



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ
ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2011-ΟΜΑΔΑ Β

ΘΕΜΑ 1 (3 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση προσφέρει στους καταναλωτές τις τρία διαφορετικά προϊόντα Α, Β, Γ σε τιμές P_A, P_B, P_Γ . Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες μονάδες ποσοτήτων Q_A, Q_B, Q_Γ σε κάθε ένα από τα προϊόντα Α, Β, Γ ώστε να ικανοποιεί τις ελάχιστες ανάγκες σε ζήτηση με βάση τον επόμενο πίνακα για τις διαφορετικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

	A	B	Γ	Ανάγκες σε Ζήτηση Επενδυτικών Προϊόντων
P_A	λ	λ	λ	λ
P_B	λ	λ	1	$\lambda+1$
P_Γ	λ	2	2	2

2. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ εκφράζει τις εισροές-εκροές μιας επιχείρησης που παράγει δύο διαφορετικά αγαθά. Ποια η τιμή του πίνακα A^{2000} ;

ΘΕΜΑ 2 (4 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση έχει το μονοπώλιο δύο προϊόντων της με συναρτήσεις ζήτησης $Q_A = 25 - 0.3P_A, P_B = 210 - 5Q_B$. Εάν η συνάρτηση συνολικού κόστους δίνεται ως εξής $TC = 25Q_A + 30Q_B + 45$ για ποιες τιμές τα κέρδη της συγκεκριμένης επιχείρησης μεγιστοποιούνται; (2 Μονάδες).



2. Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται ως εξής:
 $Q(K, L) = 100KL - K^3L - 3L^2$ όπου L οι μονάδες εργατών και K το κεφάλαιο. Εάν ισχύει ότι
 $K(t) = 0.5t^2, L(t) = 2t + 1$ να βρεθεί η $\frac{dQ}{dt}$; Τι εκφράζει (1 Μονάδα);

3. Έστω η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης που ανήκει στον κλάδο παραγωγής πλαστικών $Q(K, L, E) = K + 5L + 4E - 0.04K^2 - 0.035L^2 - 0.015E^2$ όπου K το κεφάλαιο, L ο αριθμός εργαζομένων και E η ενέργεια που η επιχείρηση καταναλώνει. Να βρεθούν οι συναρτήσεις οριακής παραγωγής κάθε εισροής καθώς και οι αποδόσεις στην κλίμακα. (1 Μονάδα)

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Ο επενδυτικός οίκος POORICH εξετάζει την αγορά αμοιβαίων κεφαλαίων από δύο διαφορετικούς τραπεζικούς οργανισμούς Α, Β. Η απόδοση των αμοιβαίων δίνεται με βάση τον χρόνο σύμφωνα με τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

1. Ταμείο Α: $t^2 - y^2 = -1 - 2tyy'$ όταν ικανοποιείται η συνθήκη $y(1) = 5$

2. Ταμείο Β $y' = \frac{y^2 - t^2y - 2t}{(1 - t^3)}$ με μερική λύση $y_1 = at^2, a \in R, y(0) = -1$

Ποια θεωρείται ότι θα πρέπει να είναι η επιλογή της εταιρείας εάν θεωρήσει ότι ο χρόνος λήξης απόδοσης των αμοιβαίων κεφαλαίων είναι τα 12 έτη;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ & ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. Σχηματίζουμε το σύστημα με βάση ότι q_1, q_2, q_3 οι ζητούμενες ποσότητες.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$$

$$\lambda Q_1 + \lambda Q_2 + Q_3 = \lambda + 1. \text{ Η ορίζουσα } D = \dots = -(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

$$\lambda Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 = 2$$

Εάν $\lambda=2$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) = \dots = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ με λύσεις της μορφής:}$$

$$(Q_1, Q_2, Q_3) = (2 - \kappa, \kappa, -1)\kappa \in R.$$

Εάν $\lambda=1$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Εάν $\lambda \neq 1, 2$ έχουμε λύσεις της μορφής:

$$Q_1 = 0, Q_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1}, Q_3 = \frac{1}{1-\lambda}$$

2. Επειδή $A^2 = 36I \Rightarrow A^{2000} = 36^{1000}I$.

ΘΕΜΑ 2

1. Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι το εξής:

$$\Pi = TR - TC = P_A Q_A + P_B Q_B - TC = \dots = 32.5P_A + 48P_B - 0.3P_A^2 - 0.2P_B^2 - 1930. \text{ Εάν πάρουμε}$$

τώρα τις μερικές παραγώγους θα έχουμε ότι $P_A = 54.17, P_B = 120$. Ελέγχοντας την συνθήκη

ύπαρξης μεγίστου έχουμε ότι $\Delta = 0.24 > 0$.



2. Το ζητούμενο διαφορικό υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dQ}{dt} = 100t^2 + 76t - 1.75t^6 - 0.75t^5 - 12$$

3. Το συγκεκριμένο θέμα απαιτεί την χρήση απλών μερικών παραγώγων.

ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι Bernoulli. Η λύση της που προκύπτει είναι

$$y(t) = \sqrt{ct - t^2 + 1}. \text{ Εάν τώρα λάβουμε υπόψη την συνθήκη } y(1) = 5 \text{ έχουμε ότι } c = 25.$$

Αντίστοιχα η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι Riccati είναι

$$y(t) = -\frac{ct^2 + 1}{c + t}.$$