ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΕΡΙΚΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ-ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α. Υπολογισμός μερικών παραγώγων

Παράδειγμα 1 Να υπολογίστε όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x_1, x_2 x_3) = ax_1 + x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για την εύρεση των μερικών παραγώγων έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = a,\ f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \beta x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma},\ \ f_{x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \gamma x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1}$$

$$f_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0,\ f_{x_2x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = (\beta^2 - \beta) x_3^{\gamma} x_2^{\beta-2},\ f_{x_3x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = (\gamma^2 - \gamma) x_2^{\beta} x_3^{\gamma-2}$$

Παραδειγμα 2 Να δείξετε ότι το οριακό προιόν εργασίας σε μια συνάρτηση Cobb-Douglas είναι αρνητικό

ΛΥΣΗ

Για την συνάρτηση $Q = f(K, L) = AK^{a} L^{-a}$ υπολογίζουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο ως προς την εργασία γνωρίζοντας ότι Α>0 και 0<α<1. Εχουμε ότι

Το οριακό προιόν ισούται με $MP = \dfrac{\partial Q}{\partial L} = (1-a)AK^{a}L^{-a} > 0$, αν Α>0 και 0<α<1, και

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = (1-a)AK^{a}L^{-a-1}(-a) < 0$$

Παράδειγμα 3 Να υπολογίστε όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης $TC = \ln\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\partial \mathrm{T}C}{\partial x_1} = \frac{a}{ax_1 + bx_2 + cx_3}, \frac{\partial TC}{\partial x_2} = \frac{b}{ax_1 + bx_2 + cx_3}, \frac{\partial TC}{\partial x_3} = \frac{c}{ax_1 + bx_2 + cx_3}$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial x_1^2} = \frac{-a^2}{\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)^2}, \frac{\partial^2 TC}{\partial x_2^2} = \frac{-b^2}{\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)^2}, \frac{\partial^2 TC}{\partial x_3^2} = \frac{-c^2}{\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)^2}$$

λόγω schwarz

$$\frac{\partial TC}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-ab}{\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)^2} = \frac{\partial TC}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial TC}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{-cb}{\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)^2} = \frac{\partial TC}{\partial x_3 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial TC}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{-ac}{\left(ax_1 + bx_2 + cx_3\right)^2} = \frac{\partial TC}{\partial x_3 \partial x_1}$$

Παραδειγμα 4 Να υπολογίσετε τα οριακά προιόντας εργασίας και κεφαάιου καθώς και τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης για την συνάρτηση Cobb-Douglas της μορφής $Q(K,L)=\gamma\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}}, \gamma\geq 0, \mu\geq 0, 0\leq\delta\leq 1$

ΛΥΣΗ

Τα οριακά προιόντα εργασίας και κεφαλαίου δίνονται ως εξής:

$$\frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}=\gamma\left(\frac{-\mu}{\rho}\right)\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}-1}(1-\delta)(-\rho)L^{-\rho-1} \text{ και}$$

$$\frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}=\gamma\left(\frac{-\mu}{\rho}\right)\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}-1}\delta(-\rho)K^{-\rho-1}.$$

Ο ΟΛΥ ως ο λόγος των δύο οριακών προιόντων ισούται με

$$\text{ΟΛΥ}=\frac{\frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}}=\frac{\gamma\left(\frac{-\mu}{\rho}\right)\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}-1}\delta(-\rho)K^{-\rho-1}}{\gamma\left(\frac{-\mu}{\rho}\right)\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\mu}{\rho}-1}(1-\delta)(-\rho)L^{-\rho-1}}=\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho-1}$$

Παραδειγμα 5 Να υπολογίσετε το διάνυσμα κλίσης της συνάρτησης $Q(K,L,\mathrm{E})=K^{\alpha}L^{\beta}\mathrm{E}^{\gamma}$

ΛΥΣΗ

Το διάνυσμα κλίσης υπολογίζεται με βάση τον ορισμό ως εξής:

$$\nabla Q(K,L,\mathrm{E})=\begin{bmatrix}\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\mathrm{E}^{\gamma}\\ \beta K^{\alpha}L^{\beta-1}\mathrm{E}^{\gamma}\\ \gamma K^{\alpha}L^{\beta}\mathrm{E}^{\gamma-1}\end{bmatrix}$$

