

Α ΜΕΡΟΣ: ΠΙΝΑΚΕΣ-ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ-ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Μια επιχείρηση χρησιμοποιεί τρεις εισροές K,L,R για να παράξει ένα τελικό προϊόν. Οι τιμές ανά μονάδα αυτών των εισροών είναι 20, 4, και 2 αντίστοιχα. Αν οι άλλες δύο εισροές θεωρούνται σταθερές, τότε η συνάρτηση του οριακού προϊόντος, που δείχνει την επίδραση στο προϊόν από μία μοναδιαία μεταβολή της μιας εισροής, δίνονται ως εξής:

$$MPK=200-5K, MPL=60-2L, MPR=80-R$$

Χρησιμοποιώντας το βασικό κανόνα για τον προσδιορισμό του άριστου συνδυασμού εισροών, δηλαδή η δαπάνη 1 για κάθε εισροή πρέπει να αποδίδει ποσότητα προϊόντος ίσης αξίας, υπολογίστε το συνδυασμό των εισροών που θα πρέπει να χρησιμοποιήσει η επιχείρηση για να μεγιστοποιήσει το προϊόν της αν έχει στη διάθεσή της μία δεδομένη δαπάνη ύψους 390.

Απάντηση: K=10, L=15, R=65

2. Να λυθεί το σύστημα

$$2x-3y-z-w=1$$

$$3x-y-5z+2w=3$$

$$10x-y-19z+7w=11$$

$$\Delta) x=2\kappa-5/7\mu+8/7, y=\kappa-1/7\mu+3/7, z=\kappa, w=\mu$$

3. Να υπολογιστούν τα α, β, γ έτσι ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση $(x,y,z)=(1,-1,1)$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

$$\alpha x + 2y - \gamma z = 1$$

$$3x - \beta y + \gamma z = 3$$

Απάντηση: $\alpha=2$ $\beta=1$ $\gamma=-1$

Σωστό είναι το δ

4. Να λύσετε το παρακάτω παραμετρικό σύστημα και να εξετάσετε εάν ισχύει κάποια από τις παρακάτω περιπτώσεις

$$\lambda x + y - z = 1$$

$$x + \lambda y - z = 1$$

$$-x + y + \lambda z = 1$$

Απάντηση: Για $\lambda=0$ Αδύνατο και για $\lambda=1$ έχει λύση τη $(\mu, 1, \mu)$

5. Να λύσετε το παρακάτω παραμετρικό σύστημα και να εξετάσετε εάν ισχύει κάποια από τις παρακάτω περιπτώσεις

$$x-2y+z+w=1$$

$$x-2y+z-w=-1$$

$$x-2y+z+5w=\lambda$$

Απάντηση: έχει λύση τη $(-8/7\mu, 3/7\mu, \mu)$

ΜΕΡΟΣ Β ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. Μία επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα που πωλούνται σε χωριστές αγορές με αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης $P_1=600-0.3Q_1$, $P_2=500-0.2Q_2$. Το κόστος παραγωγής του κάθε προϊόντος εξαρτάται από το άλλο και έτσι η επιχείρηση αντιμετωπίζει μια συνάρτηση συνολικού κόστους της μορφής $TC=16+1.2Q_1+1.5Q_2+0.2Q_1*Q_2$. Αν η επιχείρηση επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα συνολικά της κέρδη, πόσο πρέπει να πουλάει από κάθε προϊόν; Ποιο θα είναι το μέγιστο επίπεδο του κέρδους;

Απάντηση: 432797.02

2. Μία επιχείρηση πουλάει δύο προϊόντα που είναι μερικώς υποκατάστατα μεταξύ τους. Εάν η τιμή του ενός προϊόντος αυξηθεί τότε η ζήτηση για το υποκατάστατο προϊόν αυξάνεται. Οι τιμές των προϊόντων είναι p_1 και p_2 και οι αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης είναι $Q_1=517-3.5P_1+0.8P_2$, $Q_2=770-4.4P_2+1.4P_1$. Ποια θα είναι η τιμή που η επιχείρηση θα πρέπει να χρεώνει για κάθε προϊόν για να μεγιστοποιήσει τα έσοδα από τις πωλήσεις της;

Απάντηση: όταν $p_1=110$ και $p_2=115$

3. Μία επιχείρηση πουλάει το προϊόν της σε μία τέλεια ανταγωνιστική αγορά σε σταθερή τιμή 200 ανά μονάδα. Αγοράζει τις δυο εισροές κεφάλαιο K και εργασία L σε τιμές £42 ανά μονάδα και 5 ανά μονάδα αντίστοιχα και αντιμετωπίζει τη παρακάτω συνάρτηση παραγωγής

Ποιον συνδυασμό εισροών K και L πρέπει να χρησιμοποιήσει για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της;

$$q = 3.1K^{0.3}L^{0.25}$$

Απάντηση όταν L=563.3 και K=80.47

4. Μία επιχείρηση αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής Μπορεί να αγοράσει τις εισροές K και L για 400 και 200, ανά μονάδα, αντίστοιχα. Ποιος είναι ο συνδυασμός L και K που πρέπει να χρησιμοποιήσει για να μεγιστοποιήσει το παραγόμενο προϊόν αν η δαπάνη για την αγορά των συντελεστών είναι 6,000; $Q = 20K^{0.4}L^{0.6}$.

Απάντηση όταν L=18 και K=6

5. Η χρησιμότητα ενός καταναλωτή προκύπτει από την κατανάλωση δύο αγαθών A και B που προσδιορίζονται από την παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας, Εάν το αγαθό A κοστίζει 4 ανά μονάδα και το αγαθό B κοστίζει 10 ανά μονάδα και το εισόδημα του καταναλωτή είναι 600, ποιος είναι ο συνδυασμός A και B που θα μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του; $U = 40A^{0.25}B^{0.5}$.

