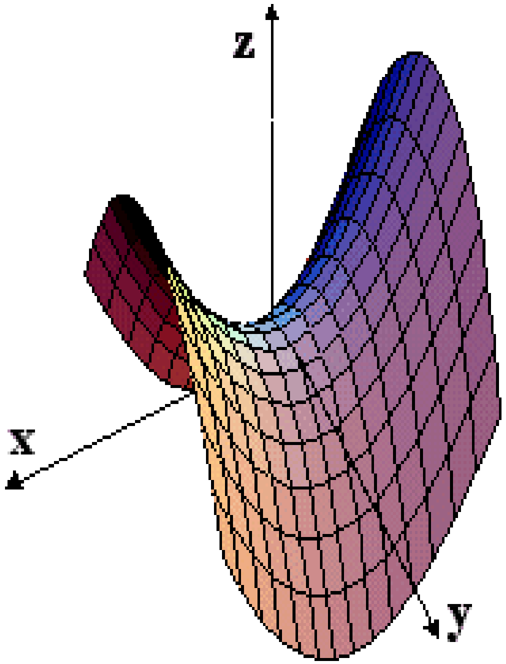
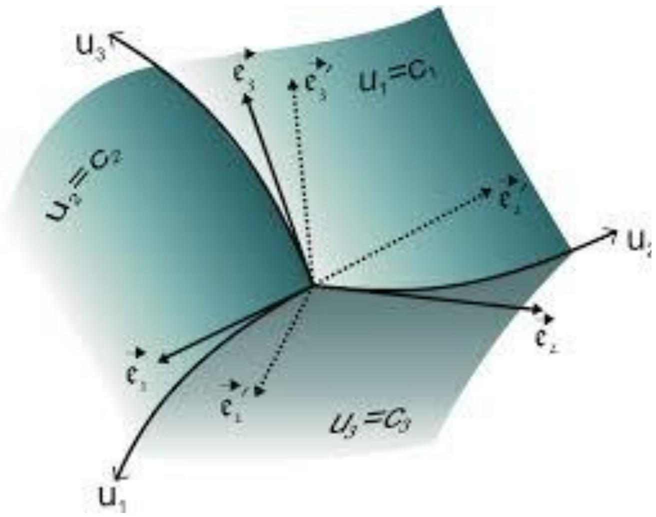
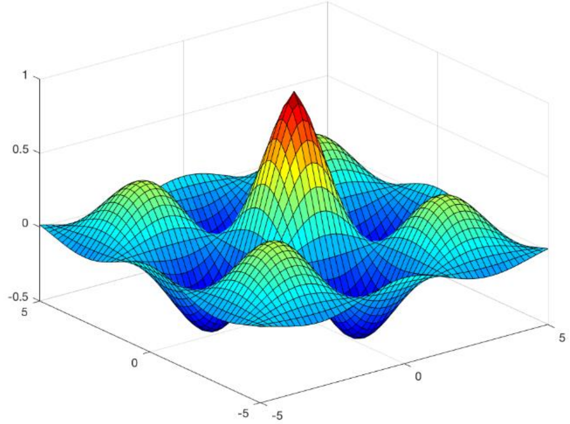
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2009-2010

Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ-Μάθημα 5ο-6ο
Όριο-Συνέχεια-Παράγωγος-Διαφορικό







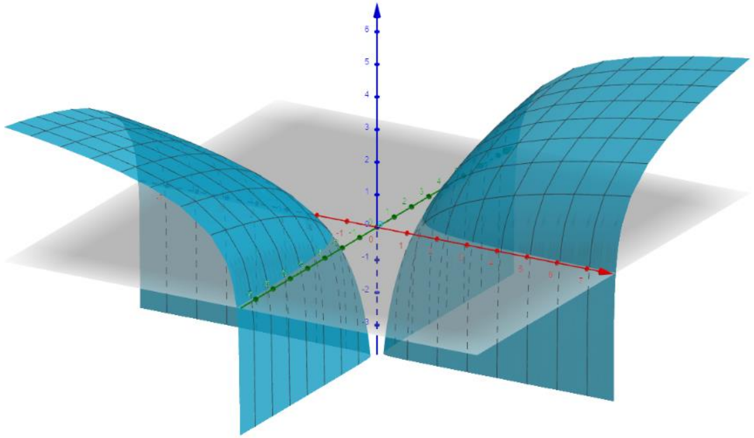
ΣΥΝΑΡΤΉΣΕΙΣ ΠΟΛΛΏΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΏΝ

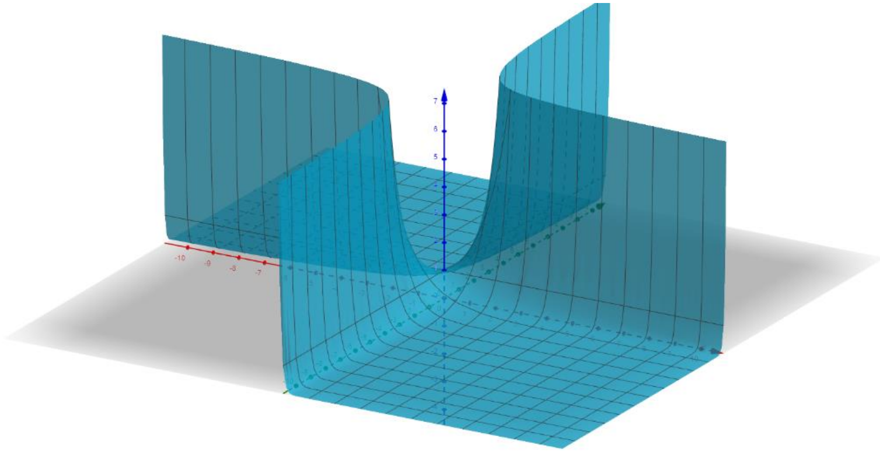
ΟΡΙΣΜΟΣ

Πραγματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής:
Έστω X ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής ή πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών μια απεικόνιση $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο (διάνυσμα) $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ του X σε έναν και μόνο αριθμό $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ του $\mathbb{R}$.

Διανυσματική συνάρτηση μιας διανυσματικής μεταβλητής:
Έστω X ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και Y ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Τότε ονομάζουμε διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής ή συνάρτηση πολλών μεταβλητών μια απεικόνιση $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$ η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο (διάνυσμα) $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ του X σε έναν και μόνο διάνυσμα $f(x_1, x_2, \dots x_n)= y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ του$\mathbb{R}^m$.

