ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

0. Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι και Αριστοποίηση

Στα μαθηματικά για οικονομολόγους Ι συζητήσαμε για την εύρεση ελαχίστου και μεγίστου για συναρτήσεις με μια μεταβλητή και υπολογίσαμε το ελάχιστο/μέγιστο με βάση την παρακάτω διαδικασία. Ωστόσο, οι συναρτήσεις καθώς και αυτές που αναφέρονται σε οικονομικά υποδείγματα δεν είναι αποτέλεσμα μόνο μιας μεταβλητής αλλά περισσοτέρων. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την εύρεση ακροτάτου μέσω της χρήσης διαφορετικών μεθόδων. Οι φοιτητές μας μπορούν να ακολουθήσουν όποια μεθοδολογία θεωρούν ότι τους είναι περισσότερο κατανοητή[1].

Παράδειγμα 1 (Αριστοποίηση με μία μεταβλητή)

Μια μονοπωλιακή επιχείρηση έχει συνάρτηση ζήτησης $P = 152.5 - 3Q$ και συνάρτηση κόστους $TC = \frac{Q^3}{2} - 15Q^2 + 175Q + 300$.Να υπολογιστεί η παραγωγή στην οποία το κέρδος ελαχιστοποιείται ή/και μεγιστοποιείται.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση κέρδους τη συγκεκριμένης επιχείρησης περιγράφεται από την σχέση $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$ και συνεπώς με την κατάλληλη αντικατάσταση από την ακόλουθη εξίσωση

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (152.5 - 3Q)Q - \left(\frac{Q^3}{2} - 15Q^2 + 175Q + 300\right) =$$

$$= 152.5Q - 3Q^2 - \frac{Q^3}{2} + 15Q^2 - 175Q - 300 = -\frac{Q^3}{2} + 12Q^2 - 22.5Q - 300$$

Για να υπολογίσουμε το σημείο ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) της συγκεκριμένης συνάρτησης κερδών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω βήματα:

---

[1] Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην Δρ.Καίσαρη Μαρία για την ευγενική της παροχή υλικού.

Βήμα 1ο : Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συγκεκριμένης συνάρτησης (κερδών στην περίπτωσή μας) ως προς την μεταβλητή ενδιαφέροντος (την ποσότητα Q). Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ}=\frac{d\left(-\frac{Q^3}{2}+12Q^2-22.5Q-300\right)}{dQ}=-\frac{3Q^2}{2}+24Q-22.5$$

Βήμα 2ο : Για να υπολογίσουμε το πιθανό σημείο ακρότατου θέτουμε την πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν.

Δηλαδή $\frac{d\Pi(Q)}{dQ}=0 \Leftrightarrow -\frac{3Q^2}{2}+24Q-22.5=0 \Leftrightarrow 1.5Q^2-24Q+22.5=0$. Η λύση του τριωνύμου μας δίνει τις πιθανές ποσότητες $Q=15$ ή $Q=1$.*Σημειώνουμε ότι η περίπτωση της αρνητικής ποσότητας δεν είναι αποδεκτή στην περίπτωση που εξετάζουμε.*

Βήμα 3ο : Για να εξετάσουμε εάν πρόκειται για μέγιστο ή για ελάχιστο υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης κερδών. Θα έχουμε λοιπόν ότι:

$\frac{d\Pi^2(Q)}{dQ^2}=\frac{d\left(-\frac{3Q^2}{2}+24Q-22.5\right)}{dQ}=-3Q+24$. Για να εξετάσουμε εάν έχουμε μέγιστο ή ελάχιστο θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή και πιο συγκεκριμένα το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για τις δύο ποσότητες που έχουν βρεθεί. Πιο συγκεκριμένα για $Q=1 \Rightarrow \frac{d\Pi^2(Q)}{dQ^2}=21$ ενώ για $Q=15 \Rightarrow \frac{d\Pi^2(Q)}{dQ^2}=-21$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της δεύτερης παραγώγου για τις δύο διαφορετικές ποσότητες δεν διατηρούν το ίδιο πρόσημο. Στην πρώτη λοιπόν περίπτωση και για ποσότητα $Q=1$ παρατηρούμε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι θετική άρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι για την συγκεκριμένη ποσότητα η συνάρτηση κερδών εμφανίζει ελάχιστο στο σημείο $Q=1$. Στην δεύτερη περίπτωση και για ποσότητα $Q=15$ η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική. Συνεπώς μπορούμε να μιλήσουμε ότι για $Q=15$ η συνάρτηση κερδών εμφανίζει μέγιστο. Τα ελάχιστα και μέγιστα κέρδη υπολογίζονται με απλές αντικαταστάσεις:

$$\Pi(1)=-\frac{1^3}{2}+12\cdot 1^2-22.5\cdot 1-300=-311$$

$$\Pi(15)=-\frac{15^3}{2}+12\cdot 15^2-22.5\cdot 15-300=375$$

Α.Κριτήριο Δεύτερων Παραγώγων (συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έστω ότι η συνάρτηση $f = f(x, y)$ είναι κλάσης C^2 σε κάποια περιοχή του σημείου $P_0(x_0, y_0)$, στο οποίο ισχύει

$\boldsymbol{f_x\ (x_0, y_0)= f_y\ (x_0, y_0)=0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(x_0, y_0)=0.}$

Αν θέσουμε $\boldsymbol{f_{xx}\ (x_0, y_0)}$ **=α,** $\boldsymbol{f_{xy}\ (x_0, y_0)}$ **=β,** $\boldsymbol{f_{yy}\ (x_0, y_0)}$ **=γ**

και **Δ=** $\boldsymbol{\alpha\gamma - \beta^2}$

Τότε στο σημείο P_0 έχουμε

1. **τοπικό ελάχιστο** αν Δ>0 και α>0,
2. **τοπικό μέγιστο** αν Δ>0 και α<0,
3. **σαγματικό σημείο** αν Δ<0, δηλαδή δεν έχουμε θέση τοπικού ακροτάτου
4. δεν έχουμε συμπεράσματα αν Δ=0.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x, y) = x^2(1 - x) - y^2(1 + x)$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.
Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$f_x\ (x, y)=2x - 3x^2 - y^2$

$f_y\ (x, y)=-2y(1 + x)$

Τα κρίσιμα σημεία θα βρεθούν από την επίλυση του συστήματος:

$$f_x\ (x, y)=0, \qquad f_y\ (x, y)=0$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 - y^2 = 0 \\ -2y(1 + x) = 0 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Επειδή η δεύτερη εξίσωση του συστήματος (Σ) γίνεται

$$-2y(1+x)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } 1+x=0$$

Το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2x-3x^2-y^2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad (\Sigma1) \qquad \begin{cases} 2x-3x^2-y^2=0 \\ 1+x=0 \end{cases} \quad (\Sigma2)$$

Για το (Σ1) έχουμε:

αντικαθιστώντας y=0 στην πρώτη εξίσωση, παίρνουμε

$$2x-3x^2 \Leftrightarrow x(2-3x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\frac{2}{3}$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι:

(0,0) και $(\frac{2}{3},0)$

Για το (Σ2) έχουμε:

Αντικαθιστώντας $x=-1$ στην πρώτη εξίσωση, παίρνουμε

$$2(-1)-3(-1)^2-y^2=0$$

$$y^2=-5$$

Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη για πραγματικούς αριθμούς.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι αυτά που προέκυψαν από την επίλυση του συστήματος (Σ1).

Στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε το είδος των κρίσιμων σημείων:

- Βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$f_{xx}\,(x,y)=2-6x,\quad f_{yy}\,(x,y)=-2-2x,\quad f_{xy}\,(x,y)=\ f_{yx}\,(x,y)=-2y$

- Βρίσκουμε τις τιμές των παραγώγων αυτών σε κάθε ένα από τα κρίσιμα σημεία.

Για το σημείο (0,0)

f_{xx} (0,0)=2, $f_{yy}\,(0{,}0)=-2$ και $f_{xy}\,(0{,}0)=\ f_{yx}\,(0{,}0)=0$

Άρα α=2, β=0 και γ=-2.

Επομένως με $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$ εδώ έχουμε
$\Delta = 2(-2) - 0^2 = -4 < 0.$

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο στο σημείο (0,0) δεν έχουμε τοπικό ακρότατο.

Για το σημείο $(\frac{2}{3}, 0)$

$f_{xx}\,(\frac{2}{3}, 0) = 2 - 6 \cdot \frac{2}{3} = 2 - 4 = -2$

$f_{yy}\,(\frac{2}{3}. 0) = -2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{6}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$

$f_{xy}\,(\frac{2}{3}, 0) = f_{yx}\,(\frac{2}{3}, 0) = 0$

Άρα έχουμε α= $\mathbf{-2}$, $\boldsymbol{\beta = 0}$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota\ \gamma} = -\frac{10}{3}$

Επομένως με $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$ εδώ έχουμε
$\Delta = -2\left(-\frac{10}{3}\right) - 0^2 = \frac{20}{3} > 0.$

Σύμφωνα με το κριτήριο που παραθέσαμε στην αρχή η συνάρτηση στο σημείο $(\frac{2}{3}, 0)$ με Δ>0 και α<0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι:

$$f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

Παρατήρηση: Κατά την εύρεση των κρίσιμων σημείων προκύπτει ένα σύστημα που μπορεί να είναι γραμμικό αλλά μπορεί και να μην είναι όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Όπως βλέπετε το βάρος στους υπολογισμούς πέφτει στην επίλυση του μη γραμμικού συστήματος. Ένας τρόπος, όπως εδώ, είναι η παραγοντοποίηση της μιας από τις δύο εξισώσεις και η δημιουργία στην συνέχεια δύο ή και παραπάνω συστημάτων που πρέπει να λυθούν ξεχωριστά.

Παραδείγματα για εξάσκηση:

Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς τα ακρότατα.

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y$

2. $f(x,y) = x^4 - y^4 - 4x^2 - 2xy - 4y^2$

Εφαρμογή στα οικονομικά Ι

■ Ένα μονοπώλιο παράγει δύο αγαθά, Χ και Υ. Η συνάρτηση ζήτησης για κάθε αγαθό δίνεται από τις συναρτήσεις

$P_x = 36 - 3x$ και $P_y = 56 - 4y$

1. Να γραφεί η εξίσωση των συνολικών εσόδων.
2. Να προσδιοριστούν οι ποσότητες για κάθε αγαθό, που πρέπει που πρέπει να πωληθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά έσοδα. Ποια είναι τα συνολικά έσοδα;

ΛΥΣΗ

1. Τα συνολικά έσοδα είναι η τιμή πώλησης επί την ποσότητα που παράγεται για κάθε αγαθό:

$$R(x,y) = xP_x + yP_y$$
$$= (36 - 3x)x + (56 - 4x)y$$
$$= 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2$$

2. Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης των εσόδων:

$$R_x(x,y) = 36 - 6x$$

$$R_y(x,y) = 56 - 8y$$

Τα κρίσιμα σημεία θα βρεθούν από την επίλυση του συστήματος:

$R_x\,(x,y)$=0, $R_y\,(x,y)$=0

Δηλαδή:

$$\begin{cases} 36 - 6x = 0 \\ 56 - 8y = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Η επίλυση του συστήματος δίνει :

$$x = 6$$
$$y = 7$$

Επομένως το κρίσιμο σημείο είναι (x, y)=(6,7).

