ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (ΣΔΕ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε αποσπασματικά την θεωρία η οποία καλύπτει τις ενότητες των διαφορικών εξισώσεων που εξετάζουμε στα Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ. Επίσης, θα δοθούν παραδείγματα τα οποία έχουν μαθηματική υπόσταση αλλά και εφαρμογές οι οποίες χρησιμοποιούνται στην Οικονομική επιστήμη. Προφανώς τα παραδείγματα αυτά δεν είναι ικανά για μια επιτυχή εκμάθηση και συνεπώς απαιτείται η ενασχόληση των φοιτητών με σωρεία άλλων ασκήσεων.

Α. Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως θεωρείται χωριζομένων μεταβλητών όταν μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή: $f(x)dx = g(y)dy$ (1). Η λύση των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών είναι αρκετά απλή και προκύπτει μέσω της ολοκλήρωσης. Συνεπώς,

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c \quad (2)$$

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση της μορφής $y^{'}(x) = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}$

ΛΥΣΗ

Ξαναγράφουμε την Δ.Ε μας στην μορφή $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}$ και αναδιατάσσουμε τους όρους κατανοώντας ότι πρόκειται για μια χωριζομένων μεταβλητών Δ.Ε

$dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}\right)dx \Leftrightarrow \int dy = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}\right)dx + c_1$. Συνεπώς,

$y = \ln|x| - \ln|x^3 - c| + c_1 \Leftrightarrow y = \left|\frac{x}{x^3 - c}\right| + c_1$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση της μορφής $x^2 y^{'}(x) = y^2 + 1$

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορει να γραφεί στην μορφή $x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 1$.

Χωρίζοντας τα x με τα y $\frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{dy}{x^2} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{dy}{x^2}$ με λύση $\arctan y = \frac{-1}{x} + c$

Παράδειγμα 3 Να υπολογιστεί η συνάρτηση ζήτησης D(p) αν για την ελαστικότητα της E_d(p) ισχύει: E_d(p)= $\frac{p^2+2p^3}{q^2}$ και η ζήτηση είναι q=20 όταν η τιμή του προϊόντος είναι p=3 .

ΛΥΣΗ

$E_d(p) = \frac{p^2+2p^3}{q^2}$ => $\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^2+2p^3}{q^2}$ => $\frac{dq}{q} \cdot q^2 = dp \cdot \frac{(p^2+3p^3)}{p}$ => qdq = $\frac{p(p+3p^2)}{p}$dp => qdq = p + $3p^2dp$ => $\int qdq = \int pdp + \int 3p^2dp$ => $\frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{2} + p^3 + c_1$ => $q^2 = p^2 + 2p^3$ + c , όπου c = $2c_1$

Για τιμή p=3 και ποσότητα q=20 έχουμε: 400 = 9 + 54 + c => c = 337

Άρα $q^2 = p^2 + 2p^3 + 337$ και p = $\frac{q^2-337}{p+2p^2}$

Παράδειγμα 4

Για τον πληθυσμό P(t) τη χρονική στιγμή t(t σε έτη) των ελαφιών σε ένα πάρκο ισχύει $\frac{dP}{dt}$=0.02P(200-P),t σε έτη.Αν αρχικά στο πάρκο υπάρχουν 20 ελάφια:

i. Να βρεθεί ο αριθμός τους μετά από 10 έτη
ii. Σε πόσα έτη ο πληθυσμός των ελαφιών θα διπλασιαστεί.

ΛΥΣΗ

Ξεκινάμε με την λύση της διαφορικής μας εξίσωσης, $\frac{dP}{dt}$=0.02P(200-P) ⇒ dt [0.02P (200-P)] = dP ⇒dt = $\frac{dP}{0.02P\,(200-P)}$ ⇒ $\int dt = \int \frac{1}{0.02P(200-P)}$dP (1)

Με βάση την σχέση (1) $\int$ dt=t➔$\int \frac{1}{0.02P(200-P)}$dP $= \frac{1}{0.02}\int \frac{1}{P(200-P)}$ dP = 50 $\int \frac{1}{P(200-P)}$dP =50 $\frac{1}{200}\ln\left|\frac{P}{200-P}\right|$+c = $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{P}{200-P}\right|$ +c

Αναλυτική λύση ολοκληρώματος: $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P(200-P)}}\boldsymbol{dP}$ ***:***

$\frac{1}{P(-P+200)} = \frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{(-P+200)}$ ⇔ 1 = α(-P+200) +βP ⇔ 1 = -αP + 200α + βP ⇔

1 = (-α + β)P + 200α $\Leftrightarrow \begin{cases}(-\alpha+\beta)=0\\ 200\alpha = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha = \frac{1}{200}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 0{,}005\\ \beta = 0{,}005\end{cases}$

Επομένως ισχύει ότι : $\frac{1}{P(-P+200)} = \frac{0{,}005}{P} + \frac{0{,}005}{(-P+200)} = \frac{1}{200P} + \frac{1}{200(200-P)}$

Αρά το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int \frac{1}{P(200-P)}$dP = $\int (\frac{1}{200P} + \frac{1}{200(200-P)})$ dP = $\frac{1}{200}$($\int \frac{1}{P}$ dP + $\int \frac{1}{200-P}$ dP) = $\frac{1}{200}$ (ln|P| - ln|200 − P|) +c = $\frac{1}{200}\ln\left|\frac{P}{200-P}\right|$ +c