Πεδίο ορισμού συνάρτησης





$f(x,y)=\ln xy$

$f(x,y) = e^{xy}$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

Θεωρούμε την συνάρτηση z=f(x,y)/D όπου D ανοικτό υποσύνολο του R^2

Ποια η συμπεριφορά της συνάρτησης f καθώς το σημείο $P(x, y) \rightarrow P(x_0, y_0)$

Ο αριθμός l λέγεται όριο της συνάρτησης καθώς το σημείο τείνει από το σημείο $P(x, y) \rightarrow P(x_0, y_0)$ και γράφεται $\lim_{(x,y)-->(x_0,y_0)} (x, y) = P$

ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

Μια συνάρτηση f(x,y) θα λέμε ότι έχει όριο έναν πραγματικό αριθμός l καθώς το σημείο

$$P(x, y) \to P(x_0, y_0)$$

και συμβολίζεται ως $f(x, y) \to$ καθώς το

$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$

αν και μόνο εάν $\forall \; \varepsilon > 0 \;\; \exists_{\upsilon\upsilon\nu} \; \delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0 :$

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon \;\; \text{όταν} \;\; |\mathrm{x-x}_0| < \delta_1, |\mathrm{y-y}_0| < \delta_2$$

$$\text{και} \;\; (\mathrm{x,y}) \neq (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$$

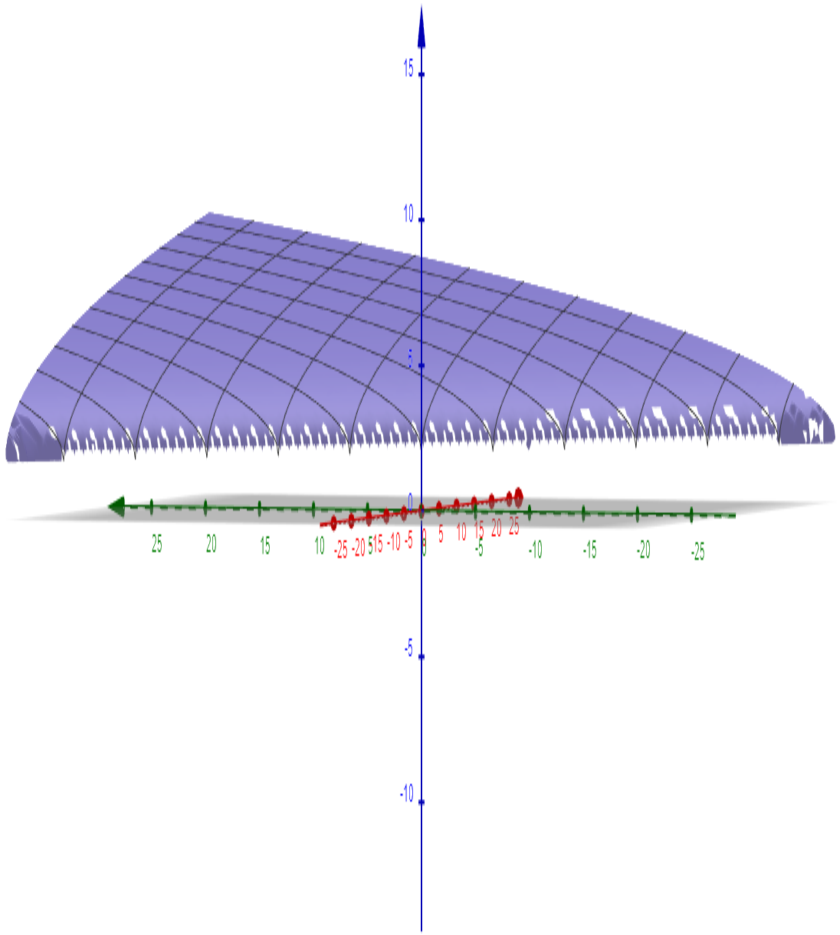
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω δύο συναρτήσεις f(x,y), g(x,y) με κοινό πεδίο ορισμού και $\lim_{(x,y)-->(x_0,y_0)} f(x,y) = l,\ \lim_{(x,y)-->(x_0,y_0)} g(x,y) = m$

1. Άθροισμα $\lim_{(x,y)-->(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = l \pm m$
2. Γινόμενο $\lim_{(x,y)-->(x_0,y_0)} [f(x,y) g(x,y)] = lm$
3. Πηλίκο $\lim_{(x,y)-->(x_0,y_0)} [f(x,y) / g(x,y)] = l / m$

Παράδειγμα:

Ποιο το όριο της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2$ όταν $(x,y) \to (1,2)$



Άσκηση 2

Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

Λύση

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{(\sqrt{x+y}-2)(\sqrt{x+y}+2)} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{x+y-4} = 2$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Για να είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο $P(x_0, y_0)$ θα πρέπει:

1. Να υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό,
2. Να ορίζεται η συνάρτηση στο σημείο αυτό και
3. Να ισχύει $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (x,y) = l$

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2), & \text{εάν } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Μια συνάρτηση z=f(x,y)/D όπου D ανοικτό υποσύνολο του R^2 θα καλείται φραγμένη στο

$$A \subseteq D \ \text{εάν} \ \exists \ \mathrm{M} : \left| f(x, y) \right| \leq M \quad \forall (x, y) \in A$$

Μια συνάρτηση z=f(x,y)/D όπου D ανοικτό υποσύνολο του R^2 θα καλείται ομοιόμορφα συνεχής εάν

$$\forall \varepsilon \ \text{f} \ 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) \ \text{f} \ 0 : \left| f(P_1) - f(P_2) \right| < \varepsilon$$

$$\forall P_1, P_2 : \left\| P_1 P_2 \right\| < \delta(\varepsilon)$$

ΕΝΝΟΙΑ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω η συνάρτηση y= f(x1 ,x2,,……xn).Εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή xi μπορεί να μεταβληθεί από xi σε xi+Δxi ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές τότε η y θα μεταβληθεί κατά Δy.Εάν υπάρχει και είναι πεπερασμένο το όριο όταν το όριο τείνει στο μηδέν τότε η y= f(x1 ,x2,,……xn) είναι παραγωγίσιμη ως προς Δxi .Το όριο καλείται μερική παράγωγος.

ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

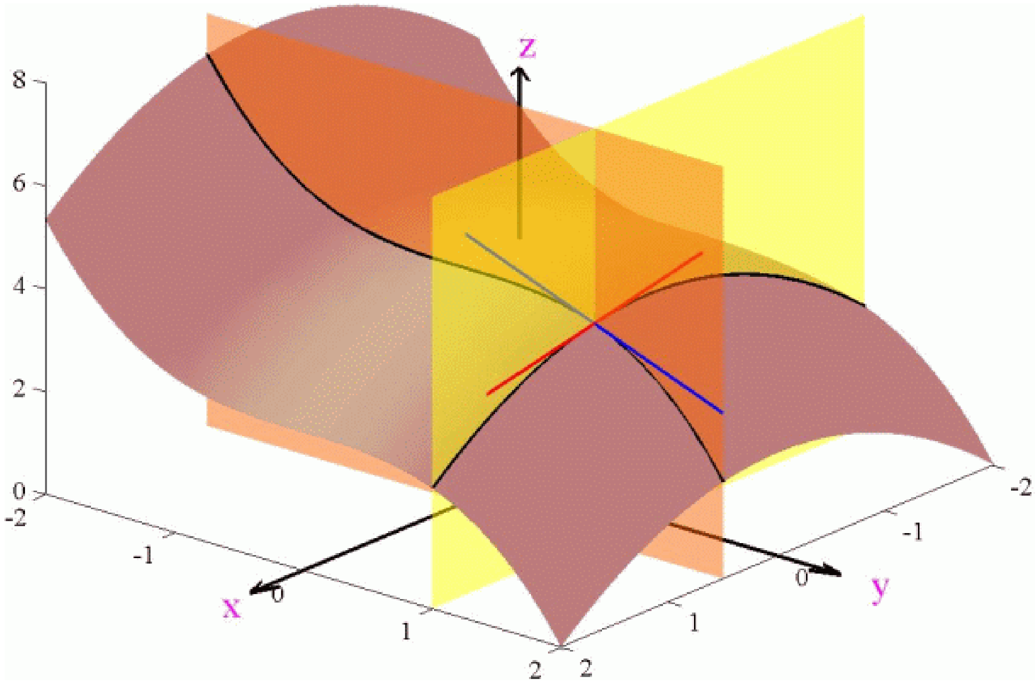
Η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών (x,y) μπορεί να εκφραστεί με βάση τους παρακάτω ορισμούς:

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ (το παράδειγμα της δισδιάστατης επιφάνειας)

Οι μερικές παράγωγοι $\boldsymbol{f_x}$ και $\boldsymbol{f_y}$ και εκφράζουν την κλίση της επιφανειακής καμπύλης που δημιουργείται από την τομή της επιφάνειας από τα επίπεδα y=y_0 και x=x_0



ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για την συνάρτηση παραγωγής παραγωγής $Q= 20K^{0.5}L^{0.5}$ διατυπώστε μία μαθηματική έκφραση για το MP_L και Δείξτε ότι MP_L μειώνεται καθώς κινούμαστε πάνω σε μία καμπύλη ισοπαραγωγής χρησιμοποιώντας περισσότερο εργασία L.

ΛΥΣΗ

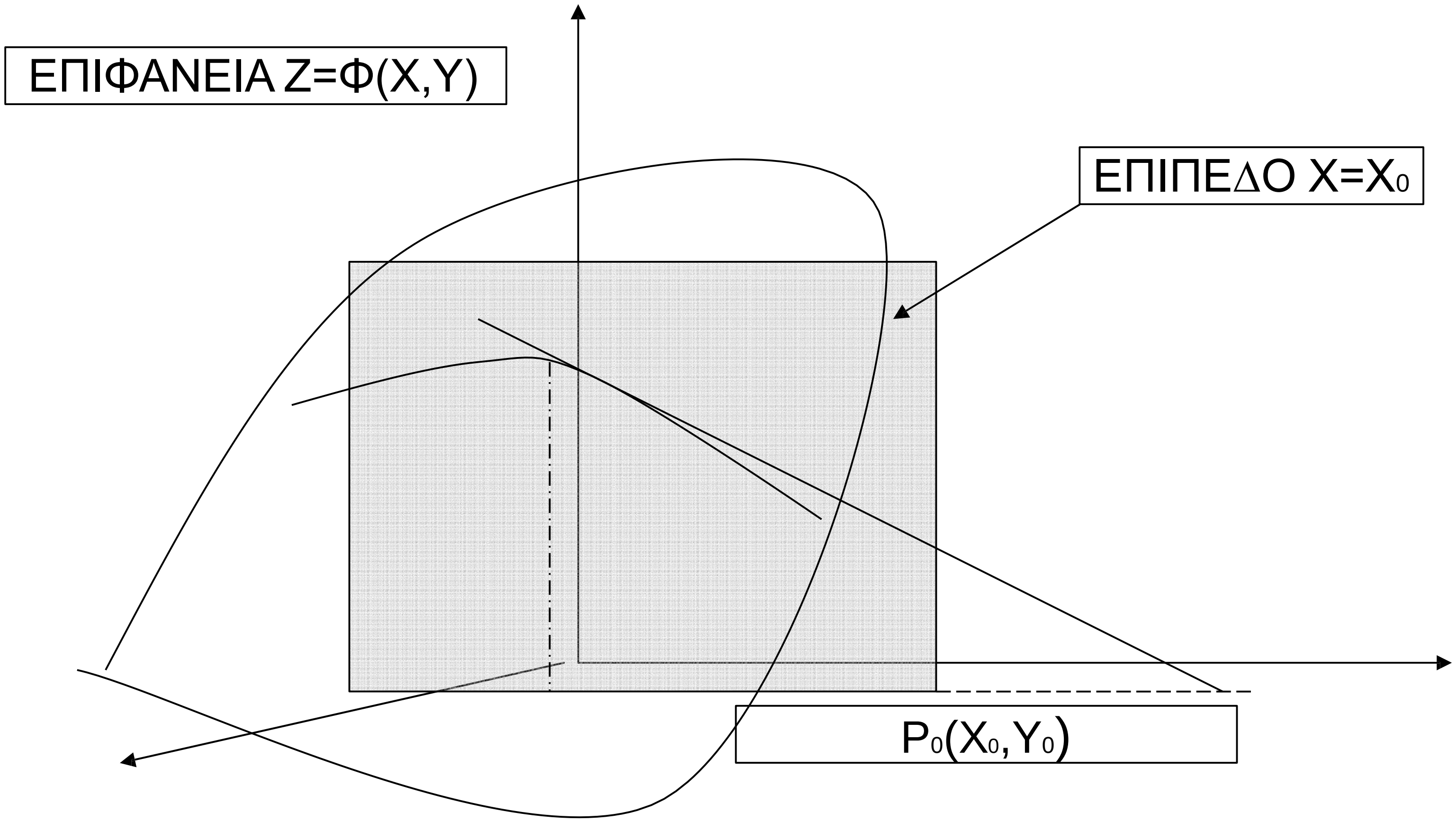
Υπολογίζουμε τον οριακό λόγο της εργασίας MP_L με τη μερική παράγωγο της συνάρτησης παραγωγής ως προς L. Έτσι

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial (20K^{0.5}L^{0.5})}{\partial L} = \frac{10K^{0.5}}{L^{0.5}}$$

Εάν η συνάρτηση MP_L παραπάνω πολλαπλασιαστεί με τον όρο $2L^{0.5}$ τότε έχουμε $MP_L = \frac{Q}{2L}$

Τα σημεία πάνω σε μία καμπύλη ισοπαραγωγής δείχνουν συνδυασμούς K και L με τους οποίους παράγεται η ίδια ποσότητα προϊόντος. Συνεπώς, εαν η ποσότητα Q είναι σταθερή και η εργασία L αυξάνεται τότε η συνάρτηση (1) μας δείχνει ότι ο οριακός λόγος της εργασίας MP_L θα μειώνεται. (Σημειώστε ότι κινούμενοι πάνω σε μία καμπύλη ισοπαραγωγής σημαίνει ότι προκειμένου να διατηρηθεί σταθερό το προϊόν γίνεται χρήση περισσότερου L και λιγότερου K.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η συνάρτηση $y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ θα είναι παραγωγίσιμη εάν και μόνο εάν είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται το διάνυσμα μερικών παραγώγων (διάνυσμα βαθμίδας-gradient) σε κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της ως εξής:

$$grad f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση (κλίση ή gradient)

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$, τότε η μερική παράγωγος της f εκφράζει ένα μέτρο αλλαγής της στον άξονα της μεταβλητής. Για παράδειγμα, αν η f είναι μια συνάρτηση του x και του y, τότε οι μερικές της παράγωγοι μετράνε την αλλαγή της f στην κατεύθυνση x και στην κατεύθυνση y. Ωστόσο, δεν μετράνε άμεσα την αλλαγή της f σε κάποια άλλη κατεύθυνση. Για να προσδιορίσουμε την μεταβολή ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση χρησιμοποιούμε την παράγωγο κατά κατεύθυνση