Για να προσδιορίσουμε το είδος του κρίσιμου σημείου, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της

$R(x, y) = 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2$ (1)

$R_{xx}\,(x, y) = -6,\ R_{yy}\,(x, y) = -8\ \ \kappa\alpha\iota\ \ R_{xy}(x, y)$=0

Οι συναρτήσεις αυτές είναι σταθερές έτσι

$R_{xx}\,(6,7) = -6,\ R_{yy}\,(6,7) = -8\ \ \kappa\alpha\iota\ \ R_{xy}(6,7)$=0

Άρα α=-6, β=0 και γ=-8

Επομένως με Δ= $\alpha\gamma - \beta^2$ εδώ έχουμε

Δ= $(-6)(-8) - 0^2 = 48 > 0$.

Σύμφωνα με το κριτήριο που παραθέσαμε στην αρχή η συνάρτηση στο σημείο (6,7) με Δ>0 και α=-6<0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο βρίσκουμε αντικαθιστώντας στην (1):

$$\begin{aligned} R(6,7) &= 36 \cdot 6 - 3 \cdot 6^2 + 56 \cdot 7 - 4 \cdot 7^2 \\ &= 216 - 108 + 392 - 196 \\ &= 304 \end{aligned}$$

Εφαρμογή στα Οικονομικά ΙΙ (Αριστοποίηση με 2 και περισσότερες μεταβλητές)

Ένα μονοπώλιο πουλάει δύο συγκεκριμένα προϊόντα Q_1, Q_2 τα οποία εμφανίζουν τις παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης: $\begin{matrix} 0.1P_1 - 1.2 + 0.2Q_1 = 0 \\ 10P_2 - 320 + 40Q_2 = 0 \end{matrix}$. Η συνάρτηση κόστους του μονοπωλίου δίνεται ως εξής $TC\left(Q_1, Q_2\right) = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$ Να υπολογίσετε τις τιμές και τις ποσότητες για κάθε προϊόν Q_1, Q_2 που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα 1 η συνάρτηση κέρδους τη συγκεκριμένης επιχείρησης περιγράφεται από την σχέση $\Pi\left(Q_1,\mathrm{Q}_2\right)=TR\left(Q_1,\mathrm{Q}_2\right)-TC\left(Q_1,\mathrm{Q}_2\right)$ και συνεπώς με την κατάλληλη αντικατάσταση από την ακόλουθη εξίσωση

$$\Pi\left(Q_1,\mathrm{Q}_2\right)=TR\left(Q_1,\mathrm{Q}_2\right)-TC\left(Q_1,\mathrm{Q}_2\right)=$$
$$\left[\left(12-2Q_1\right)Q_1+\left(32-4Q_2\right)Q_2\right]-\left(Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2\right)=$$
$$=....=-3Q_1^2-5Q_2^2+12Q_1+32Q_2-2Q_1Q_2$$

Για να υπολογίσουμε το σημείο ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) της συγκεκριμένης συνάρτησης κερδών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1$^{\text{ο}}$: Υπολογίζουμε την πρώτη μερική παράγωγο της συγκεκριμένης συνάρτησης (κερδών στην περίπτωσή μας) ως προς τις μεταβλητές ενδιαφέροντος (τις ποσότητες Q_1,Q_2). Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial\Pi\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1}=\frac{\partial\left(-3Q_1^2-5Q_2^2+12Q_1+32Q_2-2Q_1Q_2\right)}{\partial Q_1}=-6Q_1+12-2Q_2$$

$$\frac{\partial\Pi\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1}=\frac{\partial\left(-3Q_1^2-5Q_2^2+12Q_1+32Q_2-2Q_1Q_2\right)}{\partial Q_2}=-10Q_2+32-2Q_1$$

Βήμα 2$^{\text{ο}}$: Για να υπολογίσουμε το (-α) πιθανό (-α) σημείο ακρότατου(-ων) θέτουμε τις πρώτες μερικές παράγωγους ίσες με το μηδέν. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}-6Q_1+12-2Q_2&=0\\-10Q_2+32-2Q_1&=0\end{aligned}$$

Θα λύσουμε το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων για να έχουμε το πιθανό(-ά) σημείο (-α) ακρότατου (-ων). Με την μέθοδο της αντικατάστασης λαμβάνουμε ότι $Q_1=1,Q_2=3$. Άρα το σημείο (1,3) θεωρείται πιθανό σημείο ακρότατου και θα πρέπει να εξετάσουμε εάν αυτό είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Βήμα 3$^{\text{ο}}$: Για να εξετάσουμε εάν πρόκειται για μέγιστο ή για ελάχιστο υπολογίζουμε τις δεύτερης τάξεως μερικές παράγωγους ως προς Q_1,Q_2 της συνάρτησης κερδών. Θα έχουμε λοιπόν ότι:

$$\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1^2}=\frac{\partial\left(-6Q_1+12-2Q_2\right)}{\partial Q_1}=-6$$

$$\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2^2}=\frac{\partial\left(-10Q_2+32-2Q_1\right)}{\partial Q_2}=-10$$

$$\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1\partial Q_2}=\frac{\partial\left(-10Q_2+32-2Q_1\right)}{\partial Q_1}=-2,\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2\partial Q_1}=\frac{\partial\left(-6Q_1+12-2Q_2\right)}{\partial Q_2}=-2$$

Παρακαλώ παρατηρήστε ότι $\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1\partial Q_2}=\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2\partial Q_1}$ (θεώρημα Young). Για να αποφανθούμε εάν έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση την ποσότητα $\Delta=\Pi_{Q_1Q_1}\Pi_{Q_2Q_2}-\left(\Pi_{Q_1Q_2}\right)^2$. Θα έχουμε ότι

$$\Delta=\Pi_{Q_1Q_1}\Pi_{Q_2Q_2}-\left(\Pi_{Q_1Q_2}\right)^2=\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1^2}\cdot\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_2^2}-\left(\frac{\partial\Pi^2\left(Q_1,Q_2\right)}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)=$$

$$=\left(-6\right)\left(-10\right)-\left[\left(-2\right)\right]^2=60-4=56>0$$

Άρα οι ποσότητες που μεγιστοποιούν τα κέρδη είναι $Q_1=1,Q_2=3$ και το μέγιστο κέρδος δίνεται όπως και στην προηγούμενη άσκηση με μια απλή αντικατάσταση των ποσοτήτων στην συνάρτηση κέρδους

$$\Pi\left(1,3\right)=-3\cdot1^2-5\cdot3^2+12\cdot1+32\cdot3-2\cdot1\cdot3=52$$

Εφαρμογή στα Οικονομικά ΙΙΙ (Αριστοποίηση με 2 και περισσότερες μεταβλητές)

Μια επιχείρηση κατασκευή Η/Υ διαθέτει δύο εργοστάσια Α,Β. ΤΟ συνολικό κόστος για κάθε εργοστάσιο δίνεται από τις παρακάτω συναρτήσεις με Q_A,Q_B οι ποσότητες των Η/Υ που το κάθε εργοστάσιο διαθέτει προς πώληση $\begin{array}{l}TC_A=12+7Q_A-2Q_A^2-0.75Q_A^3,\\TC_B=5+3Q_B-1.5Q_B^2\end{array}$. Η επιχείρηση επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγωγής των δύο εργοστασίων. Να υπολογίσετε τις ποσότητες Q_A,Q_B οι οποίες και ελαχιστοποιούν το κόστος παραγωγής.

ΛΥΣΗ

Το πρώτο βήμα στην συγκεκριμένη συνάρτηση είναι το να κατασκευάσουμε την συνολική συνάρτηση κόστους και για τα δύο εργοστάσια. Αυτή θα υπολογιστεί από το άθροισμα του συνολικού κόστους για κάθε εργοστάσιο. Συνεπώς θα πρέπει να βρούμε τις ποσότητες οι οποίες και ελαχιστοποιούν την παρακάτω συνάρτηση:

$$TC = TC_A + TC_B = 12 + 7Q_A - 2Q_A^2 - 0.75Q_A^3 + 5 + 3Q_B - 1.5Q_B^2 \Leftrightarrow$$
$$TC = 17 + 7Q_A - 2Q_A^2 - 0.75Q_A^3 + 3Q_B - 1.5Q_B^2$$

Βήμα 1ο : Υπολογίζουμε την πρώτη μερική παράγωγο της συγκεκριμένης συνάρτησης (κόστους στην περίπτωσή μας) ως προς τις μεταβλητές ενδιαφέροντος (τις ποσότητες Q_A, Q_B). Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial TC(Q_A,Q_B)}{\partial Q_A} = \frac{\partial\left(17 + 7Q_A - 2Q_A^2 - 0.75Q_A^3 + 3Q_B - 1.5Q_B^2\right)}{\partial Q_A} = 17 - 4Q_A - 2.25Q_A^2$$

$$\frac{\partial TC(Q_A,Q_B)}{\partial Q_B} = \frac{\partial\left(17 + 7Q_A - 2Q_A^2 + 0.75Q_A^3 + 3Q_B - 1.5Q_B^2\right)}{\partial Q_B} = 3 - 3Q_B$$

Βήμα 2ο : Για να υπολογίσουμε το (-α) πιθανό (-α) σημείο ακρότατου(-ων) θέτουμε τις πρώτες μερικές παράγωγους ίσες με το μηδέν. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$\frac{\partial TC(Q_A,Q_B)}{\partial Q_A} = 17 - 4Q_A - 2.25Q_A^2 = 0$. Εάν λύσουμε την προηγούμενη δευτεροβάθμια εξίσωση θα υπολογίσουμε δύο ποσότητες $Q_A^1 = 3.77, Q_A^2 = -2$. Προφανώς η αρνητική ποσότητα απορρίπτεται. Ομοίως για την δεύτερη μερική παράγωγο ως προς την δεύτερη ποσότητα θα έχουμε ότι $\frac{\partial TC(Q_A,Q_B)}{\partial Q_B} = 3 - 3Q_B = 0$ και $Q_B = 1$.

Άρα το πιθανό σημείο είναι $Q_A = 3.77, Q_B = 1$.