Β. Ομογενείς Συναρτήσεις

Παράδειγμα 1 Είναι ομογενής η παρακάτω συνάρτηση και εάν ναι τι βαθμού;

$$y(x)=\left[(1-S)x^{-b}\right]^{\frac{-1}{b}}$$

ΛΥΣΗ

$y(tx)=\left((1-s)(tx)^{-b}\right)^{\frac{-1}{b}}=\left[(1-s)\right]^{\frac{-1}{b}}\left[tx^{-b}\right]^{\frac{-1}{b}}=t^{\frac{-b}{-b}}\left[(1-s)x^{-b}\right]^{(\frac{-1}{b})}=t^{1}y(x)$. Αρα είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

Παράδειγμα 2 Εφαρμόστε το θεώρημα του Euler στη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas $f(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$ $A > 0, a_i > 0\ \forall i$ η οποία ορίζεται στο R^3_{++} και $\sum a_i = 1$.

ΛΥΣΗ
Με βάση το θεώρημα του Euler : f ομογενής συνάρτηση βαθμού ομογένειας κ συνεπάγεται ότι $x_1 f x_1 + x_2 f x_2 + x_3 f x_3 = \kappa f$
$fx_1 = a_1 A x_1^{a_1-1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$, $fx_2 = a_2 A x_1^{a_1}x_2^{a_2-1}x_3^{a_3}$, $fx_3 = a_3 A x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3-1}$
Βρίσκω τον βαθμό ομογένειας της f
$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = A(\lambda x_1)^{a1}(\lambda x_2)^{a2}(\lambda x_3)^{a3}$
$= A\lambda^{a_1}x_1^{a_1}\lambda^{a_2}x_2^{a_2}\lambda^{a_3}x_3^{a_3} = A\lambda^{a_1+a_2+a_3}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_2^{a_3} =$ (επειδή $\sum a_i = 1$ τότε το $\lambda^{a_1+a_2+a_3} = 1$) $= A\lambda^1 x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} = \lambda A x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} = \lambda f(x_1, x_2, x_3)$
Άρα η f είναι ομογενής με βαθμό 1. Συνεπώς, ισχύει $x_1 f x_1 + x_2 f x_2 + x_3 f x_3 = f$

Γ. Διαφορικό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Παράδειγμα 1 Για την συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas της μορφής $Q = f(K, L) = 60K^{3/4}L^{1/4}$ να υπολογίσετε την μεταβολή στην παραγωγή απο την αύξηση του κεφαλαίου κατά δύο μονάδες και της εργασίας κατά μια (*εφαρμογή για K=81. L=16*).

ΛΥΣΗ
Για να υπογίσουμε την μεταβολή στην παραγωγή θα κάνουμε χρήση του διαφορικού. Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}dk + \frac{\partial Q}{\partial K}dL = \frac{\partial\left(60K^{3/4}L^{1/4}\right)}{\partial K}dk + \frac{\partial\left(60K^{3/4}L^{1/4}\right)}{\partial K 60K^{3/4}L^{1/4}}dk =$$

$$= \left(\frac{3}{4}60K^{-1/4}L^{1/4}\right)dk + \left(\frac{3}{4}60K^{3/4}L^{-3/4}\right)dL$$

Για να απαντήσουμε αριθμητικά θα πρέπει να χρησιμοποιήουμε το σημείο υπολογισμού. Αρα,

$dQ = \left(\frac{3}{4}60K^{-1/4}L^{1/4}\right)dk + \left(\frac{3}{4}60K^{3/4}L^{-3/4}\right)dL = 30\times 2 + 50\times\frac{5}{8} = 91.25$. Αρα εάν αυξηθεί το κεφάλαιο κατά δύο μονάδες και η εργασία κατά μια θα έχουμε μεταβολή 91.25 μονάδων.