Επομένως η (1) γίνεται: t = $\frac{1}{4}$ ln $\left|\frac{P}{200-P}\right|$ + c⇒ 4t = ln $\left|\frac{P}{200-P}\right|$ $+c_1 \Rightarrow e^{4t} = \frac{P}{200-P} + c \Rightarrow e^{4t}$(200-P) = $P\ + c$ ⇒200e^{4t}- Pe^{4t}= P+ c ⇒ P ($e^{4t}+1$) = 200$e^{4t} - c$ ⇒ P = $\frac{200e^{4t}}{e^{4t}+1}$ - c

Με P∈ $[0,200]$ $και\ c = e^{c_1}$

Ξέρω ότι : P(0) = 20 ⇔ 20 =$\frac{200e^0}{e^0+1}$ - c ⇔ 20=$\frac{200}{2}$ −c ⇔ $c = 80$ Επομένως P(t)= $\frac{200e^{4t}}{e^{4t}+1} - 80$

Συνεπώς,

i. Για t=10 : P(10)= $\frac{200e^{40}}{e^{40}+1} - 80$ =120

ii. P(t) =40 : 40= $\frac{200e^{4t}}{e^{4t}+1} - 80 \Leftrightarrow 120 = \frac{200e^{4t}}{e^{4t}+1} \Leftrightarrow \frac{6}{10} = \frac{e^{4t}}{e^{4t}+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6e^{4t} + 6 = 10e^{4t} \Leftrightarrow 4e^{4t} = 6 \Leftrightarrow e^{4t} = 1{,}5 \Leftrightarrow 4t = \ln(1{,}5) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(1{,}5)}{4} = 0{,}102$$

Ο πληθυσμός P θα διπλασιαστεί σε : $t = \frac{\ln(1{,}5)}{4} = 0{,}102$

Παράδειγμα 5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση της μορφής $y'(x) = e^{3x-2y(x)}$ $και\ \ y(0) = 1$

ΛΥΣΗ

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης δίνεται παρακάτω ως εξής:

$y' = e^{3x-2y} \Leftrightarrow y' = e^{3x} \cdot e^{-2y} \Leftrightarrow e^{2y}y' = e^{3x} \Leftrightarrow e^{2y}\frac{dy}{dx} = e^{3x} \Leftrightarrow$

$e^{2y}dy = e^{3x}dx \Leftrightarrow \int e^{2y}dy = \int e^{3x}dx \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{3x}}{3} + c \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{2}{3}e^{3x} + c \Leftrightarrow$

$2y = ln\left(\frac{2}{3}e^{3x} + c\right) \Leftrightarrow y = \frac{ln\left(\frac{2}{3}e^{3x}+c\right)}{2}$ $(γενική\ λύση)$ Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε και την συνθήκη που μας δίνεται απο την άσκηση. Με βάση αυτήν:

$y(0) = 1 \Leftrightarrow e^2 = \frac{2}{3}e + c \Leftrightarrow c = e^2 - \frac{2}{3}$ άρα $y = \frac{ln\left(\frac{2}{3}e^{3x}+e^2-\frac{2}{3}\right)}{2}$

Παράδειγμα 6 Σε μία ιδανικά ανταγωνιστική αγορά οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης ενός προϊόντος είναι $q_s = 4p - 10\ \ και\ \ q_d = 170 - 8p$ όπου p η τιμή του προϊόντος και ισχύει $\frac{dp}{dt} = \frac{q_d - q_s}{2}$.Να υπολογίσετε την τιμή.

ΛΥΣΗ

Με βάση την ισορροπία θα έχουμε

$\left.\begin{matrix} q_s = 4p - 10 \\ q_d = 170 - 8p \end{matrix}\right\}$ $\mu\varepsilon\ \frac{dp}{dt} = \frac{q_d - q_s}{2}$ $, p = 10 \Leftrightarrow p(0) = 10\ (\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\ \tau\iota\mu\acute{\eta})$. Αρα,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{170 - 8p - 4p + 10}{2} = \frac{180 - 12p}{2} = 90 - 6p, \frac{dp}{90 - 6p} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dp}{90 - 6p} = \int dt \Leftrightarrow \frac{ln|90 - 6p|}{-6} = t + c \Leftrightarrow$$

Η λύση θα δίνεται παρακάτω ως εξής:

$$\ln|90 - 6\mathrm{p}| = -6\mathrm{t} - 6\mathrm{c} \Leftrightarrow 90 - 6\mathrm{p} = \mathrm{e}^{-6\mathrm{t}+\mathrm{c}} \Leftrightarrow 90 - 6\mathrm{p} = \mathrm{e}^{-6\mathrm{t}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow$$

$$-6\mathrm{p} = \mathrm{c}\mathrm{e}^{-6\mathrm{t}} - 90 \Leftrightarrow \mathrm{p} = \frac{\mathrm{c}}{-6}\mathrm{e}^{-6\mathrm{t}} - \frac{90}{-6} \Leftrightarrow \mathrm{p} = \mathrm{c}\mathrm{e}^{-6\mathrm{t}} + 15$$

Β. Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

Οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως έχουν την μορφή $y^{'}(x) = f(x, y)$ με την συνάρτησης $f(x, y)$ να ικανοποιεί την συνθήκη $f(tx, ty) = f(x, y),\ \forall t > 0$. Ας δούμε στα παρακάτω παραδείγματα με ποιον τρόπο, αφού ταυτοποιήσουμε ότι όντως έχουμε μια ομογενη Σ.Δ.Ε θα προχωρήσουμε στην λύση της.