Βήμα 3ο : Για να εξετάσουμε εάν πρόκειται για μέγιστο ή για ελάχιστο υπολογίζουμε τις δεύτερης τάξεως μερικές παράγωγους ως προς Q_A, Q_B της συνάρτησης κερδών. Θα έχουμε λοιπόν ότι:

$$\frac{\partial TC^2(Q_A,Q_B)}{\partial Q_A^2} = \frac{\partial\left(17 - 4Q_A - 2.25Q_A^2\right)}{\partial Q_A} = -4 - 4.5Q_A$$

$$\frac{\partial TC^2(Q_A,Q_B)}{\partial Q_B^2} = \frac{\partial(3 - 3Q_B)}{\partial Q_B} = -3 \text{ και } \frac{\partial TC^2(Q_A,Q_B)}{\partial Q_B \partial Q_A} = 0$$

Για να αποφανθούμε εάν έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση την ποσότητα $\Delta = TC_{Q_AQ_A}TC_{Q_BQ_B} - \left(TC_{Q_AQ_B}\right)^2$. Θα έχουμε ότι

$\Delta = TC_{Q_A Q_A} TC_{Q_B Q_B} - \left(TC_{Q_A Q_B}\right)^2 = \left(-20.965\right)\left(-3\right) - 0^2 = 62.895 > 0$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Δ είναι θετική και συνεπώς δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ελάχιστο (όπου ισχύει ότι Δ<0) παρά μόνο για μέγιστο. Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ποσότητες οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος της παραπάνω επιχείρησης

Εφαρμογή στα οικονομικά IV

Η συνάρτηση εσόδων μιας βιομηχανίας από την πώληση δύο προιόντων Α και Βείναι TR(q_1, q_2)=K(q_1, q_2)= -4q_1 ^{2}-5q_2 ^{2}+20q_1 q_2 (q_1, q_2 παραγόμενες ποσότητες των Α και Β.Αν για την παραγώγη μιας μονάδας των Α και Β απαιτούνται 2kg και 3kg αντίστοιχα μίας πρώτης ύλης της οποίας η διαθέσιμη ποσότητα είναι 200kg,να βρεθούν οι τιμές των q1,q2 για τις οποίες μεγιστοποιείται το κέρδος της βιομηχανίας.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από την υπόθεση την συνάρτηση εσόδων και με τα δεδομένα θα προσπαθήσουμε να βρούμε την συνάρτηση κόστους. Ξέρουμε ότι για την παραγώγη μιας μονάδας των Α και Β απαιτούνται 2kg και 3kg αντίστοιχα μίας πρώτης ύλης της οποίας η διαθέσιμη ποσότητα είναι 200kg, δηλαδή:

$\mathbf{(\frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{3})200=TC}$

Η συνάρτηση κερδών δίνεται από τον τύπο

Π(q_1, q_2)=TR(q_1, q_2)-TC(q_1, q_2)=

= -4q_1 ^{2}-5q_2 ^{2}+20q_1 q_2 -($\frac{q_1}{2}$ + $\frac{q_2}{3}$)200 =

= -4q_1 ^{2}-5q_2 ^{2}+20q_1 q_2 - $\frac{q_1}{100}$ -$\frac{q_2*200}{3}$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους ως εξής : $\frac{\partial \Pi(q1,q2)}{\partial q1}$ = -8q_1 +20q_2 -0.01=0 (1)

$\frac{\partial \Pi(q1,q2)}{\partial q2}$ =-10q_1 +20q_2 - $\frac{200}{3}$ =0 (2)

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -8q_1 + 20q_2 - 0.01 = 0 \\ -10q_2 + 20q_1 - \frac{200}{3} = 0\ (*2) \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} -8q_1 + 20q_2 - 0.01 = 0 \\ 40q_1 - 20q_2 - \frac{400}{3} = 0 \end{cases} \quad (+) \quad \Rightarrow 32q_1 = 0.01 + \frac{400}{3} \Rightarrow q_1 \cong 4.1669$$

Για q_1 ≅4.1669 μονάδες το q_2 ≅ 1.667 μονάδες

Επόμενο βήμα μελετάμε τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους ως εξής

$\frac{d^2\Pi(q1)}{dq1^2}$=-8< 0 $\frac{d^2\Pi(q2)}{dq2^2}$=-10< 0 $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q1 \partial q2} = 20 > 0$

Και Π(q_1 q_1)* Π(q_2 q_2)- (Π(q_1 q_2))^2=800-400=400> 0

Επομένως ,η βιομηχανία μεγιστοποιεί τα κέρδη της για q_1 ≅4.1669 μονάδες και q_2 ≅ 1.667μονάδες

Β. Τετραγωνικές μορφές

Για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητή, στον χώρο δηλαδή της μιας διάστασης, η πιο απλή μορφή συνάρτησης είναι η γραμμική

$$f(x) = ax$$

Το μονώνυμο, αυτό όπως ονομάζεται, μπορεί να παράγει όλες τις γραμμικές συναρτήσεις

$$f(x) = ax + \beta$$

Η επόμενη συνάρτηση που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι η τετραγωνική (παραβολή)

$$f(x) = ax^2$$

Η συνάρτηση αυτή καθορίζει με την σειρά της την συμπεριφορά του πολυωνύμου δευτέρου βαθμού

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών, στον χώρο δηλαδή των δύο διαστάσεων, μια τετραγωνική συνάρτηση έχει την μορφή:

$$f(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}\, x_1\, x_2 + \alpha_{21}\, x_1\, x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0$$

Η μελέτη της συνάρτησης αυτής μπορεί, όπως και στις παραπάνω περιπτώσεις, να περιοριστεί στην συνάρτηση

$T(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}\, x_1\, x_2 + \alpha_{21}\, x_1\, x_2 + \alpha_{22}x_2^2$ (1)
κάθε όρος της οποίας είναι δευτέρου βαθμού. Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζεται *τετραγωνική μορφή*.

Οι τετραγωνικές μορφές, οι πιο απλές από τις μη γραμμικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται πολύ και διευκολύνουν την μελέτη των μη γραμμικών συναρτήσεων γενικά. Συναρτήσεις τέτοιου είδους χρησιμοποιούμε στην οικονομία στην οικονομετρία στην στατιστική.

Μια τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$T(x_1, x_2) = [x_1, x_2]\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \vec{x}A\vec{x}^t$$

Η (1) γράφεται
$T(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\, x_1\, x_2 + \alpha_{22}x_2^2$
Δηλαδή στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε αν αντικαταστήσουμε τον συντελεστή $\alpha_{12} + \alpha_{21}$ με έναν ίσο του δηλαδή:

$$\alpha_{12} + \alpha_{21} = \beta_{12} + \beta_{21}. \qquad (2)$$

$$\alpha_{11}x_1^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\, x_1\, x_2 + \alpha_{22}x_2^2 = \alpha_{11}x_1^2 + (\beta_{12} + \beta_{21})\, x_1\, x_2 + \alpha_{22}x_2^2$$

Ο πίνακας Α=$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$ είναι αυτός που ορίζει την τετραγωνική μορφή . Αλλά δεν είναι μοναδικός. Λογικό είναι από όλους τους πίνακες που ορίζουν μια τετραγωνική μορφή να θέλουμε να διαλέξουμε τον πιο απλό, δηλαδή τον συμμετρικό.

Αφού στους συμμετρικούς πίνακες $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ η (2) γίνεται:

$$\beta_{12} = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = \beta_{21}$$

Έτσι εύκολα μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον πίνακα μιας τετραγωνικής μορφής σε συμμετρικό.

Παράδειγμα 4

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $T(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 6x_1\,x_2 - 5x_2^2$

Μπορούμε να γράψουμε ως πίνακά της τον A=$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

Ο οποίος όμως δεν είναι συμμετρικός. Τον μετατρέπουμε σε συμμετρικό ως εξής:

B=$\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

Έτσι η τετραγωνική μορφή γράφεται:

$$T(x_1, x_2) = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$T(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2 \cdot 3x_1\,x_2 - 5x_2^2$

Μια τετραγωνική συνάρτηση με τρεις μεταβλητές θα έχει την μορφή:

$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\,\alpha_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,\alpha_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,\alpha_{23}\,x_2\,x_3$

Και ο συμμετρικός πίνακάς της θα είναι:

A=$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$

Δηλαδή θα γράφεται

$$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

Να γραφεί ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής

$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 7x_2^2 + 15x_3^2 - 10\,\alpha_{12}\,x_1\,x_2 + 4\,\alpha_{13}\,x_1\,x_3 - 2\,\alpha_{23}\,x_2\,x_3$

■ **Τετραγωνική μορφή** (quadratic form) είναι μια πραγματική συνάρτηση $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο

$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\,\alpha_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,\alpha_{13}\,x_1\,x_3 + \ldots + 2\,\alpha_{1n}\,x_1\,x_n + \alpha_{22}x_2^2$
$+ 2\,\alpha_{23}\,x_2$ 3+…+ $2\,\alpha_{2n}\,x_2\,x_n + \ldots\ \alpha_{nn}x_n^2$, ή

$$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = [x_1\ x_2\ x_3 \dots, x_3] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Όπου A= $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ συμμετρικός πίνακας.

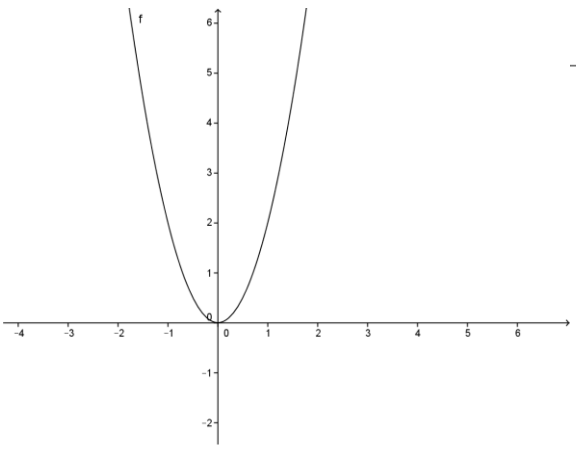
ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

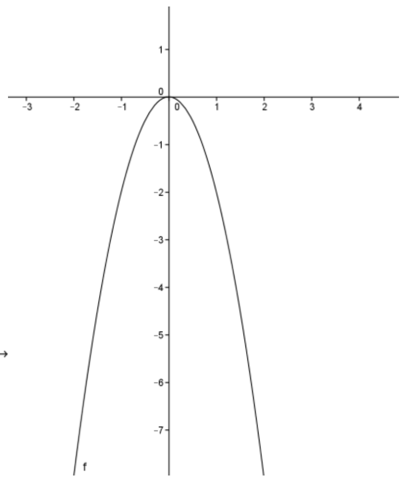
Ας θεωρήσουμε την πιο απλή μορφή τετραγωνικής μορφής την

$$T(x) = ax^2$$

Το πρόσημο της μορφής αυτής εξαρτάται από τον συντελεστή α.