Έστω διάνυσμα u=$(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Η διανυσματική παράγωγος της f στην κατεύθυνση του u στο x είναι το όριο

$$D_u f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu) - f(x)}{h}$$

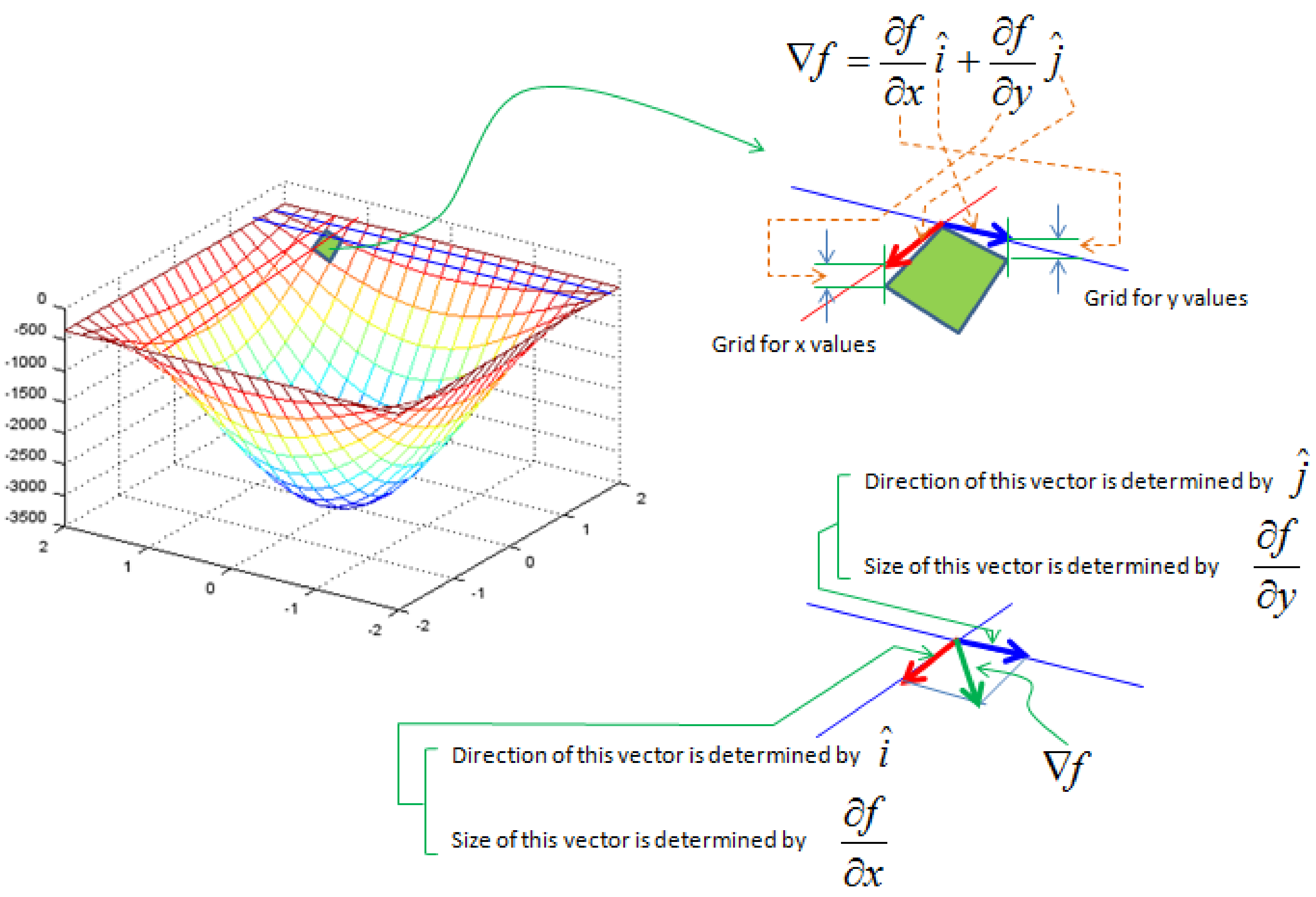
Διάνυσμα κλίσης

1. Αν η συνάρτηση f(x,y) έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης τότε κλίση (gradient) της συνάρτησης f στο σημείο P και συμβολίζουμε με gradf ή $\vec{\nabla} f$ λέγεται το διάνυσμα:

$$\textbf{Gradf(x,y)}=\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}=\left(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}\right)_{\boldsymbol{P}}$$

2. Αν η συνάρτηση f(x,y,z) έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης τότε :

$$\textbf{Gradf(x,y,z)}=\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}}\overrightarrow{\boldsymbol{y_0}}+\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{z}}\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}=\left(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{z}}\right)_{\boldsymbol{P}}$$



$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$
Grid for y values
Grid for x values
0
-500
-1000
-1500
-2000
-2500
-3000
-3500
2
1
0
-1
-2
2
1
0
-1
-2
Direction of this vector is determined by $\hat{j}$
Size of this vector is determined by $\frac{\partial f}{\partial y}$
Direction of this vector is determined by $\hat{i}$
Size of this vector is determined by $\frac{\partial f}{\partial x}$
∇f

Θεώρημα

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ των ανεξάρτητων μεταβλητών $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots \boldsymbol{x_n})$ παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{P_0} = (\boldsymbol{x_{10}}, \boldsymbol{x_{20}}, \dots \boldsymbol{x_{n0}})$. Τότε υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο $\boldsymbol{P_0}$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\boldsymbol{u}}$ του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{P_0}) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$$

Αν το $\vec{\boldsymbol{u}}$ σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα X τότε

$$\vec{\boldsymbol{u}} = (\text{συνθ})\text{i} + (\text{ημθ})\text{j}$$

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \text{ημθ}$$

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{xy}$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2)xy - (\frac{\partial}{\partial x}xy)(1+x^2+y^2)}{(xy)^2} =$$

$$\frac{2xxy - y(1+x^2+y^2)}{(xy)^2} =$$

$$\frac{2x^2y - (y+yx^2+y^3)}{(xy)^2} =$$

$$\frac{2x^2y - y - yx^2 - y^3}{(xy)^2} =$$

$$\frac{x^2y-y-y^3}{\ldots} = \frac{x^2-y^2-1}{\ldots}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y)$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(1 + x^2 + y^2)xy - (\frac{\partial}{\partial y}xy)(1 + x^2 + y^2)}{(xy)^2} =$$

$$\frac{2yxy - x(1 + x^2 + y^2)}{(xy)^2} =$$

$$\frac{2y^2x - (x + x^3 + xy^2)}{(xy)^2} =$$

$$\frac{2y^2x - x - x^3 - xy^2}{(xy)^2} =$$

$$\frac{y^2x - x - x^3}{(xy)^2} =$$

$$\frac{y^2 - x^2 - 1}{y^2x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους των κάτωθι συναρτήσεων

$$f(x,y)=\frac{2x^2}{3y^3},\ f(x,y)=\ln(x^3y^2),\ f(x,y)=e^{x+y},\ g(x,y)=x^3+xy+2y^5$$

- Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται ως

εξής: $Q=AK^{a}L^{1-a},\ A>0,\ 0<a<1$

- Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους ως προς K,L

και το διάνυσμα βαθμίδας.