Απάντηση όταν A=50 και B=40

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2$$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

Απάντηση Η συνάρτηση παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο P(1,0,0).

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = 1.5(x^2 - y^2), \text{ s.t } x^3 + y^3 = 1$$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

Απάντηση: Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο P(1,0).

9. Ένα σχολείο έχει συνάρτηση ωφέλειας $U_a(X_a, X_b) = 5\ln(X_a) + 10\ln(X_b)$ δύο υπηρεσίες, a (αθλήματα) και b (ενισχυτική διδασκαλία). Τα αθλήματα (a) κοστίζουν 200 ευρώ η μονάδα, ενώ η ενισχυτική διδασκαλία (b) κοστίζει 400 ευρώ ανά μονάδα. Αν το όριο προϋπολογισμού του σχολείου είναι 3600 ευρώ, τότε στο μέγιστο επίπεδο ωφέλειας ισχύει:

Απάντηση Τίποτα από τα παραπάνω

ΜΕΡΟΣ Γ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Εάν οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς σε μία ανταγωνιστική αγορά είναι $Q_d=50-0.2P$, $Q_s=-10+0.3P$ και ο ρυθμός προσαρμογής της τιμής όταν η αγορά είναι εκτός ισορροπίας είναι $P'(t)=0.4(Q_d-Q_s)$. Διατυπώστε και επιλύστε την σχετική διαφορική εξίσωση για να πάρετε μία συνάρτηση του P ως προς t με δεδομένο ότι η τιμή είναι 100 την χρονική περίοδο 0. Υπολογίστε την τιμή όταν $t=5$.

Απάντηση $P=112.640$

2. Σε ένα βασικό κενσιακό μακροοικονομικό υπόδειγμα ισχύει $C=360+0.8Y$ και $I=120$. Όταν το σύστημα είναι εκτός ισορροπίας ο ρυθμός προσαρμογής του Y είναι $Y'(t)=0.25(E-Y)$

Εάν το εθνικό εισόδημα είναι αρχικά 2,000 βρείτε μία συνάρτηση του διαθέσιμου εισοδήματος σε όρους του t . Ποια η τιμή του διαθέσιμου εισοδήματος όταν $t=10$;

Απάντηση: 2157.388

3. Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή ενός αγαθού είναι σταθερή και ίση με -4. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = -4$. Θεωρούμε ότι για $p=2$ έχουμε $q=4$. Τότε ισχύει η σχέση:

Απάντηση $\ln q = -4 \ln p + \ln 64$

4 Σε ένα οικονομικό μοντέλο ο ρυθμός μεταβολής της τιμής ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\frac{dp}{dt} + 10p = 8$ $P'(t)+10P(t)=8$ Ποια από τις παρακάτω αποτελεί την λύση της για $t=0$;

Απάντηση Καμία από τις παραπάνω

5. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $y'(x)+3xy(x)=xy^2$. Με την αντικατάσταση $y=1/u$ σε ποια ισοδύναμη γραμμική μετασχηματίζεται;

Απάντηση: $u'(x) - 3xu(x) = -x$ $u'(x)+3xu(x)=-x$

ΜΕΡΟΣ Δ ΔΙΑΦΟΡΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Ο βαθμός του παρακάτω πίνακα είναι $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Απάντηση: 3

2. Για τις ορίζουσες πινάκων ποια από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει;

Απάντηση: Οι στήλες ή οι γραμμές του πίνακα A είναι γραμμικώς εξαρτημένες αν και μόνο αν η ορίζουσα είναι μηδέν.

3. Δίνεται η συνάρτηση f που ορίζεται από τον τύπο: $f(x,y,z)=xyz$. Το διαφορικό πρώτης τάξης της f στο σημείο P(2,1,1) είναι:

Απάντηση: $df=dx+2dy+2dz$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x,y)=2x*y$ και $g(x,y)=x*x+y*y$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων αυτών είναι:

Απάντηση: $4(x+y)(y-x)$

5. Η συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό A δίνεται από $Q_1=200-3P_1+0.4y+0.2P_2$. Εάν $P_1=4$, $y=400$ και $P_2=15$. Η ελαστικότητα ζήτησης είναι:

Απάντηση: Τίποτα από τα παραπάνω

6. Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα αγαθό δίνονται από τις εξισώσεις: $P_d=30-0.75Q$, $P_s=50+0.25Q$. Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας είναι

Απάντηση: Τίποτα από τα παραπάνω.

7. Μία επιχείρηση πουλάει δύο ανταγωνιστικά προϊόντα των οποίων οι συναρτήσεις ζήτησης είναι $Q_1=120-0.8P_1+0.5P_2$, $Q_2=160+0.4P_1-12P_2$ Πώς θα επηρεάσει η τιμή του αγαθού 2 το οριακό έσοδο του αγαθού 1;

Απάντηση: μία μοναδιαία αύξηση στην τιμή p_2 θα προκαλέσει μία αύξηση του οριακού εσόδου του αγαθού 1 κατά 0.625

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο:
 $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 10$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

Απάντηση: Η μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (1,0) είναι 5.

9. Δίνεται το σύστημα $(\lambda+1)x-y=4$, $x+\lambda y=\lambda+3$ με λ πραγματικό αριθμό. Τότε ισχύει:

Απάντηση: Το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του λ .

10. Να υπολογιστεί η τιμή της εσσιανής ορίζουσας της παρακάτω συνάρτηση

$$f(x, y, z) = xyz^3$$

Στο σημείο $(1, -1, 1)$

Απάντηση: το 30.