Ο συντελεστής αυτός καθορίζει και την μορφή της, όπως για παράδειγμα η $T(x) = 2x^2$ του σχήματος 1 ή η $T(x) = -2x^2$ του σχήματος 2.



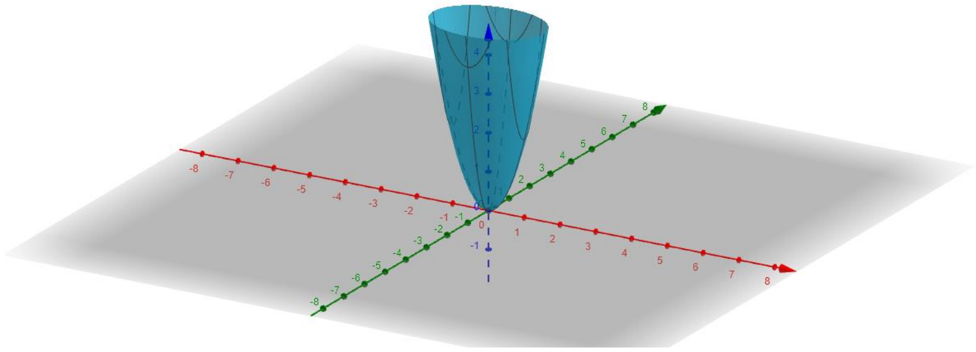


Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη και όπως βλέπουμε παρουσιάζει ελάχιστο. Στην δεύτερη περίπτωση θα λέμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη και παρουσιάζει μέγιστο.

Ας δούμε τώρα την τετραγωνική μορφή

$$T(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 4x_2^2$$

Προφανώς η μορφή αυτή είναι θετικά ορισμένη.

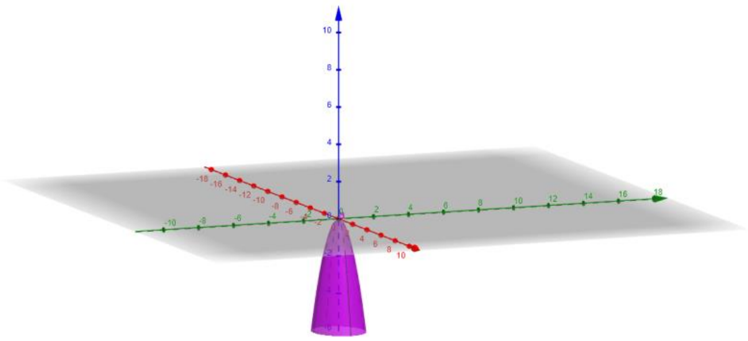


Εδώ παρατηρούμε ότι $\alpha_{11} = 2 > 0 \; \kappa\alpha\iota \; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$

Ενώ η

$$T(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1^2 - 3x_2^2$$

Είναι αρνητικά ορισμένη



Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι

$$\alpha_{11} = -2 < 0$$

Ενώ $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 > 0$

Πρώτο θεώρημα για τον προσδιορισμό προσήμου των τετραγωνικών μορφών

Η τετραγωνική συνάρτηση T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο
T($\vec{x}A\vec{x}^t$), όπου $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

- είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $\boldsymbol{\Delta_1>0, \Delta_2>0, \ldots, \Delta_n>0}$
- είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $\boldsymbol{\Delta_1<0, \Delta_2>0, \ldots, (-1)^n\Delta_n>0}$

όπου $\boldsymbol{\Delta_1 = \alpha_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots. \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$

Διαφορικό 2ης τάξης και Εσσιανός πίνακας

- $\boldsymbol{d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2}$

$=[dx \quad dy]\begin{bmatrix} \boldsymbol{f_{xx}} & \boldsymbol{f_{xy}} \\ \boldsymbol{f_{xy}} & \boldsymbol{f_{yy}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

H= $\begin{bmatrix} \boldsymbol{f_{xx}} & \boldsymbol{f_{xy}} \\ \boldsymbol{f_{xy}} & \boldsymbol{f_{yy}} \end{bmatrix}$ Εσσιανός πίνακας (Hessian)

Εύκολα υπολογίζουμε το διαφορικό δεύτερης τάξης μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών:

- $\boldsymbol{d^2z} = [dx \quad dy \quad dz]\begin{bmatrix} \boldsymbol{f_{xx}} & \boldsymbol{f_{xy}} & \boldsymbol{f_{xz}} \\ \boldsymbol{f_{yx}} & \boldsymbol{f_{yy}} & \boldsymbol{f_{yz}} \\ \boldsymbol{f_{zx}} & \boldsymbol{f_{zy}} & \boldsymbol{f_{zz}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$
- H= $\begin{bmatrix} \boldsymbol{f_{xx}} & \boldsymbol{f_{xy}} & \boldsymbol{f_{xz}} \\ \boldsymbol{f_{yx}} & \boldsymbol{f_{yy}} & \boldsymbol{f_{yz}} \\ \boldsymbol{f_{zx}} & \boldsymbol{f_{zy}} & \boldsymbol{f_{zz}} \end{bmatrix}$

Κριτήριο δεύτερων παραγώγων για συναρτήσεις τριών μεταβλητών

- Αν z=f(x, y, z) $: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών x,y,z ορισμένη σε ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^3$, κλάσης C^2 στο κρίσιμο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ του D, με

$\boldsymbol{f_x (x_0, y_0,} z_0\boldsymbol{)= f_y (x_0, y_0,} z_0\boldsymbol{)=f_z (x_0, y_0,} z_0\boldsymbol{)=0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(x_0, y_0,} z_0\boldsymbol{)=0}$

Τότε αν θέσουμε

$\boldsymbol{\Delta_1 = f_{xx}(x_0, y_0, z_0)}$, $\boldsymbol{\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}}$ **και**

$\boldsymbol{\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}}$ **, ισχύει:**

i.Η f έχει **τοπικό ελάχιστο στο σημείο P**, αν

$\Delta_1 > \mathbf{0}$, $\Delta_2 = >0$ και $\Delta_3>0$.

ii.Η f έχει **τοπικό μέγιστο στο σημείο P**, αν $\Delta_1 < \mathbf{0}$, $\Delta_2>0$ και $\Delta_3<0$.

Παράδειγμα 5

Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^3$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$f_x\,(x, y, z)=4x^3 - 4yz$

$f_y\,(x, y, z)=4y^3 - 4xz$

$f_z\,(x, y, z)= 4z^3 - 4xy$

Τα κρίσιμα σημεία θα βρεθούν από την επίλυση του συστήματος:

$$f_x\,(x, y, z) = 0, \qquad f_y\,(x, y, z)=0 \text{ και } f_z\,(x, y, z)=0$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4yz = 0 \\ 4y^3 - 4xz = 0 \\ 4z^3 - 4xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - yz = 0 \;\; (1) \\ y^3 - xz = 0 \;\; (2) \\ z^3 - xy = 0 \;\; (3) \end{cases}$$

Ας θεωρήσουμε ότι τα x, y, z είναι διάφορα του μηδενός. Τότε:

Η εξίσωση (2) δίνει: $x = \frac{y^3}{z}$ (4)

Αντικαθιστούμε την (4) στην (1) και έχουμε:

$$\left(\frac{y^3}{z}\right)^3 - yz = 0 \Leftrightarrow \frac{y^9}{z^3} - yz = 0 \Leftrightarrow y^9 - yz^4 = 0 \Leftrightarrow y(y^8 - z^4) = 0$$

$y^8 = z^4 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{y^8} \Leftrightarrow z = y^{\frac{8}{4}} \Leftrightarrow z = y^2$ (5)

Αντικαθιστούμε την (5) στην (4) και έχουμε:

$x = \frac{y^3}{y^2} \Leftrightarrow x = y$ (6)

Αντικαθιστούμε τις (5) και (6) στην (3) και έχουμε:

$$(y^2)^3 - y \cdot y = 0 \Leftrightarrow y^6 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(y^4 - 1) = 0$$

$$y^4 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1$$

- Για $y = 1$ από τις (5) και (6) θα έχουμε $z = 1$ και $x = 1$
- Για $y = -1$ από τις (5) και (6) θα έχουμε $z = 1$ και $x = -1$

Επομένως προκύπτουν συνολικά τρία σημεία:

$P_1(1,1,1)$, $P_2(-1,-1,1)$ και $P_3(0,0,0)$

Υπολογίζουμε τώρα τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$f_{xx}\ (x,y,z)$=$12x^2$,

$f_{yy}\ (x,y,z)$=$12y^2$

$f_{zz}\ (x,y,z)$= $12z^2$

$f_{xy}\ (x,y,z)$=$f_{yx}\ (x,y,z) = -4z$

$f_{xz}\ (x,y,z)$=$f_{zx}\ (x,y,z) = -4y$

$f_{yz}\ (x,y,z)$=$f_{zy}\ (x,y,z) = -4x$

Για το σημείο $P_1(1,1,1)$ έχουμε:

f_{xx} (1,1,1)=12, f_{yy} (1,1,1)=12, f_{zz} (1,1,1)= 12

f_{xy} (1,1,1)=f_{yx} (1,1,1) $= -4$.

f_{xz} (1,1,1)=f_{zx} (1,1,1) $= -4$

f_{yz} $(1,1,1)$=f_{zy} $(1,1,1) = -4$

Επομένως:

$\Delta_1 = f_{xx}(1,\, 1{,}1)$=12>0

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(1,\,1,1)} = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{(1,\,1,1)} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} +$

$4\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 12\cdot 128 + 4(-48 - 16) - 4(16 + 48) = 1536 - 512 =$
$1024 > 0$

Σύμφωνα με το κριτήριο δεύτερων παραγώγων στο σημείο $P_1(1,1,1)$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο υπολογίζουμε αντικαθιστώντας στην

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$
$$f(1,1,1) = 3 - 4 = -1$$

Για το σημείο $P_2(-1, -1,1)$ έχουμε:

f_{xx} (x, y, z)=$12x^2$, f_{yy} (x, y, z)=$12y^2$, f_{zz} (x, y, z)= $12z^2$

f_{xy} (x, y, z)=f_{yx} $(x, y, z) = -4z$

f_{xz} (x, y, z)=f_{zx} $(x, y, z) = -4y$

f_{yz} (x, y, z)=f_{zy} $(x, y, z) = -4x$

f_{xx} $(-1, -1,1)$=12, f_{yy} $(-1, -1,1)$=12, f_{zz} $(-1, -1,1)$= 12

f_{xy} $(-1, -1,1)$=f_{yx} $(-1, -1,1) = -4$

$f_{xz}\,(-1,-1,1)$=$f_{zx}\,(-1,-1,1)=4$

$f_{yz}\,(-1,-1,1)$=$f_{zy}\,(-1,-1,1)=4$

Επομένως:

$\Delta_1 = f_{xx}(-1,-1,1)$=12>0

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(-1,\,-1,1)} = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$