Ασκήσεις προς λύση

1. Διατυπώστε τον τύπο του οριακού προϊόντος μιας συνάρτησης παραγωγής με τρεις εισροές της μορφής $Q = 40K^{0.3} L^{0.3} R^{0.4}$.
2. Χρησιμοποιείστε την μερική παραγώγιση για να εξηγήσετε γιατί στην συνάρτηση παραγωγής $Q=0.4K+0.7L$ δεν ισχύει ο νόμος φθίνουσας οριακής απόδοσης.
3. Εάν $Q= 18K^{0.3}L^{0.2}R^{0.5}$ θα είναι το οριακό προϊόν οποιασδήποτε από τις τρεις εισροές K,L,R αρνητικό;
4. Δείξτε ότι ο νόμος της φθίνουσας οριακής απόδοσης ισχύει για την συνάρτηση παραγωγής $Q= 12K^{0.4}L^{0.4}$

ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

- Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση u=f(x,y,z)/D. Οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης θα δίνονται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right) = f_{yx}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^3 u(x,y,z)}{\partial z^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y}\right) = f_{yzz}(x,y,z)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{m variables}\\ \text{n order}\end{array}} \longrightarrow \binom{m+n-1}{n}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Να υπολογίσετε τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους των συναρτήσεων.

$$f(x, y) = \sin xy^2,\; f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\; f(x, y) = e^{x+y}$$

Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα με την παρακάτω συνάρτηση κόστους. Ποια τα οριακά κόστη των δύο προϊόντων;

$$TC(Q_1, Q_2) = 50 + Q_1^3 + Q_2 \ln\left(Q_1 + 20\right) + \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ SCHWARZ

Έστω η συνάρτηση f(x,y) ορισμένη σε έναν τόπο D συνεχής με συνεχής μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

και υπάρχουν και είναι συνεχείς στο D οι συναρτήσεις

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$ τότε

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της
$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 4x^2$.

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y + 8x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

ΕΣΣΙΑΝΗ ΜΗΤΡΑ Ι

Ο πίνακας (μήτρα) όλων των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης μιας συνάρτησης υπολογισμένης σε ένα σημείο καλείται εσσιανή μήτρα και δίνεται ως εξής:

$$H\left(x^*\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \ldots. & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & & f_{2n} \\ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots. & \ldots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

ΕΣΣΙΑΝΗ ΜΗΤΡΑ ΙΙ

Εάν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι συνεχείς τότε από το θεώρημα του Swarz έχουμε ότι η εσσιανή μήτρα είναι και συμμετρική

$$H\left(x^*\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dots. & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & & f_{2n} \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots. & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗ ΟΡΙΖΟΥΣΑ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$ με i=1,2,…,n με κοινό πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}^n$ για τις οποίες θεωρούμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ με i,j= 1,2,…,n.

Τότε ως Ιακωβιανή ορίζουμε την ορίζουσα:

$$\frac{D(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \ldots. & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots. & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \ldots. & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

*Αν η Ιακωβιανή ορίζουσα ισούται με το μηδέν τότε οι συναρτήσεις ονομάζονται **συναρτησιακά εξαρτημένες**.*

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ

Μια συνάρτηση z=f(x,y)/D είναι διαφορίσιμη όταν:

- Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως προς x,y
- Η μεταβολή $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

της συνάρτησης f στο (x,y) καθώς και σε γειτονικό αυτής σημείο έχει την μορφή:

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + H(\Delta x, \Delta y)\Delta x + P(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \acute{o}\pi o$$

$$\upsilon\ H, P \to 0, \Delta x, \Delta y \to 0$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-CHAIN RULE I

Εάν η συνάρτηση z=f(x,y)/D είναι κλάση C_1 και υπάρχουν οι παράγωγοι $x'(t), y'(t)$ όπου

$x=x(t), y=y(t), a \le t \le b$

τότε η συνάρτηση f είναι συνάρτηση της t και ισχύει ο ακόλουθος τύπος

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial x} y'(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-CHAIN RULE II

Εάν η συνάρτηση z=f(x,y)/D είναι κλάση C_1 και υπάρχουν οι παράγωγοι x_u, x_v, y_u, y_v των συναρτήσεων $x = x(u,v), y = y(u,v)$
τότε η συνάρτηση f είναι συνάρτηση των u,v και Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} = f_x x_u + f_y y_u$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dv} = f_x x_v + f_y y_v$$

u,v ανεξάρτητες μεταβλητές
x,y ενδιάμεσες μεταβλητές

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της $z(u, v) = e^{uv}$ όπου $u = \ln(x + y)$ και $v = sin\frac{x}{y}$.

Λύση

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$ve^{uv}\frac{1}{x+y} + ue^{uv}\frac{1}{y}cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$ve^{uv}\frac{1}{x+y} + ue^{uv}(-\frac{x}{y^2}cos\frac{x}{y})$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-CHAIN RULE- ΕΦΑΡΜΟΓΗ

- Δίνεται η συνάρτηση $f(u,v,w)=u^2vw$ όπου
  $u=u(x,y)=x+y$
  $v=v(x,y)=x-y$
  $w=w(x,y)=xy$

Να υπολογιστούν τα df, d^2f, *στο* Π(1,2) για dx=0.1,dy=-0.2

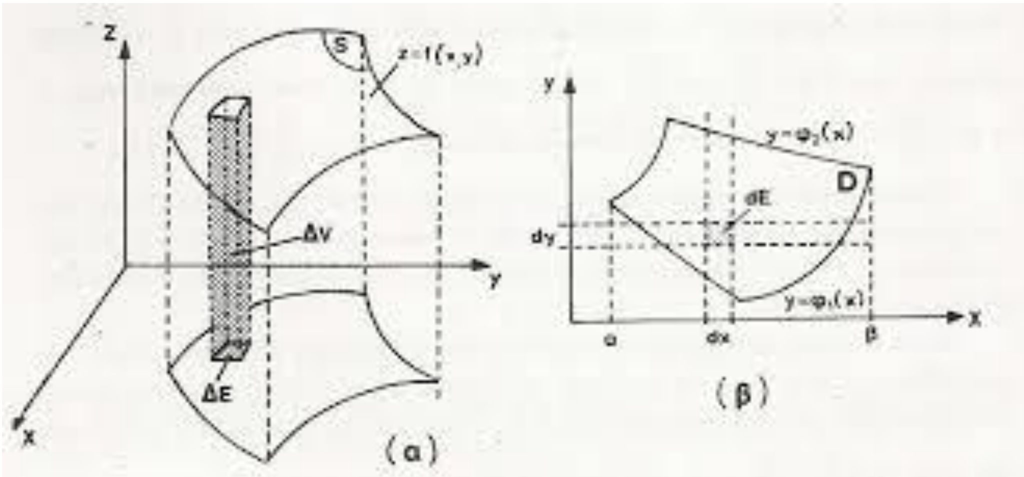
Πως ορίζεται η d^2f;

ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ Ι

Ολικό διαφορικό πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y)$ ονομάζεται η συνάρτηση

$$\boldsymbol{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{dy}$$

Το ολικό διαφορικό εκφράζει την μεταβολή του z για μεταβολές dx και dy των x και y αντίστοιχα



ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΙΙ

Ολικό διαφορικό πρώτης τάξης μιας συνάρτησης f (x,y) στο σημείο P(x,y) ονομάζεται η συνάρτηση $df = f_x \Delta x + f_y \Delta y$
Το διαφορικό μιας συνάρτησης λειτουργεί ως μια ικανοποιητική προσέγγιση της διαφοράς Δf.

$$df = f_x \Delta x + f_y \Delta y = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f$$

Διαφορικός Τελεστής

ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΙΙΙ- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$1.\ d(k) = 0, k \in R$$

$$2.\ d(kx \pm ly) = kdx \pm ldy$$

$$3.\ d(xy) = xdy + ydx$$

$$4.\ d\left(x/y\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$5.\ d\left(e^x\right) = e^x dx$$

$$6.\ d(x^k) = kx^{k-1}dx$$

ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΙΙΙ

Ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης μιας συνάρτησης f (x,y) στο σημείο P(x,y) ονομάζεται η συνάρτηση $d^2 f = \left(f_x dx + f_y dy \right)^2$

Εάν λάβουμε υπόψη το θεώρημα του Schwarz και κάνουμε τις πράξεις θα έχουμε ότι:

$$d^2 f = d(f_x dx + f_y dy) = d(f_x) dx + d(f_y) dy =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

Παράδειγμα

$$w = f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4x - y + 3z - 1$$

$$x(t) = t^2 - 2t + 1,\ y(t) = 3t - 2,\ z(t) = t^2 + 4t - 3$$

ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ολικό διαφορικό M τάξης μιας συνάρτησης f(x,y) στο σημείο P(x,y) ονομάζεται η συνάρτηση

$$d^M f = \left(f_x dx + f_y dy\right)_M = d(d(..(df)$$

Θέλει μεγάλη προσοχή το να κατανοήσουμε ότι το κ τάξεως διαφορικό με την έννοια της δύναμης λαμβάνει συμβολικό χαρακτήρα και δεν είναι τετράγωνο, κύβος κ.τ.λ.

Άσκηση 4

Να βρεθεί το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^3z + x^2yz^3 + y^2 + x^2 + z^2$$

Λύση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{dz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2z + 2xyz^3 + 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3 + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3 + 3x^2yz^2 + 2z$$

$$df = (3x^2z + 2xyz^3 + 2x)dx + (x^2z^3 + 2y)dy + (x^3 + 3x^2yz^2 + 2z)\mathrm{dz}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί η ολική παράγωγος πρώτης τάξης της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 4x - y + 3z - 1$$

Με $x(t) = t^2 - 2t + 1$, $\mathrm{y}(t) = 3t - 2$, $\mathrm{z}(t) = t^2 + 4t - 3$

Λύση

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4z + 3$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 2, \qquad \frac{dy}{dt} = 3, \qquad \frac{dz}{dt} = 2t + 4$$

$$\frac{df}{dt} = (2x + 4)(2t - 2) + 3(6y - 1) + (-4z + 3)(2t + 4)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογίσετε το διαφορικό πρώτης και δεύτερης τάξεως της συνάρτησης $u = x^2 + xy$
2. Να βρεθεί το διαφορικό δεύτερης τάξης της συνάρτησης χρησιμότητας $u = xy$ δεδομένο ότι γνωρίζουμε την εξίσωση εισοδηματικού περιορισμού $I = p_x x + p_y y$
3. Η παραγωγή μιας επιχείρησης είναι $Q(K, L) = 60 K^{1/2} L^{1/3}$. Προς το παρόν χρησιμοποιούνται 1000 εργατοώρες και έχει επενδυθεί κεφάλαιο 900 εκ. Να προσεγγιστεί η αλλαγή στην παραγωγή όταν το κεφάλαιο αυξηθεί κατά 1 εκ. και οι εργατοώρες κατά 2.

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Ι

Μια συνάρτηση z=f(x,y)/D θα καλείται ομογενής βαθμού Κ εάν για κάθε Κ μεγαλύτερο ή ισο του μηδενός ισχύει ότι:

$$f(Kx, Ky) = K^n f(x, y)$$

Είναι η παρακάτω συνάρτηση ομογενής και τι βαθμού;

$$f(K, L) = 2K + 3L$$

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΙΙ

Μια συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερό βαθμό υποκατάστασης (constant returns to scale) όταν αύξηση των εισροών κατά Κ ποσοστό αυξάνει τις εκροές κατά το ίδιο ποσοστό, φθίνοντα βαθμό υποκατάστασης (decreasing returns to scale) εάν έχουμε αύξηση των εκροών κατά μικρότερο ποσοστό Κ και αυξάνοντα βαθμό (increasing returns to scale) εάν οι εκροές αυξάνουν με ποσοστό μεγαλύτερο του Κ.

ΘΕΩΡΗΜΑ EULER

- Για την ομογενή συνάρτηση z=f(x,y)/D ισχύει ότι

  $xZ_x + yZ_y = Kz,\ K$ βαθμός ομοιογένειας

- Εφαρμογή στην Cobb-Douglas!

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Θεωρούμε μια οικονομική συνάρτηση y= $\mathbf{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$. Αν οι οικονομικές μεταβλητές $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ χρησιμοποιούνται σε επίπεδα $\boldsymbol{x_1^0}, \boldsymbol{x_2^0}, \dots, \boldsymbol{x_n^0}$, η μερική παράγωγος

$$\frac{\boldsymbol{\partial}\mathbf{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})}{\boldsymbol{\partial x_i}}$$

Εκφράζει το οριακό οικονομικό μέγεθος της y στο $(\boldsymbol{x_1^0}, \boldsymbol{x_2^0}, \dots, \boldsymbol{x_n^0})$

Επιπλέον εφαρμογές της μερικής παραγώγισης

Η μερική παραγώγιση είναι βασικά μία μαθηματική εφαρμογή της προϋπόθεσης ceteris paribus (δηλαδή των υπολοίπων μεταβλητών σταθερών) και συχνά χρησιμοποιείται στην οικονομική ανάλυση. Επειδή η οικονομική επιστήμη είναι ένα σύνθετο σύστημα, οι οικονομολόγοι συχνά εξετάζουν τις επιπτώσεις των μεταβολών μιας μεταβλητής θεωρώντας όλους τους άλλους παράγοντες σταθερούς. Όταν η σχέση μεταξύ διαφορετικών οικονομικών μεταβλητών μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικό μορφή, τότε η ανάλυση των επιδράσεων των μεταβολών μιας μεταβλητής μπορούν να εξεταστούν μέσω της μερικής παραγώγισης. Έχουμε ήδη εξετάσει πώς η μερική παραγώγιση μπορεί να εφαρμοστεί στις συναρτήσεις παραγωγής και στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μερικές ακόμα εφαρμογές.