Παράδειγμα 2 Για τη συνάρτηση χρησιμότητας $U = x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{3}{4}}$ να υπολογιστεί το ποσοστό μεταβολής της x_2 ώστε η χρησιμότητα να μειωθεί κατά 1% αν η x_1 αυξηθεί κατά 3%, αν αρχικά $x_1 = 200\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = 500$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $\Delta U = -0{,}01 \Leftrightarrow U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = -0{,}01$

Άρα, $(200 + 0{,}03)^{1/4}(500 + \Delta x_2)^{3/4} - 200^{1/4} \cdot 500^{3/4} = -0{,}01 \Leftrightarrow$

$(200{,}03)^{1/4} \cdot (500 + \Delta x_2)^{3/4} - 200^{1/4} \cdot 500^{3/4} = -0{,}01 \Leftrightarrow 3{,}7607 \cdot (500 + \Delta x_2)^{3/4} - 3{,}7607 \cdot 105{,}7371 = -0{,}01 \Leftrightarrow (500 + \Delta x_2)^{3/4} = -\frac{0{,}01}{3{,}7607} + 105{,}7371 \Leftrightarrow$

$(500 + \Delta x_2)^{3/4} = -0{,}002659 + 105{,}7371 \Leftrightarrow (500 + \Delta x_2)^{3/4} = 105{,}734441 \Leftrightarrow$

$500 + \Delta x_2 = (105{,}734441)^{4/3} \Leftrightarrow 500 + \Delta x_2 = 499{,}9830 \Leftrightarrow$

$\Delta x_2 = 499{,}9830 - 500 \Leftrightarrow \Delta x_2 = -0{,}017$

Παράδειγμα 3 Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε η έκφραση $xzdx + yzdy + a(x^2 + y^2)dz$ να είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης και για την τιμή αυτή να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση.

ΛΥΣΗ

Για να υπάρχει διαφορικό θα πρέπει να ισχύει $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

Επομένως με βάση την παραπάνω συνάρτηση θα πρέπει να ισχύει $df = xzdx + yzdy + xydz$, δηλαδή θα πρέπει $a(x^2 + y^2) = xy$.

Άρα $a = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Έστω η συνάρτηση $a(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Το ολικό διαφορικό της είναι: $da = \frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy.$

Βρίσκουμε την πρώτης τάξης μερική παράγωγο ως προς x

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{(xy)'(x^2 + y^2) - (xy)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Βρίσκουμε την πρώτης τάξης μερική παράγωγο ως προς y

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{(xy)'(x^2 + y^2) - (xy)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Επομένως το ολικό διαφορικό της συνάρτησης α είναι

$$da = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2}dx + \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2}dy$$

Παράδειγμα 4 Να υπολογιστεί το διαφορικό δεύτερης τάξης της εξής συνάρτησης: $Q(K, L) = K^2L^3, K(t) = 2t, L(t) = 3t^2$

ΛΥΣΗ

$$Q_K = 2KL^3, Q_L = 3K^2L^2, Q_{KK} = 2L^3, Q_{LL} = 6K^2L, Q_{KL} = 6KL^2, K(t) = 2t, L(t) = 3t^2$$

$$d^2Q = d\left(Q_K dK + Q_L dL\right) = Q_{KK}d^2K + Q_{LL}d^2L + 2Q_{KL}dKdL + Q_K d^2K + Q_L d^2L$$

$$= 2L^3d^2K + 6K^2Ld^2L + 2\cdot 6KL^2dKdL + 2KL^3d^2K + 3K^2L^2d^2L$$

$$= 2\cdot 27t^6d^2K + 6\cdot 4t^2 3t^2d^2L + 216t^5dKdL + 2\cdot 2t\cdot 27t^6d^2K + 3\cdot 4t^2\cdot 9t^4d^2L$$

$$= 54t^6d^2K + 72t^4d^2L + 216t^5dKdL + 108t^7d^2K + 108t^6d^2L$$

Δ. Ανάπτυγμα κατά Taylor-McLaurin

Παράδειγμα 1 Να προσεγγιστεί κοντά στο σημείο P(1,1) η συνάρτηση f(x,y)=x^y κρατώντας όρους μέχρι δευτέρου βαθμού (ως προς χ-1,y-1)

ΛΥΣΗ

Αυτή η άσκηση μας θυμίζει άσκηση πάνω σε σειρές Taylor-Maclaurin,δηλαδή,έχουμε μια συνάρτηση f(x,y)=x^y με δυο μεταβλητές χ,y και πέρνωντας τον κατάλληλο τύπο (Taylor-Maclaurin) υπολογίζουμε την συνάρτηση που μας δίνεται.Τα βήματα είναι τα ακόλουθα:

f(1,1)=1^1=1

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$=y$x^{y-1}$ $\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}$=1*$1^{1-1}$=1 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$=$x^y$*lnx $\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}$=$1^1$ln1=0