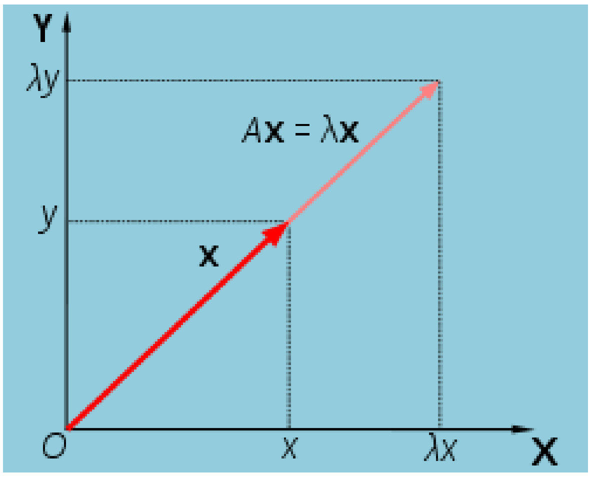
$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{(-1,\,-1,1)} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 12 & 4 \\ 4 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} +$
$4\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12\cdot 128 + 4(-48-16) + 4(-16-48) = 1536 - 512 = 1024 > 0$

Σύμφωνα με το κριτήριο δεύτερων παραγώγων στο σημείο $P_1(-1,-1,1)$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο υπολογίζουμε αντικαθιστώντας στην

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$
$$f(-1,-1,1) = 3 - 4 = -1$$

Για το σημείο $P_3(0,0,0)$ έχουμε: $\Delta_1 = f_{xx}(0,\,0{,}0)$=0

Που σημαίνει ότι το κριτήριο αυτό δεν μπορεί να μας δώσει αποτέλεσμα.



$f\binom{x}{y} = \lambda\binom{x}{y}$

$$\binom{4x-5y}{2x-3y} = \lambda\binom{x}{y}$$

$$\begin{cases} 4x-5y=\lambda x \\ 2x-3y=\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x-5y=0 \\ 2x+(-3-\lambda)y=0 \end{cases}$$

Για να έχει λύση το ομογενές σύστημα πρέπει

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0$$

Άρα λ=2 ή λ=-1

Έστω $A = (\alpha_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Το λ θα ονομάζεται ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή του A αν υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $n \times 1$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$ ώστε

AX=λX$\Leftrightarrow AX-\lambda X=\mathbb{O} \Leftrightarrow (AX-\lambda X)=\mathbb{O} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)X=\mathbb{O}$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases},$$

για να έχει το ομογενές σύστημα και μη μηδενικές λύσεις :

$$|A-\lambda I_n|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12}\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \mathrm{P}(\lambda)=0$$

Το διάνυσμα X ονομάζεται χαρακτηριστικό διάνυσμα ή ιδιοδιάνυσμα.

Το πολυώνυμο P(λ) ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Δεύτερο θεώρημα για τον προσδιορισμό προσήμου των τετραγωνικών μορφών

Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας. Η τετραγωνική συνάρτηση $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο

$\mathrm{T}(\vec{x}A\vec{x}^t)$, όπου $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

είναι **θετικά ορισμένη** (αντ. **αρνητικά ορισμένη**), αν και μόνο αν, όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές (αντ. αρνητικές).

Πρόσημο διαφορικού δεύτερης τάξη και ακρότατα

Εύρεση ακροτάτων με την χρήση της μεθόδου των ιδιοτιμών

Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

Λύση

Για το κρίσιμο σημείο $P_1(1,1,1)$ είχαμε υπολογίσει:

$$\Delta_3 = \left.\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}\right|_{(1,\,1{,}1)} = \begin{vmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{vmatrix}$$

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο των ιδιοτιμών επιλύουμε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 12-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(12-\lambda)\begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 \\ -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & 12-\lambda \\ -4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (12-\lambda)[(12-\lambda)^2 - 4^2] + 4[-4(12-\lambda) - 4^2] - 4[4^2 + 4(12-\lambda)]$$

$=(12-\lambda)(8-\lambda)(16-\lambda) - 16(16-\lambda) - 16(16-\lambda) =$

$(12-\lambda)(8-\lambda)(16-\lambda) - 32(16-\lambda) = (16-\lambda)[(12-\lambda)(8-\lambda) - 32]=$

$(16-\lambda)(96 - 12\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 32) =$

$(16-\lambda)(\lambda^2 - 20\lambda + 64) = 0$

$$\lambda = 16 \text{ ή } \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0$$

$\lambda = 16\ (\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha)$ ή $\lambda = 4$

Αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές το σημείο $P_1(1,1,1)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

Εφαρμογή εύρεσης ακροτάτων σε συνάρτηση τριών μεταβλητών

Ένα μονοπώλιο παράγει τρία αγαθά. Η συνάρτηση ζήτησης για κάθε αγαθό δίνεται από τις συναρτήσεις

$P_1 = 63 - 4Q_1$, $P_2 = 105 - 5Q_2$ και $P_3 = 75 - 6Q_3$

Επίσης, η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι C=20+15Q

1. Να γραφεί η εξίσωση των συνολικών εσόδων.
2. Να προσδιοριστούν οι ποσότητες για κάθε αγαθό, που πρέπει που πρέπει να πωληθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά έσοδα. Ποια είναι τα συνολικά έσοδα;

Λύση

Οι συναρτήσεις εσόδων για κάθε αγαθό θα είναι:

$$R_1(Q_1) = P_1Q_1 = 63Q_1 - 4{Q_1}^2$$

$$R_2(Q_2) = P_2Q_2 = 105Q_2 - 5{Q_2}^2$$

$$R_3(Q_3) = P_3Q_3 = 75Q_3 - 6{Q_3}^2$$

Η συνάρτηση κέρδους γίνεται

$\Pi(Q_1, Q_2, Q_3)$=$R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3) - C(Q)$

$$\Pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 63Q_1 - 4{Q_1}^2 + 105Q_2 - 5{Q_2}^2 + 75Q_3 - 6{Q_3}^2 - 20 - 15(Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

$$\Pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 48Q_1 - 4{Q_1}^2 + 90Q_2 - 5{Q_2}^2 + 60Q_3 - 6{Q_3}^2 - 20$$

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης του κέρδους:

$$\Pi_1(Q_1, Q_2, Q_3) = 48 - 8Q_1$$

$$\Pi_2(Q_1, Q_2, Q_3) = 90 - 10Q_2$$

$$\Pi_3(Q_1, Q_2, Q_3) = 60 - 12Q_3$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} 48 - 8Q_1 = 0 \\ 90 - 10Q_2 = 0 \\ 60 - 12Q_3 = 0 \end{cases}$$

Τελικά έχουμε $Q_1 = 6,\ Q_2 = 9,\ Q_3 = 5$

Στην συνέχεια βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$\Pi_{11} = -8,\ \Pi_{12} = 0, \Pi_{13} = 0, \Pi_{22} = -10,\ \Pi_{33} = -12,\ \Pi_{23} = 0$

1ος Τρόπος με υποορίζουσες

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -8 \cdot (-10) \cdot (-12) = -960 < 0$$

$$(-1)^3(-960) > 0$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}$=120>0

$$\Delta_1 = -8 < 0$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο το (6,9,5) είναι σημείο τοπικού μεγίστου, το οποίο βρίσκουμε αντικαθιστώντας στην

$\Pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 48Q_1 - 4{Q_1}^2 + 90Q_2 - 5{Q_2}^2 + 60Q_3 - 6{Q_3}^2 - 20$

$$\Pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 48 \cdot 6 - 4 \cdot 6^2 + 90 \cdot 9 - 5 \cdot 9^2 + 60 \cdot 5 - 6 \cdot 5^2 - 20 = 676$$

2ος τρόπος με ιδιοτιμές

Επιλύουμε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -12-\lambda \end{vmatrix} = (-8-\lambda)(-10-\lambda)(-12-\lambda) = 0$$

$\lambda = -8$ ή $\lambda = -10$ ή $\lambda = -12$

Αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές έχουμε σημείο τοπικού μεγίστου.

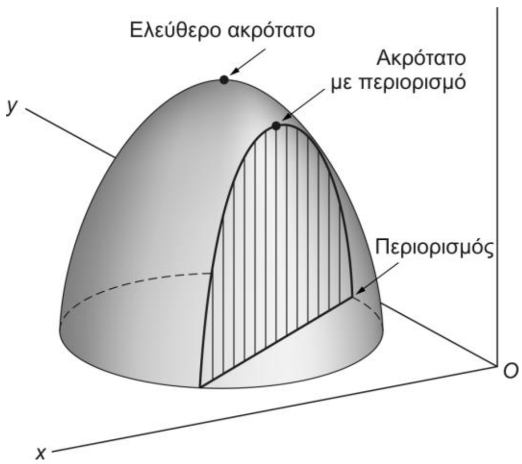
Ενότητα 2

Ακρότατες τιμές συνάρτησης με συνθήκες-Πολλαπλασιαστές Lagrange

Στα προβλήματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα, οι μεταβλητές της εκάστοτε συνάρτησης ήταν ανεξάρτητες. Όμως σε πολλά προβλήματα των μαθηματικών αλλά και σε πολλές εφαρμογές στην Βιολογία, στην οικονομία, στην Μηχανική και σε άλλες επιστήμες οι μεταβλητές της συνάρτησης συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση. Αν μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα, σε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς η ποσότητα του ενός από τα προϊόντα μπορεί να μεταβληθεί χωρίς αυτό να επηρεάσει τις ποσότητες των άλλων προϊόντων. Αν όμως υπάρχει μια σχέση που συνδέει τις ποσότητες των προϊόντων αυτών τότε μια μεταβολή στην ποσότητα του ενός θα επηρεάσει και τις άλλες ποσότητες των προϊόντων.

Αυτός είναι ένας περιορισμός που προφανώς θα επηρεάσει και το βέλτιστο σημείο.

Γεωμετρικά αυτό παριστάνεται:



Παράδειγμα 1

Να μελετηθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y) = xy$ με τον περιορισμό $x + y = 1$

ΛΥΣΗ

Είναι λογικό να λύσουμε την εξίσωση του περιορισμού ως προς την μια μεταβλητή και να αντικαταστήσουμε στην συνάρτησή μας.

Πράγματι με $y = 1 - x$ η $f(x,y)$ γίνεται $f_1(x) = x(1 - x)$

Αρκεί να μελετήσουμε την $f_1(x) = x - x^2$ ως προς τα ακρότατα.

Έχουμε $f_1{}'(x) = 1 - 2x$

Επομένως το κρίσιμο σημείο το βρίσκουμε με $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Με $f_1{}''(x) = -2 < 0$, στο σημείο $x = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Αλλά με $x = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $y = \frac{1}{2}$. Το τοπικό μέγιστο θα είναι $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Δεν είναι όμως πάντα εφικτό να λύνουμε τον περιορισμό ως προς τον ένα άγνωστο. Επίσης οι περιορισμοί μπορεί να είναι πάνω από ένας. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να βρεθεί ένας γενικός τρόπος, ένα θεώρημα έτσι ώστε να αντιμετωπίζονται όλες οι περιπτώσεις.

