ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 1 (4.5 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση παραγωγής σιδήρου έχει τρία διαφορετικά εργοστάσια Α, Β, Γ με ορισμένη παραγωγική ικανότητα τα οποία παράγουν τρία διαφορετικά είδη σιδήρου. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι σχετικές ποσότητες για κάθε εργοστάσιο σε σχέση με την ζήτηση για σίδηρο. Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες μονάδες ποσοτήτων $Q_{\mathrm{A}}, Q_{\mathrm{B}}, Q_{\Gamma}$ σε κάθε ένα από τα είδη σιδήρου Α, Β, Γ ώστε να ικανοποιούνται οι ελάχιστες ανάγκες σε ζήτηση με βάση τον επόμενο πίνακα για τις διαφορετικές τιμές του $\lambda \in R$ (*2 Μονάδες*);.

	Α	Β	Γ	Ανάγκες σε Ζήτηση Σιδήρου (Εγχώρια αγορά)
Q_A	1	-1	2	2
Q_B	2	1	5	λ+3
Q_Γ	1	11	6	λ^2+1

2. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ εκφράζει τις εισροές-εκροές μιας επιχείρησης που παράγει δύο διαφορετικά αγαθά . Να δείξτε ότι $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^2 = 0$ και να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα Α (*1 Μονάδα*).

3. Η επιχείρηση παραγωγής σιδήρου αποφασίζει να συνεχίσει την λειτουργία της με την παραγωγή των προϊόντων Α και Β μέσω των παραγωγικών συντελεστών κεφαλαίου και εργασίας ελαχιστοποιώντας την συνάρτηση κόστους
$TC = 17 + 7Q_A + 3Q_B - 2Q_A^2 + 3/2Q_B^2 + 0.75Q_A^3$ υπό τον περιορισμό ότι $Q_A + Q_B = 20$. Για ποιες ποσότητες το συνολικό κόστος της επιχείρησης ελαχιστοποιείται (*1.5 Μονάδες*);

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΘΕΜΑ 2 (2.5 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση εμφανίζει δύο παραγωγής $\begin{aligned}F_1(.) &= 2Y_1Y_2 + X_1 + X_2^2 = 0,\\ F_2(.) &= Y_1^2 + Y_2^2 + X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 = 0\end{aligned}$.

Ποια η ιακωβιανή ορίζουσα των δύο συναρτήσεων και τι σας δείχνει; (*1.25 Μονάδες*).

2. Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται ως εξής: $Q(K,L) = AK^aL^b, A, a, b$ σταθερές. Ποια η εσσιανή της παραπάνω συνάρτησης παραγωγής και τις μας δείχνει; Πότε η συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη (*1.25 Μονάδες*);

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Σε δύο διαφορετικές χώρες οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν το κατά πόσο γρήγορα συγκλίνει το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο.

1. Χώρα Α: $\kappa' t - k^2 + 2kt - 2k = t(t-1)$ με μερική λύση $k_1 = t, k(1) = 1$

2. Χώρα Β $3k' = k^{-1}t + kt^{-1}$ με $k(1) = 1$

Σε ποια χώρα θεωρείται ότι ο ρυθμός σύγκλισης του κεφαλαίου ανά εργαζόμενο θα επιτευχθεί ποιο γρήγορα τα επόμενα πέντε έτη;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ & ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$(A/b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1 & \lambda-1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda+3\end{array}\right)=$$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το λ:

Για λ=1 ο επαυξημένος πίνακας γράφεται ως $(A/b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=\ldots=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 7/3 & 2\\ 0 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

συνεπώς με λύσεις $(Q_{\mathrm{A}},Q_{\mathrm{B}},Q_{\Gamma})=(2-7/3\kappa,-1/3\kappa,\kappa)\kappa\in R$

Εάν λ=3

$$(A/b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=\ldots=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 7/3 & 8/3\\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$ με λύσεις της μορφής:

$$(Q_{\mathrm{A}},Q_{\mathrm{B}},Q_{\Gamma})=(\frac{8-7\kappa}{3},\frac{2-\kappa}{3},\kappa)\kappa\in R$$

.

2. Επειδή $\left(\mathrm{A}+\mathrm{I}\right)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ εύκολα αποδεικνύεται ότι $\left(\mathrm{A}+\mathrm{I}\right)^2=0$. Επειδή ισχύει

$\left(\mathrm{A}+\mathrm{I}\right)^2=0\Leftrightarrow\ldots.\Leftrightarrow\mathrm{A}\left(-\mathrm{A}-2\mathrm{I}\right)=\mathrm{I}$. Άρα $\mathrm{A}^{-1}=-\mathrm{A}-2\mathrm{I}$.

3. Οι ποσότητες που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση κόστους είναι $Q_A=5.22, Q_B=14.78$. Οι συνθήκες δεύτερης τάξης μας δείχνουν ότι $L_{Q_AQ_A}=19.49, L_{Q_BQ_B}=3, L_{Q_AQ_B}=0$ οπότε $L_{Q_AQ_A}L_{Q_BQ_B}-L^2_{Q_AQ_B}=58.47$. Συνεπώς το σημείο $Q_A=5.22, Q_B=14.78$ ελαχιστοποιεί την συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους υπό τον περιορισμό ότι $Q_A+Q_B=20$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΘΕΜΑ 2

1. $J = \left| \quad \right| = \ldots = 2\left(Y_2^2 - Y_1^2\right)$.

2. Η εσσιανή μήτρα δίνεται ως $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \alpha\left(\alpha-1\right)\mathrm{A}K^{a-2}L^{b} & abAK^{a-1}L^{b-1} \\ abAK^{a-1}L^{b-1} & b\left(b-1\right)\mathrm{A}K^{a}L^{b-2} \end{bmatrix}$. Είναι κοίλη (αυστηρά) όταν $\alpha\left(\alpha-1\right)\mathrm{A}K^{a-2}L^{b} < 0, \alpha b\left(1-\alpha-b\right)K^{2a-2}L^{2b-2} > 0$

ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι Riccati. Η λύση της που προκύπτει είναι $k(t) = t + \dfrac{2t^2}{2c-t^2}, c = {}^{3}\!/_{2}$. Αντίστοιχα η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι Bernoulli είναι $k(t) = \sqrt{t^{2/3}\left[c + \dfrac{t^{4/3}}{2}\right]}$ με c=1/2.