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$=y$(y-1)x^{y-2}$ $\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}$=1*$(1-1)1^{1-2}$=0

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$=$x^y$lnx*lnx $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$=$1^1$*ln1*ln1=0

Χρησιμοποιούμε τον τύπο Taylor διότι μας δίνεται σημείο προσέγγισης το P(1,1),δηλαδή χ=1$\neq$ 0 και y=1$\neq$ 0. Οι σειρές του Taylor αναπτύσσονται γύρω από ένα σημείο χ=c$\neq$ 0. Αντίθετα,οι σειρές του Maclaurin αναπτύσσονται γύρω από το $\chi = 0$. (και στις δύο υπάρχει ένα σφάλμα προσέγγισεις Rn+1 αλλά δεν μας ζητείται να προσδιοριστεί). Έχουμε:

F(x)= $\frac{f(c)}{0!}$ +$\frac{f'(c)}{1!}$(x-c) + $\frac{f''(c)}{2!}$ $(x-c)^2$=> (x=c=1) => $\frac{1}{0!}$ + 0+0=1

F(y)= $\frac{f(c)}{0!}$ +$\frac{f'(c)}{1!}$(y-c) + $\frac{f''(c)}{2!}$ $(y-c)^2$=> (y=c=1) => $\frac{1}{0!}$ + 0+0=1

Ε. Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Παράδειγμα 1 Να υπολογίσετε το διαφορικό της συνάρτησης παραγωγής εάν ισχύουν ότι $Q = KL^2, K(t) = 3t^2, L(t) = 3t + 7$.

ΛΥΣΗ

Το διαφορικό δίνεται με βάση τον παρακάτω τύπο $\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{dL}{dt}$. Προφανώς δεν πρόκειται για τον τύπο που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη ενότητα και είναι διαφορετικός καθώς η συνάρτησή μας παραγωγής είναι πεπλεγμένη. Συνεπώς

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{dL}{dt}=L^2\cdot 6t+2KL\cdot 3=L^2\cdot 6t+6KL=$$

$$=(3t+7)^2 6t+6(3t^2)(3t+7)=(9t^2+42t+49)6t+18t^2(3t+7)$$

$$=54t^3+252t^2+294t+54t^3+126t^2=108t^3+378t^2+294t$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του για οποιαδήποτε χρονική στιγμή με μια απλή αντικατάσταση στον τελικό μας τύπο.

Παράδειγμα 2 Να χρησιμοποιήσετε την πεπλεγμένη παραγώγιση και να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης εισοδηματικού περιορισμού που προσδιορίζεται απο την σχέση $I\left(x_1,x_2,y\right)=13x_1x_2+x_2y^2+x_1^2x_2y-10=0$.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial I\left(x_1,x_2,y\right)}{\partial x_1}=3x_2+2x_1x_2y$$

$$\frac{\partial I\left(x_1,x_2,y\right)}{\partial x_2}=3x_1+y^2+x_1^2y$$

$$\frac{\partial I\left(x_1,x_2,y\right)}{\partial y}=2x_2y+x_1^2x_2$$

Ενας τρόπος για να θυμόμαστε τον τύπο της πεπλεγμένης παραγώγισης είναι μέσω της χρήσης του διαφορικού. Γνωρίζοντας λοιπόν ότι το ολικό διαφορικό θα είναι ίσο όμως με μηδέν θα έχουμε: $dI\left(x_1,x_2,y\right)=I_{x_1}dx_1+I_{x_2}dx_2+I_ydy=0$. Για να υπολογίσουμε την μερική παράγωγο ως προς την μεταβλητή x_1 θεωρούμε το dx_2 μηδέν και ανάλογα λειτουργούμε για την μεταβλητή x_2. Συνεπώς,

$$\frac{\partial I\left(x_1,x_2,y\right)}{\partial x_1}=-\frac{I_{x_1}}{I_y}=-\frac{3x_2+2x_1x_2y}{2x_2y+x_1^2x_2}$$

$$\frac{\partial I\left(x_1,x_2,y\right)}{\partial x_2}=-\frac{I_{x_2}}{I_y}=\frac{3x_1+y^2+x_1^2y}{2x_2y+x_1^2x_2}$$

Παράδειγμα 3 Να βρείτε το σχήμα των καμπυλών αδιαφορίας για την περίπτωση των τέλειων υποκαταστάτων της συνάρτησης $U\left(x_1,x_2\right)=x_1+x_2$.