Έστω ότι αναζητούμε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f = f(x, y)$$

με τον περιορισμό $\varphi(x, y) = c$.

Από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων για την φ έχουμε:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \qquad (1)$$

Θεωρούμε την y ως συνάρτηση του x (μέσω της $\varphi(x, y) = c$) και παραγωγίζουμε την $f(x, y)$ ως προς x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x}{\varphi_y}$$

Πρόταση 2.1.

Τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης $f = f(x, y)$ που ικανοποιούν τον περιορισμό $\varphi(x, y) = c$ είναι λύσεις του συστήματος

$\varphi(x, y) = c, \qquad f_x\varphi_y - f_y\varphi_x = 0$

Η δεύτερη από τις παραπάνω εξισώσεις γράφεται:

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y} = \lambda$$

$f_x = \lambda\, \varphi_x$, $f_y = \lambda\, \varphi_y$

$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f} = \lambda\, \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}$

Πρόταση 2.2

Τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης $f = f(x, y)$ που ικανοποιούν τον περιορισμό $\varphi(x, y) = c$ είναι λύσεις του συστήματος

$\varphi(x, y) = c,\ \ f_x = \lambda\, \varphi_x, \quad f_y = \lambda\, \varphi_y$

Η μεταβλητή λ, η οποία προσδιορίζεται από το παραπάνω σύστημα ονομάζεται **πολλαπλασιαστής του Lagrange.**

Οι εξισώσεις αυτές θα μπορούσαν να έχουν προκύψει θεωρώντας την εξίσωση

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\big(c - \varphi(x, y)\big)$$

$$F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) - \lambda\varphi_x(x, y)$$

$$F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) - \lambda\varphi_y(x, y)$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi_x(x, y) - c$$

Τα κρίσιμα σημεία της $F(x, y, \lambda)$ θα βρεθούν από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \\ \qquad \varphi_x(x, y) - c = 0 \end{cases}$$

Για τις συνθήκες δεύτερης τάξης χρειαζόμαστε το διαφορικό δεύτερης τάξης της

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\big(c - \varphi(x, y)\big)$$

Το διαφορικό δεύτερης τάξης για ακρότατα χωρίς περιορισμούς, αποτελούσε όπως είδαμε τετραγωνική μορφή.

$$z = f(x, y)$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

$$d^2z = d(f_x dx + f_y dy) = f_{xx}dx^2 + f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_{yx}dydx$$

Τα dx και dy τα είχαμε θεωρήσει ως ανεξάρτητες μεταβλητές, κάτι που στα ακρότατα με περιορισμούς δεν μπορεί να γίνει αφού

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Leftrightarrow dy = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot dx$$

Δηλαδή το dx είναι ανεξάρτητο ενώ το dy είναι συνάρτηση του dx. Έτσι έχουμε

$$d^2z = d(f_x dx + f_y dy) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$

$$= \left[f_{xx}dx + (f_{yx}dy + f_y\frac{\partial}{\partial x}dy)\right]dx$$

$$+ \left[f_{xy}dx + (f_{yy}dy + f_y\frac{\partial}{\partial y}dy)\right]dy$$

$= f_{xx}dx^2 + f_{yx}dydx + f_y \frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y \frac{\partial(dy)}{\partial y}dy$

$= f_{xx}dx^2 + f_{yx}dydx + f_{yy}dy^2 + f_y \left[\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dy)}{\partial y}dy\right]$

$= f_{xx}dx^2 + 2f_{yx}dydx + f_{yy}dy^2 + f_y d(dy)$

$= f_{xx}dx^2 + 2f_{yx}dydx + f_{yy}dy^2 + f_y d^2y$

$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{yx}dydx + f_{yy}dy^2 + f_y d^2y$ (1)

Στην σχέση αυτή έχουμε επιπλέον τον όρο $f_y d^2y$ ο οποίος την εμποδίζει να είναι μια τετραγωνική μορφή.

Τώρα θα πάρουμε τον περιορισμό $\varphi(x,y) = c$ για να μπορέσουμε να μετασχηματίσουμε το διαφορικό δεύτερης τάξης σε τετραγωνική μορφή.
Όπως είδαμε το διαφορικό του είναι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

Το διαφορικό δεύτερης τάξης θα είναι:

$d(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{xx}dx^2 + 2\varphi_{yx}dydx + \varphi_{yy}dy^2 + \varphi_y d^2y = 0$

Επιλύουμε την εξίσωση αυτή ως προς d^2y και έχουμε

$$d^2y = -\frac{\varphi_{xx}dx^2 + 2\varphi_{yx}dydx + \varphi_{yy}dy^2}{\varphi_y}$$

$d^2y = -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_y}dx^2 - 2\frac{\varphi_{xy}}{\varphi_y}dxdy - \frac{\varphi_{yy}}{\varphi_y}dy^2$ (2)

Αντικαθιστούμε την σχέση (2) στην σχέση (1) και έχουμε:

$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{yx}dydx + f_{yy}dy^2 + f_y(-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_y}dx^2 - 2\frac{\varphi_{xy}}{\varphi_y}dxdy - \frac{\varphi_{yy}}{\varphi_y}dy^2)$

Μετά από αναγωγή ομοίων όρων παίρνουμε:

$d^2z = (f_{xx} - f_y\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_y})dx^2 + 2(f_{yx} - f_y\frac{\varphi_{xy}}{\varphi_y})dxdy + (f_{yy} - f_y\frac{\varphi_{yy}}{\varphi_y})dy^2$ (3)

Από την πρόταση 1 έχουμε

$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y} = \lambda$ (4)

Αντικαθιστούμε τις (4) στην (3) και έχουμε

$$d^2z = (f_{xx} - \lambda\varphi_{xx})dx^2 + 2(f_{yx} - \lambda\varphi_{xy})dxdy + (f_{yy} - \lambda\varphi_{yy})dy^2$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές είναι οι παράγωγοι δεύτερης τάξης της

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\big(c - \varphi(x, y)\big)$$

Δηλαδή

$F_{xx} = f_{xx} - \lambda\varphi_{xx}$

$$F_{xy} = f_{yx} - \lambda\varphi_{xy}$$

$$F_{yy} = f_{yy} - \lambda\varphi_{yy}$$

Τώρα όμως, παρότι έχουμε μια τετραγωνική μορφή, δεν μας ενδιαφέρει το πρόσημό της για όλες τις τιμές των dx και dy αλλά για εκείνες που ικανοποιούν τον περιορισμό

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$$

Έτσι θεωρούμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{\varphi_y} \\ \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{F_{xx}} & \boldsymbol{F_{xy}} \\ \boldsymbol{\varphi_y} & \boldsymbol{F_{xy}} & \boldsymbol{F_{yy}} \end{vmatrix}$$

Το προηγούμενο παράδειγμα:

■ Να μελετηθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x, y) = xy$ με τον περιορισμό $x + y = 1$

Αν ακολουθήσουμε την μέθοδο Lagrange έχουμε:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\big(c - \varphi(x, y)\big)$$

$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(1 - \mathrm{x} - \mathrm{y})$

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$$F_x(x, y, \lambda) = y - \lambda \;\; F_y(x, y, \lambda) = x - \lambda$$

$F_\lambda(x, y, \lambda) = 1 - \mathrm{x} - \mathrm{y}$

■ Τα κρίσιμα σημεία θα βρεθούν από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ 1 - \mathrm{x} - \mathrm{y} = 0 \end{cases}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις x=y=λ και αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση παίρνουμε:

$\lambda = \frac{1}{2}$ και $x = y = \frac{1}{2}$

Βρίσκουμε τώρα τις παραγώγους δεύτερης τάξης της $F(x, y, \lambda)$

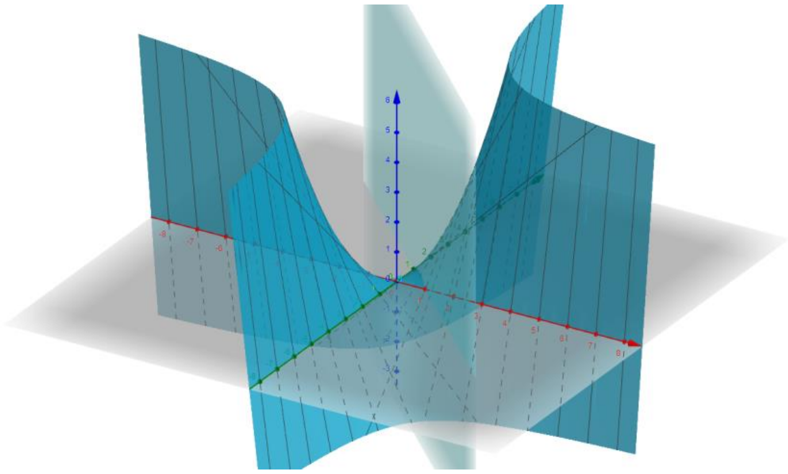
$$F_{xx}(x, y, \lambda) = 0 F_{yy}(x, y, \lambda) = 0$$

$F_{xy}(x, y, \lambda) = F_{yx}(x, y, \lambda) = 1$

Υπολογίζουμε τις $\varphi_x(x,y) = \varphi(x,y) = -1$,

Η πλαισιωμένη εσσιανή θα είναι

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{\varphi_y} \\ \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{F_{xx}} & \boldsymbol{F_{xy}} \\ \boldsymbol{\varphi_y} & \boldsymbol{F_{xy}} & \boldsymbol{F_{yy}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{2 > 0}$$



Παράδειγμα 2

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = xyz$$

με τον περιορισμό

$$\varphi(x,y,z): \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad \mu\varepsilon\ x,y,z > 0.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την συνάρτηση $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της $F(x,y,z,\lambda)$

$$F_x(x,y,z,\lambda) = yz - 2\lambda x$$

$$F_y(x,y,z,\lambda) = xz - 2\lambda y$$

$$F_z(x,y,z,\lambda) = xy - 2\lambda z$$

$F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$

Τα κρίσιμα σημεία θα προκύψουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} yz - 2\lambda x = 0 \ (1) \\ xz - 2\lambda y = 0 \ (2) \\ xy - 2\lambda z = 0 \ (3) \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \ (4) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Λύνουμε την (1) ως προς λ:

$\lambda = \frac{yz}{2x}$ (5)

και αντικαθιστούμε στις (2) και (3)

Από την (2) έχουμε $xz - 2\frac{yz}{2x}y = 0 \Leftrightarrow x - \frac{y^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$

Με $x, y, z > 0$ έχουμε $x = y$ (6)

Ομοίως, από την (3) θα πάρουμε $x = z$ (7)

Αντικαθιστώντας στην (4) τις (6) και (7) παίρνουμε

$$3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

Άρα $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (5) βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την

(x, y, z, λ)=$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})$

Επομένως το σημείο $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ είναι θέση πιθανού τοπικού ακροτάτου.