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση της μορφής $y^{'}(x) = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε πρώτα εάν η ΣΔΕ είναι ομογενής. Για κάθε λ>0 έχουμε

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3}{\lambda x(\lambda y)^2} = \frac{\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3}{\lambda^3 xy^2} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = f(x, y)$$

Συνεπώς είναι ομογενής. Για την λύση της ομογενούς θεωρούμε την εξής αντικατάσταση: $y = ux$. Η ΣΔΕ μας τώρα έχει την εξής μορφή:

$$(ux)^{'} = \frac{x^3 + (ux)^3}{x(ux)^2} \Rightarrow u^{'}x + u1 = \frac{x^3\left(1 + u^3\right)}{x^3u^2} \Leftrightarrow u^{'}x + u = \frac{\left(1 + u^3\right)}{u^2} \Leftrightarrow$$

$$u^{'}x = \frac{\left(1 + u^3\right)}{u^2} - u \Leftrightarrow u^{'}x = \frac{1}{u^2}$$

Παρακαλώ παρατηρήστε τώρα ότι η διαφορική μας εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών. Συνεπώς,

$\frac{du}{dx}x=\frac{1}{u^2}\Leftrightarrow u^2du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int u^2du=\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{3}u^3=\ln|x|+c$. Ωστόσο τώρα θα πρέπει να επιστρέψουμε στην αντικατάσταση και στην αλλαγή μεταβλητής που έχουμε κάνει.

Συνεπώς, $\frac{1}{3}u^3=\ln|x|+c\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3=\ln|x|+c\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{3x^3\left(\ln|x|+c\right)}$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση της μορφής $2xydx+\left(y^2-x^2\right)dy=0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι είναι της μορφής $f(x,y)dx+g\left(x,y\right)dy=0$. Η συγκεκριμένη αυτή μορφή αποτελεί μια ομογενής συνάρτηση. Ας εξετάσουμε όπως παραπάνω εάν ισχύει η συνθήκη. Παρατηρούμε ότι με βάση την συνθήκη $f(x,y)=\lambda^2f(x,y),g\left(x,y\right)=\lambda^2g(x,y)$. Αρα πρόκειται για ομογενή αλλά δευτέρου βαθμού. Συνεπώς θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια αντικατάσταση. Μεγάλη προσοχή πρέπει να δοθεί στον υπολογισμό του διαφορικού καθώς $dy=xdu+udx$. Αρα,

$$2xxudx+\left(x^2u^2-x^2\right)(xdu+udx)=0\Leftrightarrow 2x^2udx+x^3u^2du+x^2u^3dx-x^3du-x^2udx\Leftrightarrow$$
$$\left(2x^2u+x^2u^3-x^2u\right)dx+\left(x^3u^2-x^3\right)du=0\Leftrightarrow x^2u(u+1)dx=-x^3\left(u^2-1\right)du$$

Συνεπώς προκειται πάλι για μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών η οποία κάνοντας πράξεις:

$$\frac{-1}{x}dx=\frac{u-1}{u}du\Leftrightarrow\int\frac{-1}{x}dx=\int\frac{u-1}{u}du\Leftrightarrow-\ln|x|=u-\ln|u|+c\Leftrightarrow$$
$$\ln\left|\frac{u}{x}\right|-u=c\Leftrightarrow\ln\left|\frac{y}{x^2}\right|-\frac{y}{x}=c$$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση της μορφής $\acute{y}=\frac{ye^x}{e^{2x+1}}\quad \mu\varepsilon\quad y(0)=1$

ΛΥΣΗ

Όπως και πριν μετασχηματίζουμε την διαφορική μας και εξετάζουμε εάν είναι ομογενής. $\acute{y}=\frac{ye^x}{e^{2x+1}}\leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{ye^x}{e^{2x+1}}\leftrightarrow(e^{2x}+1)dy-(ye^x)dx=0$

Άρα είναι ομογενής

Έστω $y=ux\rightarrow\acute{y}=(\acute{ux})\leftrightarrow=\acute{u}x+u\quad(1)$

$$\acute{y} = \frac{ye^x}{e^{2x}+1} \xleftrightarrow{y=ux} \acute{u}x + u = \frac{uxe^x}{e^{2x}+1} \xleftrightarrow{y\neq 0, x\neq 0} \frac{\acute{u}}{u} + \frac{1}{x} = \frac{e^x}{e^{2x}+1} \leftrightarrow \frac{1}{u}\frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{e^x}{e^{2x}+1} - \frac{1}{x} \leftrightarrow \frac{1}{u}dy = \left(\frac{e^x}{e^{2x}+1} - \frac{1}{x}\right)dx \leftrightarrow \int \frac{1}{u}dy$$
$$= \int \left(\frac{e^x}{e^{2x}+1} - \frac{1}{x}\right)dx \leftrightarrow \ln|u| = \int \left(\frac{e^x}{e^{2x}+1}\right)dx - \int \left(\frac{1}{x}\right)dx \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τώρα τα ολοκληρώματα:

$$\int \left(\frac{e^x}{e^{2x}+1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{w^2+1}\right)dw = \int \left(\left(\frac{1}{\tan\theta^2+1}\right)\frac{1}{\cos\theta^2}\right)d\theta =$$

