



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΒΕΝΕΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ-ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΘΕΜΑ 1 (4 Μονάδες)

1. Η επιχείρηση παραγωγής λογισμικού υποκλοπών PCLANGARD έχει το μονοπώλιο για δύο βασικά της προϊόντα με αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης $Q_1 = \frac{40 - P_1}{3}$, $Q_2 = 7 - \frac{P_2}{4}$ ενώ εμφανίζει την παρακάτω συνάρτηση κόστους $TC = 4Q_1^2 + 8Q_1Q_2 + 5Q_2^2$. Να υπολογίσετε τις ποσότητες αλλά και τις αντίστοιχες τιμές στις οποίες η συγκεκριμένη επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της. (Μονάδες 2)

2. Η παραπάνω επιχείρηση χρησιμοποιεί την εξής συνάρτηση παραγωγής $Q = 150K^{1/2}L^{1/3}$ όπου K το επενδεδυμένο κεφάλαιο και L οι εργατοώρες. Ποιά η αλλαγή στην παραγωγή όταν το κεφάλαιο αυξηθεί κατά 5 εκ. ευρώ και οι εργατοώρες κατά 4 χιλιάδες γνωρίζοντας ότι η επιχείρηση χρησιμοποιεί 1000 χιλιάδες εργατοώρες και έχει επενδύσει 900 εκ. ευρώ (Μονάδες 1).

3. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής $Q = \frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK}$. Είναι ομογενής και τι βαθμού; (Μονάδες 1)

ΘΕΜΑ 2 (3 Μονάδες)

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ (Μονάδες 1)



2. Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα x_1, x_2, x_3 που ικανοποιούν τις παρακάτω

$$x_1 - \lambda x_2 + x_3 = \lambda,$$

εξισώσεις: $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, . Για ποιες τιμές του λ το σύστημα αυτό έχει λύσεις; (Μονάδες 2)

$$\lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 1$$

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

1) $dy + \frac{y}{x} dx = e^{2x} dx$

2) $3x \frac{dy}{dx} = y + \frac{x^2}{y}$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. Η συνάρτηση που θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι η εξής:

$\Pi(Q_1, Q_2) = -7Q_1^2 - 9Q_2^2 + 40Q_1 + 28Q_2 - 8Q_1Q_2$. Υπολογίζοντας τις πρώτες παραγώγους θα

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = -14Q_1 + 40 - 8Q_2 = 0$$

έχουμε: $\frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = -18Q_2 + 28 - 8Q_1 = 0$. Διαιρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις μπορούμε να έχουμε

ότι $Q_1 = 2,368$, $Q_2 = 0,382$. Για να εξετάσουμε το γεγονός της ελαχιστοποίησης θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης οι οποίες είναι

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -14, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} = -18, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -8 \text{ και με βάση το τύπο 'έχουμε ότι η διαφορά του γινομένου}$$

ισούται με 188 και συνεπώς η συνάρτηση μας μεγιστοποιείται.

$$2. \quad \Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L} \Delta L = 75K^{-1/2}L^{1/3} \Delta K + 50K^{1/2}L^{-2/3} \Delta L = \dots = 185$$

3. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για την ομογενή συνάρτηση αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ομογενής συνάρτηση 1^{ου} βαθμού.

ΘΕΜΑ 2

$$1. \quad \det X = (3abc - a^3 - b^3 - c^3)$$

2. Για $\lambda=0$ το σύστημα είναι αδύνατο ενώ για $\lambda=-1$ το σύστημα έχει λύσεις της μορφής $(-1-k, 0, k) k \in R$. Τέλος για τιμές του λ διαφορετικές του 0,-1 οι λύσεις είναι της

$$\text{μορφής } x_1 = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}, x_2 = -1, x_3 = \frac{-2}{\lambda(\lambda+1)}$$



ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική . Η λύση της που προκύπτει είναι

$y(t) = \frac{1}{x} \left[c + \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right]$. Αντίστοιχα η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι

Bernoulli με $y(x) = x^{2/3} \left[c + \frac{x^{4/3}}{2} \right]$.