Θα συνεχίσουμε υπολογίζοντας τις παραγώγους δεύτερης τάξης της

$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$

$$F_{xx}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda$$

$$F_{yy}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda$$

$$F_{zz}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda$$

$$F_{xy}(x,y,z,\lambda) = F_{xy}(x,y,z,\lambda) = z$$

$$F_{yz}(x,y,z,\lambda) = F_{zy}(x,y,z,\lambda) = x$$

$$F_{zx}(x,y,z,\lambda) = F_{xz}(x,y,z,\lambda) = y$$

$$F_{\lambda x}(x,y,z,\lambda) = -2x$$

$$F_{\lambda y}(x,y,z,\lambda) = -2y$$

$$F_{\lambda z}(x,y,z,\lambda) = -2z$$

$$F_{xx}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ομοίως

$$F_{yy}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$F_{zz}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Και

$$F_{xy}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = F_{yz}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = F_{xz}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Σχηματίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή

$$|\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{4}}| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{\varphi_y} & \boldsymbol{\varphi_z} \\ \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{F_{xx}} & \boldsymbol{F_{xy}} & \boldsymbol{F_{xz}} \\ \boldsymbol{\varphi_y} & \boldsymbol{F_{xy}} & \boldsymbol{F_{yy}} & \boldsymbol{F_{yz}} \\ \boldsymbol{\varphi_z} & \boldsymbol{F_{zx}} & \boldsymbol{F_{zy}} & \boldsymbol{F_{zz}} \end{vmatrix}$$

$$|\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{4}}|\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

$$|\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{3}}| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{\varphi_y} \\ \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{F_{xx}} & \boldsymbol{F_{xy}} \\ \boldsymbol{\varphi_y} & \boldsymbol{F_{xy}} & \boldsymbol{F_{yy}} \end{vmatrix}$$

$$|\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{3}}|\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} > 0$$

Που σημαίνει ότι στο σημείο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Εφαρμογή στα οικονομικά Ι

Έστω ότι μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ολικών κερδών

$$\pi(x,y)=-4x^2-5y^2+20xy$$

Όπου x και y είναι οι παραγόμενες και πωλούμενες ποσότητες των προϊόντων Χ, Υ. Για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος Χ απαιτούνται 2 μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής και για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος Υ απαιτούνται 5 μονάδες του συντελεστή αυτού που διατίθεται σε 40 μονάδες.

Να βρεθεί το μέγιστη τιμή κέρδος υπό την παραπάνω συνθήκη.

ΛΥΣΗ

Ο περιορισμός περιγράφεται από την εξίσωση 2x+5y=40

Επομένως έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της

$$\pi(x,y)=-4x^2-5y^2+20xy$$

Υπό τον περιορισμό 2x+5y=40

Δημιουργούμε την εξίσωση Lagrange

Π $(x,y,\lambda)=-4x^2-5y^2+20xy+\lambda(40-2x-5y)$

Βρίσκουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης αυτής

$$\Pi_x=-8x+20y-2\lambda$$

$$\Pi_y=20x-10y-5\lambda$$

$$\Pi_\lambda=40-2x-5y$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -8x + 20y - 2\lambda = 0 & (1) \\ 20x - 10y - 5\lambda = 0 & (2) \\ 40 - 2x - 5y = 0 & (3) \end{cases}$$

μετά από απλοποίηση γίνονται

$$\begin{cases} -4x + 10y - \lambda = 0 & (1') \\ 4x - 2y - \lambda = 0 & (2') \\ 2x + 5y = 40 & (3') \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις δύο πρώτες κατά μέλη και έχουμε

λ=4y (4)

Αντικαθιστούμε την (4) στην (2΄) και έχουμε

4x-6y=0 μαζί με την (3΄) τελικά δίνουν:

$$x = \frac{15}{2}, \qquad y = 5, \quad \lambda = 20$$

Βρίσκουμε τώρα τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\Pi_{xx} = -8$$

$$\Pi_{yy} = -10$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = 20$$

$$\Pi_{\lambda x} = \varphi_x = -2$$

$$\Pi_{\lambda y} = \varphi_y = -5$$

Υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή $\overline{\mathbf{H}}$

$$|\overline{\mathbf{H}}| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{\varphi_y} \\ \boldsymbol{\varphi_x} & \boldsymbol{\Pi_{xx}} & \boldsymbol{\Pi_{xy}} \\ \boldsymbol{\varphi_y} & \boldsymbol{\Pi_{xy}} & \boldsymbol{\Pi_{yy}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-5} \\ -2 & \mathbf{-8} & \mathbf{20} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{20} & \mathbf{-10} \end{vmatrix} = 640 > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι στο σημείο με $x = \frac{15}{2}$, $y = 5$ έχουμε τοπικό μέγιστο.

$$\pi(\frac{15}{2}, 5) = 4000$$

Εφαρμογή στα οικονομικά ΙΙ

Η συνάρτηση εσόδων για δύο αγαθά δίνεται από την εξίσωση

$$TR = 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2$$

Να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων από κάθε αγαθό που πρέπει να πωληθούν προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το κέρδος όταν η εταιρεία υπόκειται σε περιορισμό προϋπολογισμού $5x + 10y = 80$.

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L = 36x - 3x^2 + 56y - 4y^2 + \lambda(80 - 5x - 10y)$$

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$$L_x = 36 - 6x - 5\lambda, L_y = 56 - 8y - 10\lambda, L_\lambda = 80 - 5x - 10y$$

Βήμα 2: Εξισώνουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης με μηδέν και επιλύουμε ως προς x, y και λ.

(Συνήθως εξυπηρετεί να απαλείψουμε το λ από τις δύο πρώτες εξισώσεις και μετά να επιλύουμε ως προς x και y)

$$\begin{cases} 36-6x-5\lambda=0 \\ 56-8y-10\lambda=0 \\ 80-5x-10y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda=36-6x \\ 56-8y-2(36-6x)=0 \\ 80-5x-10y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda=36-6x \\ -16+12x-8y=0 \\ 80-5x-10y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\lambda=36-6x \\ -16+12x-8y=0 \\ x=-2y+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda=36-6x \\ x=-2y+16 \\ -16+12(-2y+16)-8y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda=36-6x \\ x=-2y+16 \\ 176-32y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=5.5 \\ x=5 \\ \lambda=1.2 \end{cases}$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους και τον Εσσιανό πίνακα της συνάρτησης Lagrange:

$$L_{xx}=-6 \qquad L_{xy}=0 \qquad L_{x\lambda}=-5$$

$$L_{yy}=-8 \qquad L_{y\lambda}=-10 \qquad L_{\lambda\lambda}=0$$

$$H=\begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -5 & -10 \\ -5 & -6 & 0 \\ -10 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4: Εξετάζουμε αν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, σε κάθε κρίσιμο σημείο χωριστά.

(Εδώ επειδή έχω 3x3 πίνακα με έναν περιορισμό, αρκεί να κοιτάξω το πρόσημο της ορίζουσάς του)

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -10 \\ -5 & -6 & 0 \\ -10 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -8 \end{vmatrix} + (-10) \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -10 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 200 + 600 = 800$$

Αφού $|H| > 0$

Η συνάρτηση στο σημείο $(x^*, y^*) = (5, 5.5)$

παρουσιάζει τοπικά μέγιστη τιμή

$$TR^* = 36 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2 + 56 \cdot (5.5) - 4 \cdot (5.5)^2 = 292$$

Εφαρμογή στα Οικονομικά ΙΙΙ (Αριστοποίηση με 2 και περισσότερες μεταβλητές-περιορισμοί)

Μια χημική βιομηχανία παρουσιάζει την παρακάτω συνάρτηση κόστους $TC = 64L + 15E$ όπου L ο αριθμός των εργαζομένων που χρησιμοποιεί και E η ποσότητα ενέργεια μετρημένη σε ΤΙΠ (τόνους ισοδύναμου πετρελαίου). Η συνάρτηση παραγωγής της συγκεκριμένης επιχείρησης δίνεται από την παρακάτω σχέση $Q(L,E) = 160L + 103E - 4L^2 - 1.03E^2$. Η επιχείρηση επιθυμεί να παράγει 1000 μονάδες προϊόντος. Να βρεθούν οι ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών που χρησιμοποιεί που ελαχιστοποιούν το κόστος παραγωγής της.

Απάντηση:

Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε ότι η επιχείρηση επιθυμεί να παράγει 1000 μονάδες προϊόντος το οποίο και χρησιμοποιείται ως περιορισμός. Άρα ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση κόστος υπό τον περιορισμός των μονάδων παραγωγής και θα χρησιμοποιήσουμε για τον σκοπό αυτό την συνάρτηση Langrage.

$$L(L,E,\lambda) = 64L + 15E + \lambda\left(1000 - 160L - 103E + 4L^2 + 1.03E^2\right)$$

όπου λ ο πολλαπλασιαστής Lagrange.

Βήμα 1^{ο} : Υπολογίζουμε τις πρώτη τάξεως μερικές παράγωγους της συνάρτησης Lagrange ως προς τις μεταβλητές ενδιαφέροντος (L, E, λ). Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial L}=\frac{\partial\left(64L+15E+\lambda\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)\right)}{\partial L}=64+\lambda\left(-160+8L\right)$$
$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial E}=\frac{\partial\left(64L+15E+\lambda\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)\right)}{\partial E}=15+\lambda\left(-103+2.06E\right)$$
$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial \lambda}=\frac{\partial\left(64L+15E+\lambda\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)\right)}{\partial \lambda}=$$
$$=\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)$$

Βήμα 2ο : Για να υπολογίσουμε το (-α) πιθανό (-α) σημείο ακρότατου(-ων) θέτουμε τις πρώτες μερικές παράγωγους ίσες με το μηδέν. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial L}=\frac{\partial\left(64L+15E+\lambda\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)\right)}{\partial L}=64+\lambda\left(-160+8L\right)=0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial E}=\frac{\partial\left(64L+15E+\lambda\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)\right)}{\partial E}=15+\lambda\left(-103+2.06E\right)=0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial \lambda}=\frac{\partial\left(64L+15E+\lambda\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)\right)}{\partial \lambda}=$$
$$=\left(1000-160L-103E+4L^2+1.03E^2\right)=0 \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε την σχέση ανάμεσα σε εργασία και ενέργεια ως εξής: $\frac{\lambda\left(-103+2.06E\right)}{\lambda\left(-160+8L\right)}=\frac{15}{64}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow L=1.298E-34.933\ (4)$.

