ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ-ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ)

Α. *Υπολογισμός Ορίου Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών-Συνέχεια*

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το παρακάτω όριο $\lim\limits_{(x,y)-->(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$.

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε τα επαναληπτικά όρια:

$$\lim_{(x)->(0)}\left[\lim_{(y)->(0)} \frac{x}{x+y}\right]=1$$

$$\lim_{(y)->(0)}\left[\lim_{(x)->(0)} \frac{x}{x+y}\right]=0$$

Αφού τα συγκεκριμένα όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

<u>Λύση</u>

Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής στο R^2 ως πηλίκο πολυωνυμικών και άρα συνεχών συναρτήσεων. Για να εξετάσουμε την συνέχεια της θα περιοριστούμε στο σημείο (0,0) και θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.

$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x||y|\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\delta^2}{2}$. Άρα εάν έχουμε ε>0 μπορούμε

να επιλέξουμε δ(ε,0) (π.χ $\delta(\varepsilon,0)=\sqrt{2\varepsilon}$ έτσι ώστε $\left|f(x,y)-f(0,0)\right|<\varepsilon$.

Β. *Υπολογισμός Μερικών Παραγώγων*

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x,y)=10x^2+2xy-6y^2, h(x,y)=\frac{2x^2}{3y^3}.$$

$$g(x,y)=e^{5x^3-2y^2}, r(x,y)=(x^2+5y)(2x+4y^7)$$

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με την θεωρία που γνωρίζουμε οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται κλασσικά όπως και η παράγωγος μίας μεταβλητής θεωρώντας τις υπόλοιπες σταθερές. Για παράδειγμα:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=20x+2y,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x-12y$$

Παράδειγμα 2 (Μόνοι σας)

Ομοίως για τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x,y)=5x^2+2xy-6y^2\sqrt{x+y}, h(x,y)=\frac{2x^2}{3y^3}e^{xy}$$

$$g(x,y)=e^{x+y}, r(x,y)=(x^2+5y)^{3/2}(2x+4y^7)$$

Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι $Q=AK^aL^{1-a}$ όπου K το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο και L η εργασία αντίστοιχα ενώ A, α σταθερές με A>0 και 0<α<1. Νε δείξετε ότι το οριακό προϊόν της εργασίας είναι θετικό και ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

<u>Λύση</u>

Το οριακό προϊόν της εργασίας είναι $\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-a)A\frac{K^a}{L^a} > 0$ ενώ η παράγωγος του ως προς την εργασία δίνεται ως εξής: $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -a(1-a)A\frac{K^a}{L^{a+1}} < 0$

Παράδειγμα 4 (Μόνοι σας)

Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα σε ποσότητες x,y και έχει συνάρτηση συνολικού κόστους $TC = 50 + x^3 + \ln(20+x)y + \frac{x}{x+y}$. Να υπολογίσετε τα οριακά κόστη των δύο προϊόντων.

Παράδειγμα 5

Η συνάρτηση ζήτησης για ένα προϊόν δίνεται από την παρακάτω σχέση $Q = 205g^{1.3}P^{-1.6}R^{0.7}$ όπου Q η ποσότητα του προϊόντος που ζητείται , Π η τιμή g το μέσο εισόδημα και R η τιμή άλλων αγαθών. Πως θα υπολογίζατε την ελαστικότητα των τιμών σε σχέση με την ζήτηση, την ελαστικότητα του εισοδήματος σε σχέση με την ζήτηση και την σταυροειδή ελαστικότητα ως προς την ζήτηση;

Λύση

Ζητείται να υπολογιστεί αρχικά η εξής μερική παράγωγος

$\frac{\partial Q}{\partial P} = ... = 205(-1.6)g^{1.3}P^{-2.6}R^{0.7} = ... = -1.6$ Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$\frac{\partial Q}{\partial g} = ... = 205(1.3)g^{0.3}P^{-2.6}R^{0.7} = ... = 1.3$. Θα μπορούσαμε ωστόσο να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ελαστικότητες με βάση την εξής σχέση:

$\ln Q = \ln 205 + 1.3\ln Y - 1.6\ln P + 0.71\ln R$ και να παραγωγίσουμε την προηγούμενη συνάρτηση π.χ $\frac{\partial \ln Q}{\partial \ln g}$.