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ελαστικότητα ζήτησης: $\text{E}=\frac{\text{ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΖΗΤΗΣΗ}}{\text{ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΤΙΜΗ}}$

Ελαστικότητα προσφοράς:
$\text{E}=\frac{\text{ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΦΟΡΑ}}{\text{ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΤΙΜΗ}}$

$\text{E} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$ Δεν δίνει την ακριβή τιμή σε σημείο
Αλλά για ΔQ και ΔP να τείνουν στο μηδέν έχουμε την ελαστικότητα σε σημείο

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}}$$

Ελαστικότητα

Για την παρακάτω συνάρτηση ζήτησης , ποια είναι η ελαστικότητα ζήτησης όταν p=24;

Γνωρίζουμε την τιμή του p και μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο $q = 34 - 0.4p + 0.15m - 0.25p_c + +0.12p_s + 0.003n$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στον τύπο της ελαστικότητας έχουμε $\frac{\partial q}{\partial p} = -0.4$

$$\varepsilon = \frac{p}{q}\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{24}{34 - 0.4 * 24 + 0.15m - 0.25p_c + +0.12p_s + 0.003n}(-0.4)$$

Η πραγματική τιμή της ελαστικότητας δεν μπορεί να υπολογιστεί εάν δεν γνωρίζουμε τις τιμές των m,p_c,p_s, και n. Έτσι αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι η τιμή της ελαστικότητας ζήτησης σημείου ως προς την τιμή θα εξαρτάται από τις τιμές των άλλων παραγόντων που επηρεάζουν τη ζήτηση και συνεπώς προσδιορίζουν την μορφή της καμπύλης ζήτησης. Ωστόσο, και οι υπόλοιπες ελαστικότητες επίσης θα εξαρτώνται από τις τιμές των υπολοίπων μεταβλητών της συνάρτησης ζήτησης.

ΜΕΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ονομάζουμε μερική ελαστικότητα ως προς x_k μιας οικονομικής συνάρτησης δύο ή τριών μεταβλητών $f(X)$ με Χ=(x_1, x_2) ή Χ=(x_1, x_2, x_3) την

$$\varepsilon_\kappa = \frac{x_k}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων λέγεται ελαστικότητα κλίμακας και συμβολίζεται με Ε$_r$.

Συνάρτηση χρησιμότητας καταναλωτή

Η γενική μορφή της συνάρτησης χρησιμότητας του καταναλωτή είναι $U=f(x_1,x_2,.....,x_n)$ ‘οπου $x_1,x_2,.....,x_n$ αποτελούν ποσότητες διαφορετικών αγαθών που καταναλώνονται.

Σε αντίθεση με το παραγόμενο προϊόν σε μια συνάρτηση παραγωγής, η χρησιμότητα δεν μπορεί να μετρηθεί σε πραγματικού απόλυτους όρους και αυτή η θεωρητική έννοια χρησιμοποιείται μόνο για να κάνουμε γενικές προβλέψεις που σχετίζονται με την συμπεριφορά των οικονομικών δρώντων, για παράδειγμα των καταναλωτών, όπως θα έχετε μάθει στα σχετικά μαθήματα των οικονομικών. Η σύγχρονη οικονομική θεωρία υποθέτει ότι η χρησιμότητα είναι μία σχετική έννοια, δηλαδή ότι διαφορετικοί συνδυασμοί αγαθών μπορούν να αξιολογηθούν και να τους κατατάξουμε με βάση τις προτιμήσεις, αλλά η χρησιμότητα δεν μπορεί να ποσοτικοποιηθεί, σε απόλυτους όρους, με κανέναν τρόπο. Παρόλα αυτά, οι οικονομολόγοι ασχολούνται με την έννοια της απόλυτης χρησιμότητας όπου θεωρείται ότι, υποθετικά τουλάχιστον, κάθε άτομο μπορεί να ποσοτικοποιήσει και να συγκρίνει διαφορετικά επίπεδα χρησιμότητας που λαμβάνει. Αυτή η έννοια της απόλυτης χρησιμότητας χρησιμοποιείται σε αυτήν την ενότητα.

Συνάρτηση χρησιμότητας καταναλωτή

Αν θεωρήσουμε ότι μόνο δύο αγαθά Α και Β καταναλώνονται τότε η συνάρτηση χρησιμότητας θα έχει τη μορφή U=U(A,B). Η οριακή χρησιμότητα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής χρησιμότητας ως προς την αύξηση της κατανάλωσης του ενός αγαθού. Συνεπώς η συνάρτηση οριακής χρησιμότητας των αγαθών Α και Β αντίστοιχα θα είναι

$$\frac{\partial U}{\partial A} = MU_A , \frac{\partial U}{\partial B} = MU_B$$

Θυμίζουμε ότι

1. Ο νόμος της φθίνουσας οριακής χρησιμότητας λέει ότι αν, ceteris paribus, αυξηθεί η ποσότητα που καταναλώνεται από οποιοδήποτε αγαθό, τότε από κάποιο σημείο και μετά η οριακή χρησιμότητα θα μειωθεί.
2. Ένας καταναλωτής θα καταναλώσει ένα αγαθό μέχρι του σημείου όπου η οριακή χρησιμότητα είναι μηδέν εάν το αγαθό είναι ελεύθερο, ή αν πρόκειται για ένα σταθερό ποσό που πρέπει να πληρώσει ο καταναλωτής ανεξάρτητα από την ποσότητα που καταναλώνεται.
3. Ένας καταναλωτής μεγιστοποιεί την ικανοποίησή του όταν κάθε αγαθό καταναλώνεται μέχρι το σημείο όπου μία επιπλέον χρηματική μονάδα που ξοδεύεται για αυτό το αγαθό θα έχει την ίδια χρησιμότητα με μία επιπλέον χρηματική μονάδα που ξοδεύεται για οποιοδήποτε άλλο αγαθό.

Παράδειγμα

Δείτε εάν ισχύει ο νόμος φθίνουσας οριακής χρησιμότητας για τα αγαθά Α και Β στην παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(A,B) = A^{0.6}B^{0.8}$$

Οι μερικές παραγώγοι δίνονται ως εξής:

$$MU_A = \frac{\partial U}{\partial A} = 0.6A^{-0.4}B^{0.8}, MU_B = \frac{\partial U}{\partial B} = 0.8A^{0.4}B^{-0.2}$$

Έτσι η οριακή χρησιμότητα MU_A μειώνεται καθώς αυξάνεται η ποσότητα του Α (όταν το Β είναι σταθερό) και η MU_B μειώνεται καθώς το Β αυξάνεται (όταν η ποσότητα του Α είναι σταθερή). Αφού και οι δύο συναρτήσεις οριακής χρησιμότητας μειώνονται ισχύει ο νόμος φθίνουσας οριακής χρησιμότητας.