Θέτω $e^x = w \leftrightarrow e^x dx = dw$ Θέτω $w = \tan\theta \leftrightarrow dw = \frac{1}{\cos\theta^2}d\theta$

$$= \int \left(\left(\frac{1}{\frac{\sin\theta^2}{\cos\theta^2}+1}\right)\frac{1}{\cos\theta^2}\right)d\theta = \int \left(\left(\frac{1}{\frac{\sin\theta^2}{\cos\theta^2}+\frac{\cos\theta^2}{\cos\theta^2}}\right)\frac{1}{\cos\theta^2}\right)d\theta$$
$$= \int \left(\left(\frac{1}{\frac{\sin\theta^2+\cos\theta^2}{\cos\theta^2}}\right)\frac{1}{\cos\theta^2}\right)d\theta = \int \left(\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos\theta^2}}\right)\frac{1}{\cos\theta^2}\right)d\theta$$
$$= \int \left(\cos\theta^2 \frac{1}{\cos\theta^2}\right)d\theta = \int (1)\,d\theta = [\theta + c_1] \quad (3)$$

Απο την σχέση (2) με την βοήθεια της σχέσης (3) θα έχουμε ότι

$$\ln|u| = [x + c_1] - \int \left(\frac{1}{x}\right)dx \leftrightarrow \ln|u| = [x + c_1] - [\ln|x| + c_2] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \ln|u| = x + c_1 - \ln|x| - c_2 \leftrightarrow \ln|u| = x - \ln|x| + c_3 \leftrightarrow$$

Έστω$c_1 - c_2 = c_3$

$$e^{\ln|u|} = e^{x - \ln|x| + c_3} \leftrightarrow |u| = \frac{e^{x+c_3}}{|x|} \leftrightarrow u = \pm\frac{e^{x+c_3}}{|x|} \quad (4)$$

Απο την σχέση (1) με την βοήθεια της σχέσης (4) θα έχουμε ότι $y = x\left(\pm\frac{e^{x+c_3}}{|x|}\right)$

1) Αν x>0 τότε :

Για $y = x\left(\frac{e^{x+c_3}}{|x|}\right) \leftrightarrow y = x\left(\frac{e^{x+c_3}}{x}\right) \leftrightarrow y = e^{x+c_3}, y(x) = e^{x+c_3}$

Οπότε σύμφωνα με την σχέση y(0)=1

Έχουμε : $y(0) = e^{0+c_3} \leftrightarrow 1 = e^{c_3} \leftrightarrow \ln 1 = \ln e^{c_3} \leftrightarrow c_3 = \ln e^0 \leftrightarrow c_3 = 0$

Οπότε η συνάρτηση είναι : $y(x) = e^{x+c_3}$

Για $y = -x\left(\frac{e^{x+c_3}}{|x|}\right) \leftrightarrow y = -x\left(\frac{e^{x+c_3}}{x}\right) \leftrightarrow y = -e^{x+c_3}$

$$y(x) = -e^{x+c_3}$$

Οπότε σύμφωνα με την σχέση y(0)=1. Έχουμε : $y(0) = -e^{0+c_3} \leftrightarrow 1 = -e^{c_3} \leftrightarrow$ $\ln 1 = \ln e^{-c_3} \leftrightarrow -c_3 = \ln e^0 \leftrightarrow c_3 = 0$. Οπότε, η συνάρτηση είναι : $y(x) = -e^{x+c_3}$

2) Εάν x<0 τότε :

Για $y = x\left(\frac{e^{x+c_3}}{|x|}\right) \leftrightarrow y = x\left(\frac{e^{x+c_3}}{-x}\right) \leftrightarrow y = -e^{x+c_3}$

$$y(x) = -e^{x+c_3}$$

Οπότε σύμφωνα με την σχέση y(0)=1. Έχουμε : $y(0) = -e^{0+c_3} \leftrightarrow 1 = -e^{c_3} \leftrightarrow$ $\ln 1 = \ln e^{-c_3} \leftrightarrow -c_3 = \ln e^0 \leftrightarrow c_3 = 0$. Οπότε η συνάρτηση είναι : $y(x) = -e^{x+c_3}$

Για $y = -x\left(\frac{e^{x+c_3}}{|x|}\right) \leftrightarrow y = -x\left(\frac{e^{x+c_3}}{-x}\right) \leftrightarrow y = e^{x+c_3}$, $y(x) = e^{x+c_3}$

Οπότε σύμφωνα με την σχέση y(0)=1. Έχουμε : $y(0) = e^{0+c_3} \leftrightarrow 1 = e^{c_3} \leftrightarrow \ln 1 = \ln e^{c_3} \leftrightarrow c_3 = \ln e^0 \leftrightarrow c_3 = 0$ Οπότε η συνάρτηση είναι : $y(x) = e^{x+c_3}$

Γ. Διαφορικές Εξισώσεις Γραμμικές 1ης Τάξεως

Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η παρακάτω:

$$y'(x) + A(x)y(x) = B(x)$$

Η γενικής λύση της παραπάνω γραμμικής 1ης τάξης Δ.Ε είναι η εξής:

$$y(x) = e^{-\int A(x)dx}\left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right]$$

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση $y' - 2xy = x$

ΛΥΣΗ

Βασικό μας ζήτημα στις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι γραμμικές πρώτης τάξεως είναι να κατανοήσουμε ένα έχουν την μορφή που αναφέραμε. Στην περιπτωσή μας αυτό ισχύει με $A(x) = -2x, B(x) = x$. Συνεπώς,

$$y(x) = e^{-\int A(x)dx}\left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right] = e^{-\int -2xdx}\left[c + \int xe^{\int -2xdx}dx\right] = e^{\int 2xdx}\left[c + \int xe^{\int -2xdx}dx\right]$$