Αντικαθιστώντας τώρα την σχέση (4) στην σχέση (3) παίρνουμε την εξίσωση $E^2-100E+1958.196=0$ από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαφορετικές ποσότητες ενέργειας $E_1=73.276, E_2=26.723$. Για τις συγκεκριμένες ποσότητες ενέργειας παίρνουμε τις αντίστοιχες ποσότητες εργασίας από την σχέση (4) ως εξής: $L_1=45.568, L_2=-5.57$ Προφανώς η δεύτερη λύση απορρίπτεται ως αρνητική. Άρα μπορούμε με βάση την πρώτη λύση να υπολογίσουμε τις τιμές εργασίας και την παράμετρο λ ως εξής $E=73.276, \mathrm{L}=45.568, \lambda=0.312$ και να ισχυριστούμε ότι το συγκεκριμένο σημείο αποτελεί πιθανό ακρότατο σημείο του οποίου ωστόσο δεν γνωρίζουμε εάν είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.

Βήμα 3ο : Για να εξετάσουμε εάν πρόκειται για μέγιστο ή για ελάχιστο υπολογίζουμε τις δεύτερης τάξεως μερικές παράγωγους ως προς L, E της συνάρτησης κερδών. Θα έχουμε λοιπόν ότι:

$$\frac{\partial L^2(L,E,\lambda)}{\partial L^2}=\frac{\partial\left(64+\lambda\left(-160+8L\right)\right)}{\partial L}=2.06\lambda=0.643$$

$$\frac{\partial L^2(L,E,\lambda)}{\partial E^2}=\frac{\partial\left(15+\lambda\left(-103+2.06E\right)\right)}{\partial E}=8\lambda=2.496$$

$$\frac{\partial L(L,E,\lambda)}{\partial \mathrm{E}\partial L}=0$$

Για να αποφανθούμε εάν έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση την ποσότητα $\Delta=L_{LL}L_{EE}-\left(L_{LE}\right)^2$. Θα έχουμε ότι $\Delta=1.605>0$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Δ είναι θετική και συνεπώς οι ποσότητες $E=73.276, \mathrm{L}=45.568$ ελαχιστοποιούν το κόστος της παραπάνω επιχείρησης. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ανάλυση των ακρότατων σημείων με την χρήση της Lagrange παρουσιάζει ιδιαίτερη, κάτω από συνθήκες, περιπτωσιολογία. Ωστόσο για λόγους απλότητας δεν αναλύεται και δεν ζητείται από τους φοιτητές μας στην συγκεκριμένη ενότητα απλώς οι φοιτητές θα πρέπει να αρκεστούν στις περιπτώσεις όπου:

1. $\Delta=L_{LL}L_{EE}-\left(L_{LE}\right)^2>0, L_{EE}<0, L_{LL}<0$ και έχουμε μέγιστο
2. $\Delta=L_{LL}L_{EE}-\left(L_{LE}\right)^2>0, L_{EE}>0, L_{LL}>0$ και έχουμε ελάχιστο
3. $\Delta=L_{LL}L_{EE}-\left(L_{LE}\right)^2\leq 0$ δεν έχουμε απάντηση.

Τέλος να σημειωθεί ότι η εύρεση των ακρότατων γίνεται και με την βοήθεια της Εσσιανής μήτρας για τις περιπτώσεις των προβλημάτων 2,3 και 4. Ωστόσο και σε αυτό το σημείο οι φοιτητές μας μπορούν αν αρκεστούν στην χρήση της θεωρίας όπως αυτή έχει δοθεί.

Η περίπτωση των δύο περιορισμών

Έστω $f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, x, y, z ορισμένη σε ανοικτό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^3$ και κλάσης C^2 και οι συναρτήσεις φ_1,φ_2: $D\to\mathbb{R}$ κλάσης C^1.

Υποθέτουμε ότι για τις φ_1,φ_2 ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$\varphi_1(x,y,z)=c_1$ και $\varphi_2(x,y,z)=c_2$

Η συνάρτηση Lagrange θα είναι

$$\boldsymbol{F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\big(c_1-\varphi_1(x,y,z)\big)+\lambda_2\big(c_2-\varphi_2(x,y,z)\big)}$$

Σχηματίζουμε την ορίζουσα

$$\left|\bar{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z} \\ 0 & 0 & \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2z} \\ \varphi_{1x} & \varphi_{2x} & F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ \varphi_{1y} & \varphi_{2y} & F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ \varphi_{1z} & \varphi_{2z} & F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix}$$

Αν το $\boldsymbol{P_0}$ $(x_0, y_0, z_0, \lambda_{10}, \lambda_{20})$ είναι μια λύση του συστήματος

$\boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{F_{\lambda_1}} = \boldsymbol{F_{\lambda_2}} = 0$

Τότε

1. Αν $|\bar{\mathbf{H}}|(x_0, y_0, z_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}) > 0$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο
2. Αν $|\bar{\mathbf{H}}|(x_0, y_0, z_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}) < 0$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

Παράδειγμα

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

Υπό τους περιορισμούς $x^2 + y^2 = 2$ και $x + z = 1$

Λύση

Με $\varphi_1(x, y, x) = 2 - x^2 - y^2$ και $\varphi_2(x, y, x) = 2 - x - z$

Θεωρούμε την συνάρτηση Lagrange

$$\boldsymbol{F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(2 - x^2 - y^2) + \lambda_2(1 - x - z)}$$

■ Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους

$\boldsymbol{F_x = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2}$

$\boldsymbol{F_y = 1 - 2\lambda_1 y}$

$\boldsymbol{F_z = 1 - \lambda_2}$

$\boldsymbol{F_{\lambda_1} = 2 - x^2 - y^2}$

$\boldsymbol{F_{\lambda_2} = 1 - x - z}$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \boldsymbol{1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0} \\ \boldsymbol{1 - 2\lambda_1 y = 0} \\ \boldsymbol{1 - \lambda_2 = 0} \\ \boldsymbol{2 - x^2 - y^2 = 0} \\ \boldsymbol{1 - x - z = 0} \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι

$$P_1\left(0, \sqrt{2}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)$$

$$P_2\left(0, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -1\right)$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$\boldsymbol{F_{xx}} = \boldsymbol{-2\lambda_1}$, $\boldsymbol{F_{yy}} = \boldsymbol{-2\lambda_1}$, $\boldsymbol{F_{zz}}=0$

$\boldsymbol{F_{xy}} = \boldsymbol{F_{zx}} = \boldsymbol{F_{yz}}=0$

$\boldsymbol{\varphi_{1x}} = \mathbf{-2}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\varphi_{1y}} = \mathbf{-2}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\varphi_{1z}}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varphi_{2x}} = \mathbf{-1}$, $\boldsymbol{\varphi_{2y}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varphi_{2z}}=\mathbf{-1}$

Η ορίζουσα γίνεται

$$\left|\bar{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2x & -1 & -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ -2y & 0 & 0 & -2\lambda_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Τελικά

$|\boldsymbol{\bar{H}}|=8\lambda_1 x^2 - 8\lambda_2 y^2$

Υπολογίζουμε την τιμή της $|\boldsymbol{\bar{H}}|$ για κάθε ένα από τα σημεία

$$P_1\left(0, \sqrt{2}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)$$

$$P_2\left(0, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -1\right)$$

Για το $P_1\left(0, \sqrt{2}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)$ **είναι** $|\boldsymbol{\bar{H}}|=8\lambda_1 x^2 - 8\lambda_2 y^2 = -\frac{8}{\sqrt{2}} < 0$

Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο

$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}$

Για το $P_2\left(0, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -1\right)$ **είναι** $|\boldsymbol{\bar{H}}|=8\lambda_1 x^2 - 8\lambda_2 y^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} > 0$

Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο

$f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2}$.

Ενδεικτικές Ασκήσεις προς λύση

Α. Μια επιχείρηση εκτιμά ότι η ζήτηση για λογισμικό Η/Υ που διαθέτει στην αγορά δίνεται ως εξής: $Q = 280000 - 400P$ όπου P η τιμή του προϊόντος και Q η ποσότητα που ζητείται. Εάν το ετήσιο συνολικό κόστος από την παραγωγή Q μονάδων ισούται με $TC = 350000 + 300Q + 0.0015Q^2$

1. Να υπολογίσετε πόσες μονάδες θα πρέπει να παραχθούν ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της;
2. Σε ποια τιμή θα πρέπει να διαθέσει το προϊόν της και ποια θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης;

Β. Μια επιχείρηση που λειτουργεί σε μια ατελώς ανταγωνιστική αγορά έχει συναρτήσεις ζήτησης και κόστους $D(Q) = -\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 1300, C(Q) = -2Q^2 + 100Q + 2000$ αντίστοιχα $\left(0 \le Q \le 40\right)$.Να υπολογίσετε τον αριθμό των μονάδων και την τιμή που μεγιστοποιούνται τα συνολικά κέρδη. Να βρεθεί επίσης το πλεόνασμα του καταναλωτή εάν το προϊόν πωλείται στην τιμή που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

Γ. Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης: $Q_1 = 14 - 0.25P_1, Q_2 = 24 - 0.5P_2$. Η συνάρτηση κόστους της επιχείρησης είναι: $TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$. Να υπολογίσετε τα επίπεδα παραγωγής Q_1, Q_2 στα οποία μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης.

Δ. Η συνάρτηση κόστους μιας βιομηχανίας για την κατασκευή δύο προϊόντων Α και Β είναι $TC(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + 3Q_2^2 - Q_1Q_2$ όπου Q_1 και Q_2 οι παραγόμενες ποσότητες των Α και Β. Αν για την παραγωγή μίας μονάδας των Α και Β απαιτούνται 2kgr και r αντίστοιχα μιας πρώτης ύλης της οποίας η διαθέσιμη ποσότητα είναι 200 Kgr, να βρεθούν οι τιμές των Q_1 και Q_2 για τις οποίες ελαχιστοποιείται η συνάρτηση κόστους.

Ε. Μια βιοτεχνία παράγει ένα αντικείμενο που διατίθεται για κατανάλωση στη χώρα αλλά και στη διεθνή αγορά, παράγοντας ανά ημέρα x μονάδες για την εγχώρια αγορά με τιμή πώλησης y και z μονάδες για την διεθνή αγορά με τιμή πώλησης w. Στην εγχώρια αγορά η συνάρτηση ζήτησης είναι:$q_1 + p_1 = 100$ και στην διεθνή αγορά η συνάρτηση ζήτησης είναι: $3q_2 + 2p_2 = 330$. Αν το συνολικό κόστος κατασκευής των αντικειμένων είναι $g(q_1, q_2) = 1050 + 20(q_1 + q_2)$ να βρεθούν οι τιμές των q_1, q_2, p_1, p_2 για τις οποίες το κέρδος της βιοτεχνίας μεγιστοποιείται.