ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1 (2 Μονάδες)

Ενας τραπεζικός οργανισμός διαθέτει στους καταναλωτές του τρία διαφορετικά επενδυτικά προιόντα Α,Β,Γ σε τιμές P_A, P_B, P_Γ Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες μονάδες ποσοτήτων Q_A, Q_B, Q_Γ σε κάθε ένα από τα προϊόντα Α,Β,Γ ώστε να ικανοποιεί τις ελάχιστες ανάγκες σε ζήτηση με βάση τον επόμενο πίνακα $(\lambda \in R)$.

	Α	Β	Γ	Ανάγκες σε Ζήτηση Επενδυτικών Προιόντων
P_A	1	-1	2	2
P_B	2	1	5	λ+3
P_Γ	1	11	6	λ^2+1

ΘΕΜΑ 2 (2.5 Μονάδες)

Α. Μια επιχείρηση που παράγει μηνιαίως 500 τόννους χάλυβα με συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L) = 15K^{8/10}L^{2/10}$ προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος της, δεδομένου ότι οι τιμές των συντελεστών παραγωγής είναι $p_K = 30, p_L = 10$ ευρώ αντίστοιχα (K το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο και L ο αριθμός εργατών). Ποιο το ελάχιστο κόστος αυτής; (*1.5 Μονάδες*).

Β. Η συνάρτηση παραγωγής τουλίπας δίνεται ως εξής: $Q(X,Y) = 40x - x^2 + 60y - 2y^2$ όπου Χ οι μονάδες εργατών και Υ η καλλιεργούμενη έκταση. Ποιο το διαφορικό για αύξηση κατά μία μονάδα στα X, Y όταν $X = 10, Y = 0$; (*1 Μονάδα*).

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

1. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x^2+1)^{-1}$ όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες $y(0)=1, y'(0)=0$
2. $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$ με μερική λύση $y_1 = a/x, a \in R$

ΘΕΜΑ 4 (2.5 Μονάδες)

Α. Μια επιχείρηση παράγει ένα προιόν με βάση την συνάρτηση $Q(K,L) = AK^a L^{1-a}$ όπου K το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο, L η εργασία και A, a σταθερές με $A > 0, 0 < a < 1$. Να δειχθεί ότι το οριακό προιόν της εργασίας είναι θετικό καθώς και ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο είναι σταθερό. (*1 Μονάδα*)

Β. Παρακάτω δίνονται οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για το παγωτό ως εξής: $Q_D = 10 - 0.4P + 0.03Y, Q_S = -4 + 3.5P$. Κατά πόσο θα μεταβληθούν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας του παγωτού στην αγορά εάν το εισόδημα Υ μεταβληθεί κατά 200 ευρώ. (*1.5 Μονάδες*).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ & ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Σχηματίζουμε το σύστημα με βάση ότι q_1, q_2, q_3 οι ζητούμενες ποσότητες.

$Q_1 - Q_2 + 2Q_3 = 2$
$2Q_1 + Q_2 + 5Q_3 = \lambda + 3$. Ο επαυξημένος πίνακας
$Q_1 + 11Q_2 + 6Q_3 = \lambda^2 + 1$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & \lambda+3 \\ 1 & 11 & 6 & 53 \end{array}\right) = \ldots = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{array}\right)$$.εξετάζουμε τις ακόλουθες

περιπτώσεις με βάση την εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ που παράγει $\lambda = 1 \wedge \lambda = 3$:

1. Εάν $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 3$ τότε το σύστημα μας είναι αδύνατο.

2. Για $\lambda = 1$ ο τελευταίος επαυξημένσο πίνακς γράφεται ως εξής:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ και αντιστοιχεί στο σύστημα $$\begin{array}{l} Q_1 + 7/3\, Q_3 = 2 \\ Q_2 + 1/3\, Q_3 = 0 \end{array}$$ με λύσεις

$$\begin{array}{l} Q_1 = 2 - 7/3\, k \\ Q_2 = -1/3\, k \end{array} \quad k \in R.$$

3. Ομοίως για $\lambda = 3$ έχουμε όπως και πρίν απειρία λύσεων της μορφής

$$\left(\frac{8-7k}{3}, \frac{2-k}{3}, k\right) k \in R.$$

ΘΕΜΑ 2

Α. Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι το εξής: $$\begin{array}{l} \min 30K + 10L \\ s.t 15K^{0.8}L^{0.2} = 500 \end{array}.$$

Σχηματίζουμε την συνάρτηση Langrange $L(K,L,\lambda)=30K+10L+\lambda(500-15K^{0.8}L^{0.2})$ με λύσεις $K=0 \vee K=35, L=0 \vee L \simeq 26$. Υπολογίζουμε την εσσιανή ορίζουσα:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 12K^{-0.2}L^{0.2} & 3K^{0.8}L^{0.2} \\ 12K^{-0.2}L^{0.2} & 12K^{-0.2}L^{0.2} & -2.4\lambda K^{-0.2}L^{-0.8} \\ 3K^{0.8}L^{0.2} & -2.4\lambda K^{-0.2}L^{-0.8} & -2.4\lambda K^{0.8}L^{-1.8} \end{pmatrix}=...<0$$

Το ελάχιστο κόστος υπολογίζεται ως εξής: $TC(35,26)=.....=1310$ ευρώ.

Β. Το ζητούμενο διαφορικό υπολογίζεται ως εξής:

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial X}dx+\frac{\partial Q}{\partial Y}dy=....=40$$

ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική $2^{ης}$ τάξης μη ομογενής. Η λύση της που προκύπτει από την μερική και την γενική λαμβάνοντας υπόψη και τις συνθήκες $y(0)=1, y^{'}(0)=0$ δίνεται ως εξής $y(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^{2x}+(Arc\tan x)xe^{2x}$.

Αντίστοιχα η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης είναι $y(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{c-x^2}$.

ΘΕΜΑ 4

Α. Υπολογίζουμε τα εξής:

$$\frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}=(1-a)A\frac{K^a}{L^a}>0 \text{ καθώς } a<1 \text{ και } \frac{\partial Q^2(K,L)}{\partial L^2}=-a(1-a)A\frac{K^a}{L^{a+1}}<0$$

Β. Υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα από το παραπάνω σύστημα

$$f(*)=Q-10+0.4P-0.03Y$$
$$G(*)=Q+4-3.5P$$

ως εξής: $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial Q} & \dfrac{\partial f}{\partial P} \\ \dfrac{\partial G}{\partial Q} & \dfrac{\partial G}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 1 & -3.5 \end{pmatrix} = -3.9$. Δημιουργώ την εξής σχέση

$J \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial Y} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial Y} \end{pmatrix}$ από την οποία μπορώ να υπολογίσω τα $\begin{matrix} \dfrac{\partial Q}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial Y} \end{matrix}$.

$\dfrac{\partial Q}{\partial Y} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0.03 & 0.4 \\ 0 & -3.5 \end{vmatrix}}{|J|} = 0.026$. Με τον ίδιο τρόπο $\dfrac{\partial P}{\partial Y} = ... = 0.0076$. Εάν τώρα υπολογίσουμε την μεταβολή του εισοδήματος κατά 200 ευρώ θα έχουμε ότι $\dfrac{\partial P}{\partial Y} = 0.769, \dfrac{\partial Q}{\partial Y} = 2.6$