Αρα θα πρέπει να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα που έχεουν προκύψει. Θα έχουμε,

$$y(x)=e^{\int 2xdx}\left[c+\int xe^{\int -2xdx}dx\right]=e^{x^2}\left[c+\int xe^{x^2}dx\right]=e^{x^2}\left[c+\frac{1}{2}\int -2xe^{x^2}dx\right]=$$
$$e^{x^2}\left(e^{-x^2}-c\right)=1-xe^{x^2}$$

Αρα η λύση $y(x)=1-xe^{x^2}$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'x+\left(2x+1\right)y=xe^{-2x}, x>0$:

ΛΥΣΗ

Διαιρούμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση με x. Οπότε y' + (2 + $\frac{1}{x}$)y = e^{-2x}

Συνεπώς πρόκειται για γραμμική πρώτης τάξης μορφής. Άρα η λύση δίνεται από:
y(x) = $e^{-\int A(x)dx}\left[c+\int B(x)\,e^{\int A(x)dx}\,dx\right]=e^{-\int 2+\frac{1}{x}dx}$[c + $\int e^{-2x}\cdot e^{\int 2+\frac{1}{x}dx}$dx]
=> y(x) = $e^{-(2x+lnx)}$[c + $\int e^{-2x}\cdot e^{(2x+lnx)}$ dx] => y(x) = $e^{-(2x+lnx)}$[c + $\int e^{lnx}dx$]
=> y(x) = $e^{-(2x+lnx)}$[c + $\int xdx$] => y(x) = $e^{-(2x+lnx)}$[c + $\frac{x^2}{2}$]

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'(x)+4x^{-1}y-x^4=0$

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμικής 1ης τάξεως. Η λύση της είναι η εξής:

$$y(x)=e^{-\int A(x)dx}\left[c+\int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right]=e^{-\int\frac{4}{x}dx}\left[c+\int x^4e^{\int\frac{4}{x}dx}dx\right]=e^{-4\ln x}\left[c+\int x^4e^{4\ln x}dx\right]=$$
$$=e^{\ln x^{-4}}\left[c+\int x^4e^{\ln x^4}dx\right]=x^{-4}\left[c+\int x^4x^4dx\right]=\frac{1}{x^4}\left[c+\int x^8dx\right]=(\frac{x^9}{9}+c\frac{1}{x^4})$$

Δ. Διαφορική Εξίσωση Bernoulli

Η διαφορική εξίσωση του Bernoulli έχει την ακόλουθη μορφή $y'(x)+A(x)y(x)=y^{\alpha}(x)B(x), a\neq 0,1$. Βασικό της χαρακτηριστικό είναι η ύπαρξη δύναμης της συνάρτησης y(x). Προφανώς στην περίπτωση όπου a=0 μιλάμε για την περίπτωση μιας ΣΔΕ γραμμικής πρώτης τάξης ενώ εάν a=1 οδηγούμαστε στην περίπτωση μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών. Για την επίλυση μια ΣΔΕ τύπου Bernulli μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξής αντικατάσταση $y(x)=u^{\frac{1}{1-a}}$

Εναλλακτικά μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με $y^{-a}(x)$ και να πάρουμε $y' y^{-a} + A(x)yy^{-a} + B(x)y^{a}y^{-a} = 0$

'Επειτα θέτουμε $y^{1-a} = w \Leftrightarrow \left(y^{1-a}\right)' = \left(w\right)' \Leftrightarrow (1-a)y^{-a}y' = w'$ και η ΣΔΕ μετατρέπεται σε

$\frac{w'}{1-a} + Aw = B,$ η οποία είναι γραμμική

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'(x) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

ΛΥΣΗ

Πραγματοποιώντας πράξεις προσπαθούμε να καταλάβουμε τι τύπου ΣΔΕ έχουμε. Συνεπώς,

$$y'(x) = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Leftrightarrow y'(x)2xy = y^2 - x^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1} \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{x}{2}y^{-1}$$

Αρα πρόκειται για ΣΔΕ Bernoulli. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με y^{-1} και μετά χρησιμοποιούμε την εξής αντικατάσταση $w(x) = y^2(x)$ έχοντας ότι $w'(x) = 2y'(x)y(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}w' = y'y$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει μια γραμμική 1ης τάξης διαφορική εξίσωση της μορφής: $w'(x) - \frac{1}{x}w(x) = -x$ με $A(x) = -1/x, B(x) = -x$. Συνεπώς,

$$w(x) = e^{-\int A(x)dx}\left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right] = e^{-\int -1/x\, xdx}\left[c + \int -xe^{\int -1/x\, dx}dx\right] = e^{\int 2xdx}\left[c + \int xe^{\int -2xdx}dx\right] =$$

$$e^{\ln x}\left[c - \int xe^{-\ln x}\,dx\right] = x\left[c - \int xe^{-\ln x^{-1}}dx\right] = x\left[c - \int x\frac{1}{x}dx\right] = x\left[c - \int dx\right] = x(c-x)$$

Συνεπώς, $y^2(x) = x(c-x) \Leftrightarrow y^2(x) = xc - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{xc - x^2}$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'(x) - \frac{1}{x}y = y^3$