ΛΥΣΗ

Το ολικό διαφορικό για την παραπάνω συνάρτηση $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ είναι $dU(x_1, x_2) = dx_1 + dx_2$. Κατά μήκος μιας οποιασδήποτε καμπύλης αδιαφορίας έχουμε ότι dU=0 και συνεπώς $dU(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow dx_1 + dx_2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dx_2}{dx_1} = -1$. Αρα $MRS = -\dfrac{dx_2}{dx_1} = 1$. Εάν υποκαταστήσουμε k μονάδες απο το ένα αγαθό με k μονάδες του άλλους τότε ο καταναλωτής παραμένει πάνω στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας. Αρα τα αγαθά είναι τέλεια υποκατάσταστα. Η αντιπροσωπευτική καμπύλη αδιαφορίας για τα αγαθά που είναι τέλεια υποκατάστατα θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που θα τέμνει τα δύο αγαθά x_1, x_2.

Παράδειγμα 4 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων $\begin{matrix} TC_1(x, y, a) = x^2 + axy + y^2 - 4 = 0 \\ TC_2(x, y, a) = x^2 - axy + y^2 + 2 = 0 \end{matrix}$ γνωρίζοντας ότι οι ποσότητες x, y είναι οι ενδογενείς μεταβλητές ενώ η a η εξωγενής (θεωρείστε την περίπτωση όπου x=y=1 και a=2).

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα ως προς τις δύο συναρτήσεις κόστους καθώς τις ενδογενείς και εξωγενείς μεταβλητές:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial TC_1}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial TC_2}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + ay & ax + 2y \\ 2x - a^2 & 2y \end{vmatrix}$$

Μάλιστα η τιμή της ορίζουσας στο σημείο που μας έχει δοθεί ως μελέτη είναι 16 διαφορετική του μηδενός και άρα υπάρχουν συναρτήσεις x,y οι οποίες ορίζονται σε μια περιοχή γύρω απο το δοθέν a. Οι μερικές παραγώγοι δίνονται ως:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial TC_1}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial TC_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial TC_2}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial TC_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial TC_1}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial TC_2}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_2}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} xy & ax + 2y \\ -2xa & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x + ay & ax + 2y \\ 2x - a^2 & 2y \end{vmatrix}}, \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial TC_1}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_1}{\partial a} \\ \dfrac{\partial TC_2}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_2}{\partial a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial TC_1}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_1}{\partial a} \\ \dfrac{\partial TC_2}{\partial x} & \dfrac{\partial TC_2}{\partial a} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2x + ay & xy \\ 2x - a^2 & -2ax \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x + ay & ax + 2y \\ 2x - a^2 & 2y \end{vmatrix}}$$

Με αντικατάσταση του σημείου έχουμε $dx = -\dfrac{9}{8}da, dy = \dfrac{7}{8}da$.

ΣΤ. Εσσιανός Πίνακας

Παράδειγμα 1 Να υπολογίσετε τον Hessian matrix της συνάρτησης $f(x,y,z)=xy^2z^3$ και η τιμή της στο σημείο M(1,-1,1)

ΛΥΣΗ

Η εσσιανή μήτρα ή εσσιανός πίνακας δίνεται ως εξης:

$$\mathrm{H}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{bmatrix}$$

Με αντικατάσταση των τιμών στον εσσιανός πίνακας θα έχουμε

$$\mathrm{H}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Ο υπολογισμός της ορίζουσας του πίνακας μας δίνει τιμή 30.

Παράδειγμα 2 Να υπολογίσετε τον Hessian matrix της συνάρτησης συνολικού κόστους με μορφή

$$TC=\ln\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)$$

ΛΥΣΗ

$$\mathrm{H}=\begin{bmatrix} TC_{11} & TC_{12} & TC_{13} \\ TC_{21} & TC_{22} & TC_{23} \\ TC_{31} & TC_{32} & TC_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{-a^2}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} & \dfrac{-ab}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} & \dfrac{-ac}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} \\ \dfrac{-ab}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} & \dfrac{-b^2}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} & \dfrac{-cb}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} \\ \dfrac{-ac}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} & \dfrac{-cb}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} & \dfrac{-c^2}{\left(ax_1+bx_2+cx_3\right)^2} \end{bmatrix}$$