Ο Κευνσιανός Πολλαπλασιαστής

Σε ένα κεϋνσιανό μακροοικονομικό σύστημα, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις και τιμές:

$$Y = C + I + G + X - M$$

$$C = 0.8Y_d, M = 0.2Y_d, Y_d = (1-t)Y$$

$$G = 400, t = 0.2, I = 300, X = 288$$

Ποιο είναι το επίπεδο ισορροπίας του Y; Ποια θα πρέπει να είναι η αύξηση στο G ώστε το Y να αυξηθεί στα 2,500; Αν αυτή η αύξηση δαπανών επιτευχθεί τι θα συμβεί στο έλλειμμα/ πλεόνασμα του κρατικού προϋπολογισμού

Ο Κευνσιανός Πολλαπλασιαστής

Πρώτα βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ C και Y. Έτσι: $C = 0.8Y_d = 0.8(1-0.2)Y$

Κατόπιν, αντικαθιστούμε την σχέση (1) και τις άλλες συναρτησιακές σχέσεις και τις δεδομένες τιμές στην λογιστική ταυτότητα για να υπολογίσουμε την τιμή του Y ισορροπίας. Έτσι:

$$Y = C + I + G + X - M = 0.8*(1-0.2)Y + 300 + 400 + 288 + 0.2*(1-0.2)Y$$

Για αυτό το επίπεδο ισορροπίας του Y το συνολικό ποσό των φόρων θα είναι 380, Έτσι το δημοσιονομικό έλλειμμα, πού είναι η διαφορά κρατικών δαπανών και εσόδων από φόρους θα είναι 20, το ποσό που ξοδεύεται για εισαγωγές θα είναι 304 το ισοζύγιο πληρωμών θα υπολογιστεί ως -16. Ο πολλαπλασιαστής των κρατικών δαπανών είναι $\frac{\partial Y}{\partial d} = \frac{1}{0.52}$ Καθώς το Y ισορροπίας είναι 1,900, η αύξηση στο Y που είναι απαραίτητη για να φτάσουμε στο επιδιωκόμενο επίπεδο των 2,500 είναι ΔY=600 και η επίδραση του πολλαπλασιαστή θα είναι ίση με ΔY. Στο νέο επίπεδο εθνικού εισοδήματος το ποσό των φόρων θα είναι tY=0.2*2500=500. Το νέο επίπεδο κρατικών δαπανών που περιλαμβάνει την αύξηση κατά 312 θα είναι 400+312=712 Συνεπώς το δημοσιονομικό έλλειμμα θα είναι 212. Δηλαδή θα υπάρξει μία αύξηση 192 στο έλλειμμα.

Συναρτήσεις Κόστους και Εσόδων

Μερικές επιχειρήσεις παράγουν αρκετά διαφορετικά/διαφοροποιημένα προϊόντα. Όταν χρησιμοποιούνται ίδιες εγκαταστάσεις τα κόστη των προϊόντων αντικατοπτρίζονται στις συναρτήσεις συνολικού κόστους. Οι συναρτήσεις οριακού κόστους μπορούν να προσδιοριστούν με μερική παραγώγιση.

Παράδειγμα

Μία επιχείρηση παράγει δύο αγαθά, σε ποσότητες q_1 και q_2 και αντιμετωπίζει τη συνάρτηση συνολικού κόστους

$$TC = 42 + 125q_1 + 84q_2 - 6q_1^2 q_2^2 + 0.8q_1^3 + 1.2q_2^3$$

Ποιες είναι οι δύο συναρτήσεις οριακού κόστους του κάθε προϊόντος;

Λύση

Το οριακό κόστος είναι ο ρυθμός μεταβολής του TC ως προς τη μεταβολή του κάθε προϊόντος. Συνεπώς

$$MC_1 = 42 + 125q_1 - 12q_1q_2^2 + 2.4q_1^2, MC_2 = 84 - 12q_2q_1^2 + 3.6q_2^2$$

Αυτές οι συναρτήσεις οριακού κόστους δείχνουν ότι το οριακό κόστος του κάθε προϊόντος εξαρτάται από την ποσότητα παραγωγής του άλλου προϊόντος. Μερικές επιχειρήσεις μπορεί να παράγουν διαφορετικά αγαθά τα οποία είναι ανταγωνιστικά στις αγορές ή είναι συμπληρωματικά. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του ενός προϊόντος θα επηρεάσει την ζήτηση των άλλων προϊόντων που πωλούνται από την ίδια επιχείρηση. Το οριακό έσοδο του ενός προϊόντος θα είναι επομένως η μερική παράγωγος του συνολικού εσόδου ως προς το επίπεδο παραγωγής αυτού του προϊόντος, θεωρώντας ότι οι τιμές των άλλων αγαθών είναι σταθερές.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Η συνάρτηση παραγωγής y= $\mathbf{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ εκφράζει έναν κανόνα βέλτιστου μετασχηματισμού των ποσοτήτων $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ των συντελεστών παραγωγής 1,2,…. Ν σε ποσότητες y . Η μερική παράγωγος $\frac{\partial \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ ονομάζεται συνάρτηση οριακού προϊόντος ή οριακής παραγωγικότητας. Ισχύει πάντα ότι

$$\frac{\partial \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} > 0$$

Συνάρτηση Cobb-Douglas

$Q = f(K, L) = AK^{a}L^{\beta}$ με A>0 και α.β∈ (0,1)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Για τα προϊόντα Α, Β των οποίων οι τιμές είναι p_a και p_β θεωρούμε τις συναρτήσεις ζήτησης $Q_A = f(p_A, p_B)$ και $Q_B = g(p_A, p_B)$ τότε

Η $\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}$ εκφράζει την οριακή ζήτηση του Α ως προς την τιμή του Α

Η $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ εκφράζει την οριακή ζήτηση του Α ως προς την τιμή του Β

κ.τ.λ.

Αν $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ και $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A}$ είναι και οι δύο θετικές τότε τα προϊόντα Α, Β είναι υποκατάστατα

Αν $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ και $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A}$ είναι και οι δύο αρνητικές τότε τα προϊόντα Α, Β είναι συμπληρωματικά

Αν $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ και $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A}$ είναι ετερόσημα τότε τα προϊόντα Α, Β είναι δεν είναι ούτε υποκατάστατα ούτε συμπληρωματικά

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

1. Βρείτε τις συναρτήσεις οριακού προϊόντος για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2)$=Α$x_1^a x_2^\beta$ όπου Α>0 , 0< α, β<1 και $x_1 x_2 > 0$.

2. Θεωρήστε τη ειδική συνάρτηση παραγωγής CES που ορίζεται για $x_1 > 0$, $x_2 > 0$:

$$y = f(x_1, x_2) = [0{,}3\, x_1^{-2} + 0.7 x_2^{-2}]^{-1/2}$$

Βρείτε μία έκφραση για τον MRTS και δείξτε ότι οι καμπύλες ισοπαραγωγής είναι αυστηρά κυρτές προς την αρχή των αξόνων.
Δείξτε ότι η f είναι κοίλη.
Δείξτε ότι η f είναι ομογενής και βρείτε τον βαθμό ομογένειας.
Δείξτε ότι το παρακάτω αποτέλεσμα (από το θεώρημα του Euler) ισχύει την f
$f_1 x_1 + f_2 x_2 = k f(x_1, x_2)$όπου k είναι ο βαθμός ομογένειας της f.
Χρησιμοποιήστε για αυτή τη συνάρτηση τον τύπο που δίνεται στον ορισμό 11.9 για να βρείτε την ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ των εισροών.
3. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε η έκφραση $xzdx + yzdy + a(x^2 + y^2)dz$
να είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης και για την τιμή αυτή να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση.

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ E-CLASS
- ΚΕΦΑΛΑΙΟ $10^{Ο}$ ΑΠΟ Ross-Lis
- ΚΕΦΑΛΑΙΑ 14-$15^{Ο}$ Pemberton and Rau
- ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1-2-$3^{Ο}$ ΑΠΟ ΛΟΥΚΑΚΗ (ΤΟΜΟΣ Β)