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι καθαρά μια Bernoulli με a=3. Θεωρούμε την εξής αντικατάσταση $y(x) = u^{\frac{1}{1-3}} = u^{-\frac{1}{2}}$. Όπως είδαμε με την αντικατάσταση αυτήν θα μετατρέψουμε την διαφορική μας εξίσωση σε μια γραμμική 1ης τάξεως ΣΔΕ. Εκφράζουμε τώρα την παράγωγο της y(x) σε σχέση με την παράγωγο της u(x). Δηλαδή, $y^{'}(x) = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u^{'}$. Με αντικατάσταση τώρα της παραγώγου αλλά της ιδίας της u(x) θα έχουμε $-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u^{'} - \frac{1}{x}u^{-\frac{1}{2}} = \left(u^{-\frac{1}{2}}\right)^{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u^{'} - \frac{1}{x}u = 1 \Leftrightarrow u^{'} + 2x^{-1}u = -2$ η οποία είναι μια γραμμική 1ης τάξεως ΣΔΕ. Η λύση της τώρα είναι η εξής:

$$u(x) = e^{-\int A(x)dx}\left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right] = ... = cx^{-2} - \frac{2}{3}x .$$

Αρα η λύση $y(x) = \left(cx^{-2} - \frac{2}{3}x\right)^{-\frac{1}{2}}$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'(x) = y(x) + e^{x}\sqrt{y}$

ΛΥΣΗ

Αναδιατάσσοντας όρους της διαφορικής αυτής έχουμε ότι $y'(x) - y(x) = e^{x}\sqrt{y}$ συνεπώς μιλάμε για διαφορική εξίσωση τύπου Bernoulli. Πολλαπλασιάζουμε με την κατάλληλη ποσότητα και ακολουθούμε όσα έχουν διατυπωθεί προηγουμένως. Αρα,

$y'(x)y^{-1/2} - y(x)y^{-1/2} = e^{x}\sqrt{y}y^{-1/2} \Leftrightarrow y'y^{-1/2} - y^{1/2} = e^{x}$. Με αντικατάσταση τώρα $w = y^{1/2}$ και $w'(x) = \frac{1}{2}y^{-1/2}y' \Leftrightarrow 2w'(x) = y^{-1/2}y'$ έχουμε ότι,

$2w'(x) - w = e^{x} \Leftrightarrow w' - \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}e^{x}$ η οποία είναι μια γραμμικής πρώτης τάξεως. Η λύση αυτής,

$$u(x) = ex^{-\int A(x)dx}\left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right] = e^{-\int \frac{-1}{2}dx}\left[c + \int \frac{1}{2}e^{x}e^{\int \frac{-1}{2}dx}dx\right] = e^{\frac{1}{2}x}\left[c + \int \frac{1}{2}e^{x}e^{\frac{-1}{2}x}dx\right] =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x}\left[\int \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}dx + c\right] = e^{\frac{1}{2}x}\left(e^{\frac{1}{2}x} + c\right) = e^{x} + ce^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow y^{\frac{1}{2}x} = e^{x} + ce^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow$$

$$y = \left(e^{x} + ce^{\frac{1}{2}x}\right)^{2}$$

Δ. Αμεσα ολοκληρώσιμες ΣΔΕ-Ο πολλαπλασιαστής του Euler

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ θα καλείται άμεση ολοκληρώσιμη όταν ισχύει ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\left(x^2+2xy\right)dx+\left(x^2+y\right)dy=0$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

Εξετάζουμε εάν είναι ολοκληρώσιμη δηλαδή εάν ισχύει ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$.

Για την εύρεση της λύσης αναζητούμε μια συνάρτηση f(x,y) έτσι ώστε:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}2=P(x,y)\Rightarrow\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x^2+2xy$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)\Rightarrow\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2+y$$

Προκύπτει οτι πρόβλημα προσδιορισμού της συνάρτησης f(x,y) όταν είναι γνωστές οι μερικές παράγωγοι αυτής. Για την λύση έχουμε

$f(x,y)=\int\left(x^2+2xy\right)dx+c(y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y+c(y)$, οπότε,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{3}x^3+x^2y+c(y)\right)}{\partial y}=x^2+y\Leftrightarrow x^2+c^{'}(y)=x^2+y\Rightarrow c^{'}(y)=y\Rightarrow c(y)=\frac{1}{2}y^2+k$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω παράστασης στην σχέση

$f(x,y)=\int x^2+2xy+c(y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y+c(y)$ έχουμε την γενική λύση ως εξής:

$$f(x,y)=c_1\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3+x^2y+\frac{1}{2}y^2+k=c_1\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{3}x^3+x^2y+\frac{1}{2}y=c_2,c_2=c_1-k$$

Στην περίπτωση την μη άμεσα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων δηλαδή σε ΣΔΕ της μορφής $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ οι οποίες δεν είναι ακριβείς αναζητούμε μια κατάλληλη συνάρτηση μ(x,y) την οποία εάν την πολλαπλασιάσουμε με την δοσμένη ΣΔΕ να μετατραπεί σε ακριβείς

Δηλαδή να ισχύει $P(x,y)\mu(x,y)dx+Q(x,y)\mu(x,y)dy=0$ και να ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)P(x,y)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\mu(x,y)Q(x,y)\right]}{\partial x}$$

Προφανώς η εύρεση της συγκεκριμένης συνάρτησης που καλείται πολλαπλασιαστής Euler δεν είναι μια εύκολη διαδικασία ιδιαίτερα στην περίπτωση ΣΔΕ με κάποια δυσκολία. Ας εξετάσουμε ωστόσο ένα σχετικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\left(y^2+x\right)dx-2xydy=0$ εάν είναι γνωστό ότι έχει πολλαπλασιαστή Euler ο οποίος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x.

