



## ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

## ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

## ΘΕΜΑ 1 (3.5 Μονάδες)

1. Δίνεται ότι η ζήτηση για ενέργεια  $E_d$  στον κλάδο τροφίμων-ποτών μιας χώρας περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση  $E'_d = \frac{E_d}{t} + E_d^3$ . Εάν την χρονική στιγμή  $t=1$  η ενεργειακή ζήτηση ισούται 4 Mwh να υπολογίσετε την ενεργειακή ζήτηση και να εξετάσετε εάν συγκλίνει σε μια κατάσταση ισορροπίας όσο ο χρόνος αυξάνει (Μονάδες 1.5).

2. Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα  $Q_1, Q_2$  με βάση την παρακάτω συνάρτηση κόστους  $TC = 17 + 7Q_1 + 3Q_2 - 2Q_1^2 + 1.5Q_2^2 + 0.75Q_1^3$ . Να υπολογίσετε τις ποσότητες που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση κόστους της επιχείρησης όταν γνωρίζεται ότι ισχύει  $Q_1 + Q_2 = 20$  (Μονάδες 2).

## ΘΕΜΑ 2 (3.5 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα  $Q_1, Q_2, Q_3$  που ικανοποιούν τις παρακάτω

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1,$$

εξισώσεις:  $\lambda Q_1 + \lambda Q_2 + Q_3 = \lambda + 1.$

$$\lambda Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 = 2$$

Για ποιες τιμές του  $\lambda$  το σύστημα αυτό έχει λύσεις; (Μονάδες 2)

2. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητας  $U_1(y_1, y_2, x_1, x_2) = 3y_1 + y_2^2 - x_1 - 3x_2^3 = 0$   
 $U_2(y_1, y_2, x_1, x_2) = y_1^3 - 2y_2 + 2x_1^3 - x_2 = 0$   
για δύο άτομα που καταναλώνουν τέσσερα διαφορετικά αγαθά. Να υπολογίσετε τις μερικές



παραγώγους  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$  Εάν  $y_1 = x_w = 1, y_2 = 2, x_1 = 3$  τι σημαίνουν οι μερικές παράγωγοι που υπολογίσατε (χρησιμοποιείστε 2 δεκαδικά ψηφία) (Μονάδες 1.5).;

**ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)**

1. Ο παρακάτω πίνακας παριστάνει τις ποσότητες που πουλάει μια επιχείρηση ανά ώρα σε

τρεις διαφορετικές τοποθεσίες  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα

ιδιοδιανύσματα (τι αυτά σημαίνουν;) (Μονάδες 1.5).

2. Ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου  $K(t)$  ενός επενδυτικού οίκου της περίοδο της κρίσης

μεταβάλλεται με βάση τον χρόνο και ισούται με  $\frac{t^3 + K^3(t)}{tK^3(t)}$  (Χρησιμοποιείστε τον

μετασχηματισμό  $K(t) = w(t)t$ ) (Μονάδες 1.5).



## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

## ΘΕΜΑ 1

1. Η πρώτη διαφορική εξίσωση των θεμάτων είναι μια Bernoulli. Εάν ακολουθηθεί σωστά η μεθοδολογική της αντιμετώπιση θα φτάσουμε σε μια λύση της παρακάτω μορφής:

$$y(x) = x^{2/3} \left[ c + \frac{x^{4/3}}{2} \right].$$

Για το δεύτερο ερώτημα θα πρέπει να υπολογιστεί το παρακάτω όριο. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε όταν ο χρόνος αυξάνει η ενεργειακή κατανάλωση δεν συγκλίνει σε έναν αριθμό.

2. Η συνάρτηση που θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι η εξής:

$$TC = 17 + 7Q_1 + 3Q_2 - 2Q_1^2 + 1.5Q_2^2 + 0.75Q_1^3 + \lambda(Q_1 + Q_2 - 20). \text{ Υπολογίζοντας τις πρώτες}$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_1} = 7 - 4Q_1 + 2.25Q_1^2 + \lambda = 0$$

παραγώγους θα έχουμε:  $\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = 3 + 3Q_2 + \lambda = 0$  .

$$\frac{\partial TC}{\partial \lambda} = Q_1 + Q_2 - 20 = 0$$

Κάνοντας πράξεις υπολογίζουμε τις ποσότητες  $Q_1 = 4.937, Q_1 < 0, Q_2 = 15.063, \lambda = -48.189$  . Για να εξετάσουμε το γεγονός της ελαχιστοποίησης θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους δεύτερης

τάξης οι οποίες είναι  $\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_1^2} = -18.216, \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2} = 3, \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_1 Q_2} = 0$  και με βάση το τύπο έχουμε ότι η

διαφορά του γινομένου ισούται με 54,64 και συνεπώς η συνάρτηση μας μεγιστοποιείται.



### ΘΕΜΑ 2

1. Για  $\lambda=1$  το σύστημα είναι αδύνατο ενώ για  $\lambda=2$  το σύστημα έχει λύσεις της μορφής  $(2-k, k, -1)k \in R$ . Τέλος για τιμές του  $\lambda$  διαφορετικές του 2,1 οι λύσεις είναι της μορφής

$$Q_1 = 0, Q_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1}, Q_3 = \frac{1}{(1-\lambda)}$$

2.  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9x_2^2 \\ -3x_3^2 & -1 \end{vmatrix}}{|J|}$ ,  $\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6x_1^2 & -3x_3^2 \end{vmatrix}}{|J|}$ ,  $J = 1 + 54x_1^2x_2^2$ . Με απλή αντικατάσταση

υπολογίζουμε ότι  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1.48, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -0.75$

### ΘΕΜΑ 3

1. Οι ιδιοτιμές  $\lambda=1, \lambda=3$ . Τα ιδιοδιανύσματα  $Q_1 = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής  $K'(t) = \frac{t^3 + K^3(t)}{tK^2(t)}$ . Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον

προτεινόμενο  $w't + w = \frac{t^3 + (1+w^3)}{t^3w^2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow w't = \frac{1}{w^2}$ . Η τελική λύση της Δ.Ε έχει την

μορφή  $K^3(t) = 3t^3 [\ln(t) + c]$ .