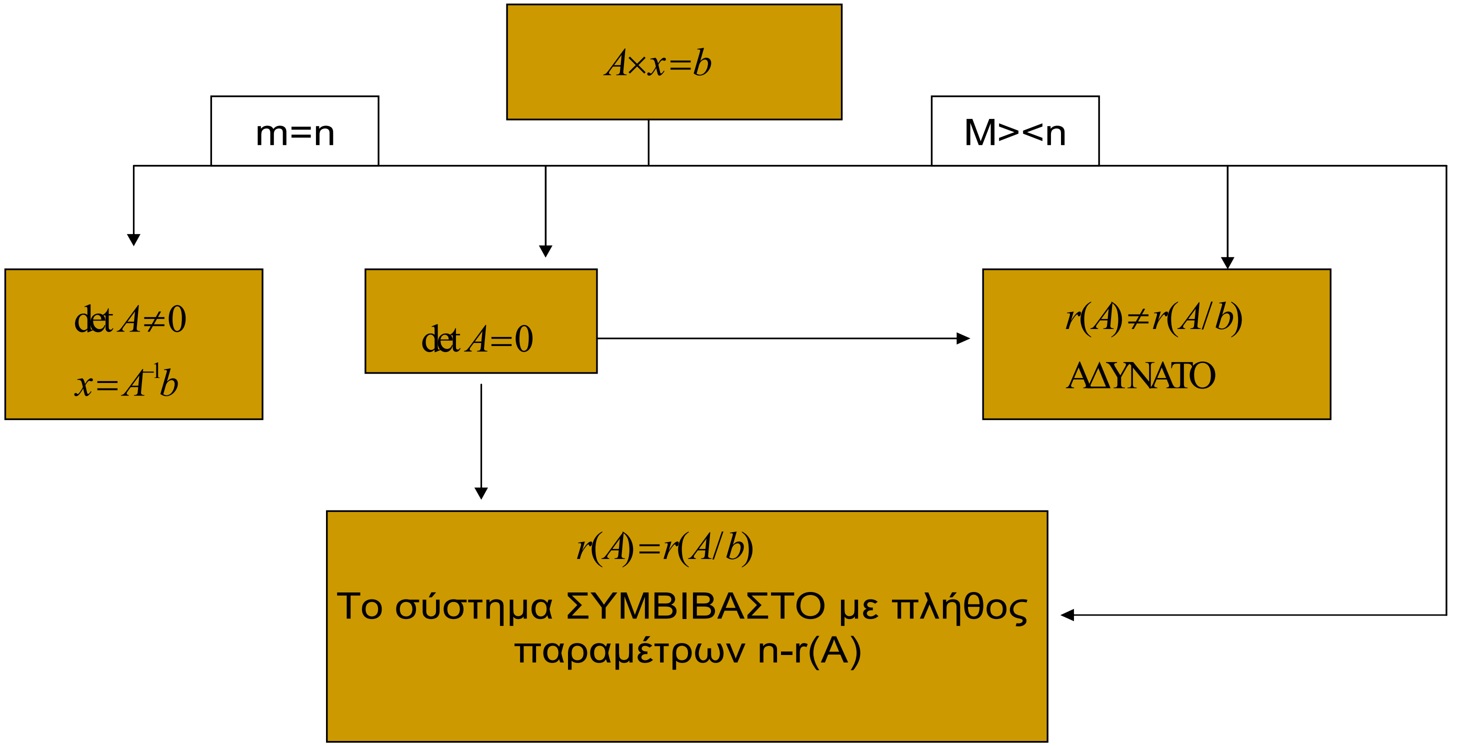
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ


$A \times x = b$
m=n
M><n
$\det A \neq 0$
$x = A^{-1} b$
$\det A = 0$
$r(A) \neq r(A/b)$
ΑΔΥΝΑΤΟ
$r(A) = r(A/b)$
Το σύστημα ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟ με πλήθος παραμέτρων n-r(A)

ΜΑΘΗΜΑ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ)

Παράδειγμα 1

Να λυθεί το σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$[a/b] \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Χρησιμοποιώ τις εξής γραμμοπράξεις:

- Πολλ/ζω την πρώτη γραμμη με (-1) και την προσθέτω στην δεύτερη.
- Πολλ/ζω την πρώτη γραμμή με (-5) και την προσθέτω στην Τρίτη γραμμή.
- Πολλ/ζω την δεύτερη γραμμή με (-2) και την προσθέτω στην Τρίτη.

Αρα $[a/b] \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$. Επειδή ωστόσο $r[a/b] = 3 \neq 2 = r(A)$ το σύστημα που

προκύπτει είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το σύστημα της μορφής:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 11$$

<u>Λύση</u>

Υπολογίζω την ορίζουσα την παραπάνω συσήματος

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Αρα συμφωνα με τον κανόνα Cramer-Rao θα έχουμε ότι οι λύσεις είναι οι εξής:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A})$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6, \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -6, \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 12$$

Αρα οι λύσεις του γραμμικού μαςσυστήματος θα είναι:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 1, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -1, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 2).$$

Παράδειγμα 3

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα.

$$4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Λύση

Παρατηρώ ότι ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων είναι μικρότερος απο αυτού των εξισώσεων. Αρα δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω την μέθοδο Cramer-Rao. Σχηματίζω τον επαυξημένο πίνακα [A/b].

$$[A/b] \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Εφαρμόζουμε πράξεις μεταξύ των γραμμών και καταλήγουμε σε μια κλιμακωτή μορφή πίνακα με την ακόλουθη μορφή.

$$[A/b] \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Επειδή όμως η τάξη του $r[A/b] = r[A] = 3$ το γραμμικό μας σύστημα έχει λύση και μάλιστα με πλήθος παραμέτρων $n - r[A] = 3 - 3 = 0$. Η λύση είναι μοναδική και υπολογίζεται απο το εξής σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 - x_2 + 3x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 4

Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα.

$$\begin{array}{lll} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 & x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 & 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ 0x_1 - 0x_2 - 0x_3 = 4 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 & x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{array}$$

<u>Λύση</u>

Το πρώτο σύστημα είναι αδύνατο ενώ το δεύτερο σύστημα παρουσιάζει απειρία λύσεων της μορφής $(x_1, x_2, x_3) = (2 - x_2 - x_3, x_2, x_3) x_2, x_3 \in R$. Τέλος το τρίτο σύστημα είναι αδύνατο αφού απο την πρώτη και την τρίτη εξίσωση παίρνουμε 5=4 πράγμα άτοπο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

Άσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου έχουν λύση τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda & x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 & x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{array}$$

Άσκηση 2

Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα.

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 & 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 & x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{array}$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες μονάδες ποσοτήτων q_1, q_2, q_3 σε κάθε ένα από τα προϊόντα I,II,III τα οποία προμηθεύεται ημερήσια μια επιχείρηση ώστε να ικανοποιεί τις ελάχιστες ανάγκες σε ζήτηση με βάση τον επόμενο πίνακα.

	I	II	III	Ελάχιστη Ημερήσια Ζήτηση
Τιμή Αγαθού I	0.3	0.1	0.4	1.5
Τιμή Αγαθού II	100	40	60	440
Τιμή Αγαθού III	1.6	2.2	1.4	10.6

Άσκηση 4

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$\alpha x_1 + b x_2 + c x_3 = \lambda$$
$$\alpha^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = \lambda^2$$