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε εάν είναι ολοκληρώσιμη δηλαδή εάν ισχύει ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}=2y,\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}=-2y$ συνεπώς δεν είναι άμεσα ολοκληρώσιμη. Γνωρίζουμε όμως ότι η παραπάνω ΣΔΕ γνωστό έχει πολλαπλασιαστή Euler ο οποίος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x. Άρα θα πρέπει να ισχύει ότι η παρακάτω διαφορική εξίσωση $P(x,y)\mu(x,y)dx+Q(x,y)\mu(x,y)dy=0$ είναι ακριβής. Συνεπώς,

$$\frac{\partial\left[\mu(x)\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x}=\frac{\partial\left[\mu(x)(-2xy)\right]}{\partial y}\Leftrightarrow 2y\mu(x)=\mu'(x)(-2xy)+(-2y)\mu(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\mu(x)=-x\mu'(x)$$

Η παραπάνω είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών με λύση:

$$2\mu(x)=-x\mu'(x)\Leftrightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-2}{x}dx\Leftrightarrow\ln|\mu|=-2\ln|x|\Leftrightarrow$$

$$\mu(x)=x^{-2}$$

Αρα η συνάρτησή μας είναι η εξής:

$$x^{-2}\left(y^2+x\right)dx - x^{-2}2xydy = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$$

Ας περάσουμε τώρα στην λύση αυτής. Για την λύση ζητάμε μια συνάρτηση f(x,y):

$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = \frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}, \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = 2\frac{y}{x}$. Θεωρούμε την δεύτερη απο αυτές και ολοκληρώνουμε ως προς y κρατώντας το x σταθερό οπότε,

$$\frac{\partial\left(-\frac{y^2}{x^2}+c(x)\right)}{\partial x} = \frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2}+c^{'}(x) = \frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$c^{'}(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow c(x) = \ln|x| + c_1$$

Αρα, $f\left(x,y\right) = -\frac{y^2}{x^2}+\ln|x|+c_1$ και η γενική λύση της ΣΔΕ είναι

$$f\left(x,y\right) = c_2 \Leftrightarrow -\frac{y^2}{x^2}+\ln|x|+c_1 = c_2 \Leftrightarrow -\frac{y^2}{x^2}+\ln|x| = c_2 - c_1$$

Ε. Διαφορική Εξισώση Riccatti

Μια Riccatti διαφορική εξίσωση έχει την μορφή

$$y'(x)+A(x)+B(x)y(x)+\Gamma(x)y^2(x) = 0$$

Για την λύση αυτής υποθέτουμε μια λύση της ΔΕ y=y1 . Η μερική λύση αυτή θα επαληθεύει την ΔΕ και άρα θα έχουμε ότι

$$y_1'(x)+A(x)+B(x)y_1(x)+\Gamma(x)y_1^{\,2}(x) = 0$$

Θεωρούμε τον εξής μετασχηματισμό

$$y' = y_1' + w^{'} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}+\frac{dw}{dx} \quad (2)$$

Άρα η ΔΕ Riccati θα εκφραστεί ως εξής:

$$y_1^{'} + w' + A(x) + B(x)(y_1 + w) + \Gamma(x)(y_1^{\,2} + w^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$y_1^{'} + w' + A(x) + B(x)y_1 + B(x)w + \Gamma(x)y_1^{\,2} + \Gamma(x)w^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y_1^{'} + A(x) + B(x)y_1 + \Gamma(x)y_1^{\,2} + w' + B(x)w + \Gamma(x)w^2 = 0$$

Λόγω της (2) θα έχουμε $w' + B(x)w + \Gamma(x)w^2 = 0$ ότι η οποία είναι μια Bernoulli με εξαρτημένη τώρα την μεταβλητή w και λύνεται όπως έχουμε περιγράψει σε προηγούμενα μαθήματα.

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' + (1-x) + \frac{2(x-1)}{x}y - \frac{y^2}{x} = 0$ γνωρίζοντας ότι έχει ως μερική λύση την $y_1=x$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τώρα τον εξής μετασχηματισμό $y = y_1 + \frac{1}{w} \Leftrightarrow y' = y'_1 - \frac{w'}{w^2}$ (1)

Τώρα θα έχουμε ότι

$$y_1' - \frac{w'}{w^2} + (1-x) + \frac{2(x-1)}{x}\left(y_1 + \frac{1}{w}\right) - \frac{1}{x}\left(y_1 + \frac{1}{w}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y_1' + (1-x) + \frac{2(x-1)}{x}y_1 - \frac{1}{x}y_1^2 - \frac{w'}{w^2} + \frac{2(x-1)}{x} - \frac{2}{x}y_1\frac{1}{w} - \frac{1}{x}\frac{1}{w^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{w'}{w^2} + \frac{2(x-1)}{x} - \frac{2}{x}y_1\frac{1}{w} - \frac{1}{x}\frac{1}{w^2} = 0$$

Οπότε, $-\frac{w'}{w^2} + \frac{2(x-1)}{x} - \frac{2}{x}y_1\frac{1}{w} - \frac{1}{x}\frac{1}{w^2} = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -w' - \frac{2}{x}w = -\frac{1}{x}$ (2) .Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική συνεπώς:

$$w = e^{\int -\frac{2}{x}dx}\left[c - \int \frac{1}{x}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right] = e^{-\ln x^2}\left[c - \int \frac{1}{x}e^{\ln x^2}dx\right] = ... = \frac{1}{x^2}\left[c - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{2c - x^2}{2x^2}$$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = e^{2x} + y + \frac{5}{2}e^x y + y^2$

