Πως θα παρουσιάζατε το ανάλογο πρόβλημα;

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$y' = g(ax + by + c)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης γίνεται όταν θέσουμε $u(x) = (ax + by + c)$

Παράδειγμα

Να λυθεί η $y' = (x + y)^2$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι της μορφής $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ όπου οι $M(x,y), N(x,y)$ είναι ομογενής ως προς x,y του ίδιου βαθμού ομοιογένειας όπου $M(x,y) = x^{\mu} A\left(y/x\right), N(x,y) = x^{\mu} B\left(y/x\right)$

Εάν τώρα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της ομογενούς συναρτήσεως θα έχουμε ότι:

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$x^{\mu}\mathrm{A}\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^{\mu}B\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Θέτουμε τώρα

$$u = \left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow y' = (ux)' \Leftrightarrow y' = u'x + u \Leftrightarrow u'x + u = f_u \Leftrightarrow$$

$$u' = \frac{f_u - u}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f_u - u}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{f_u - u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow cx = e^{\int \frac{du}{f_u - u}}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΗΣ

- Θα αναφερθούμε σε δύο περιπτώσεις που ανάγονται σε ομογενής διαφορικές:

$$1.\ y' = f\left(\frac{a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$$

$$2.\ y' = f\left(\frac{\lambda a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$$

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΔΕ-Εφαρμογές

- Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις (ομογενής):

$$y' = \frac{y}{x}[1 + \log y - \log x]$$

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x$$

$$y^2 = xy\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx}$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2},\ y(1) = 1$$

Ασκήσεις προς λύση

1. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 32 εκατομμύρια και αυξάνεται συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 3,5%. Πόσος θα είναι ο πληθυσμός σε 20 χρόνια εάν ο ρυθμός αύξησης παραμένει ο ίδιος;
2. Μία επιχείρηση εισήγαγε ένα καινούργιο προϊόν την προηγούμενη χρονιά. Οι τρέχουσες εβδομαδιαίες πωλήσεις είναι 56,000 μονάδες. Εάν οι πωλήσεις αναμένεται να αυξηθούν συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 12.5% ποιες θα είναι οι αναμενόμενες πωλήσεις 36 εβδομάδες από τώρα (θεωρήστε ότι ένας χρόνος είναι ακριβώς 52 εβδομάδες).
3. Το τρέχον απόθεμα ενός φυσικού πόρου M είναι 250 εκατομμύρια τόνοι. Εάν αυτό το απόθεμα χρησιμοποιείται συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 9% ποια θα είναι η ποσότητα του M σε απόθεμα μετά από 30 χρόνια;
4. Ένας ανανεώσιμος φυσικός πόρος R επιτρέπει ένα προβλεπόμενο μέγιστο ρυθμό κατανάλωσης 200 εκατομμυρίων μονάδων τον χρόνο. Η τρέχουσα ετήσια χρήση του πόρου είναι 65 εκατομμύρια μονάδες. Εάν η ετήσια χρήση αυξάνεται συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 7,5% θα υπάρχει επάρκεια του πόρου R για να ικανοποιήσει την ετήσια ζήτηση μετά από (a)5 χρόνια, (b)10 χρόνια, (c)15 χρόνια, (d)20 χρόνια;

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο 14ο Ross and Lis
- Κεφάλαιο 23 απο Pemberton-Rau
- Κεφάλαιο 18 Λουκάκης