ΛΥΣΗ

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \,, y_1 = -\frac{1}{2}e^x$$

Πρόκειται για διαφορική εξίσωση του Riccatti

Θέτω $\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 + \frac{1}{\mathrm{z}} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{z}}$

$y^2 = \left(-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2x} - e^x\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

$y' = \left(-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{2}e^x - \frac{z'}{z^2}$

Αντικατάσταση στην σχέση (1)

$$-\frac{1}{2}e^x - \frac{z'}{z^2} = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)\left(-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{4}e^{2x} - e^x\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}e^x - \frac{z'}{z^2} = e^{2x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{z} - \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{5}{2}e^x\frac{1}{z} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{z}e^x + \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{3}{2}e^x \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{3}{2}e^x \cdot z - z - 1 \Leftrightarrow$$

$$z' + \left(\frac{3}{2}e^x + 1\right)z = -1 \ \ (2)\ (\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\eta})$$

$$\int \left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 1\right)\mathrm{dx} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}$$

$$\mathrm{e}^{\int\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1\right)\mathrm{dx}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\mathrm{x}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

Πολλαπλασιάζω τη σχέση (2) με $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ και γίνεται

$$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \cdot z' + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 1\right)z = -\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \Leftrightarrow$$

$$\left[\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \cdot \mathrm{z}\right]' = -\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \cdot \mathrm{z} = -\int e^x \cdot e^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}dx \ \ (3)$$

$$\theta\acute{\epsilon}\tau\omega\ \ u = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{du} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx = \frac{2}{3}du$$

άρα το ολοκλήρωμα $-\int e^x \cdot e^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}dx$ γίνεται

$$\int \frac{2}{3} e^{u} du = \frac{2}{3} e^{u} + c = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{4} e^{x}} + c$$

Τότε η σχέση (3) γίνεται

$$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x}} \cdot \mathrm{e}^{x} \cdot z = -\frac{2}{3} e^{\frac{3}{4} e^{x}} + c \Rightarrow z = -\frac{2}{3} e^{-x} + c e^{-x} e^{-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x}} \Rightarrow$$

$$z = -e^{-x}\left(\frac{2}{3} - c e^{-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x}}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{-e^{-x}\left(\frac{2}{3} - c e^{-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x}}\right)}$$

Ζ. Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξεως

Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι η παρακάτω: $y^{n}(x) + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{o} y = 0 \Leftrightarrow y'' + a_{1} y' + a_{o} y = 0$. Για την επίλυση της συγκεκριμένης Δ.Ε δοκιμάζουμε την λύση της μορφής $y = e^{\lambda t}$. Άρα θα έχουμε

$\lambda^{2} e^{\lambda t} + \alpha_{1} \lambda e^{\lambda t} + \alpha_{2} e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t}\left(\lambda^{2} + \alpha_{1} \lambda + \alpha_{2}\right) = 0$ με

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_{1} \pm \sqrt{\alpha_{1} - 4\alpha_{2}^{2}}}{2}$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις Δ>0, Δ<0, Δ=0.

1) Πρώτη Περίπτωση όπου Δ>0

Έχουμε δύο πραγματικές ρίζες $e^{\lambda_{1} t}, e^{\lambda_{2} t}$ με γενική λύση $y_{t} = A_{1} e^{\lambda_{1} t} + A_{2} e^{\lambda_{2} t}$

2) Δεύτερη Περίπτωση όπου Δ=0

Έχουμε διπλή πραγματική ρίζα $\mu = \frac{-a_{1}}{2}$ και η $y_{t} = e^{\mu t}$ λύση της Δ.Ε. Θα έχουμε

$2\mu e^{\mu t} + \mu^{2} t e^{\mu t} + a_{1}\left(e^{\mu t} + \mu t e^{\mu t}\right) + a_{2} t e^{\mu t} = \left(2\mu + a_{1}\right) e^{\mu t} + \left(\mu^{2} + 2\mu a_{1} + a_{2}\right) e^{\mu t}$, με γενική λύση $y = e^{\mu t}\left(A_{1} + A_{2} t\right)$.

3) Τρίτη Περίπτωση όπου Δ<0

Έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές $\lambda_{1,2} = u \pm iv, u = \frac{-a_{1}}{2}, v = \frac{\sqrt{4a_{2} - a_{1}^{2}}}{2}$, και γενική λύση $y(t) = A_{1}' e^{(u+vi)t} + A_{2}' e^{(u-vi)t}$

$$y = e^{ut}\left(A_1\cos(vt) + A_2\sin(vt)\right)$$

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 3y' + 2y = 0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $y'' \equiv \lambda^2, y' \equiv \lambda, y = 1$ προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ με ρίζες τις 1 και 2. Αρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 9y = 0$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $y'' \equiv \lambda^2, y' \equiv \lambda, y = 1$ προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2 - 9 = 0$ με διπλή ρίζα το -3,+3. Αρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 6y' + 10y = 0$

ΛΥΣΗ

Στην τρίτη διαφορική εξισωση που εξετάζουμε παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $y'' \equiv \lambda^2, y' \equiv \lambda, y = 1$ προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ με μιγαδικές ρίζες $a \pm ib = 3 \pm i$. Αρα η γενική λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης με a=3, b=1 είναι της μορφής

$$y = e^{ax}\left(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx)\right) \Rightarrow y = e^{3x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right)$$