Εισαγωγή στους Η/Υ

Ενότητα 4: Συστήματα Αρίθμησης

Μανώλης Τζαγκαράκης, Βικτωρία Δασκάλου
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- Να παρουσιάσει τη θεωρία των συστημάτων αρίθμησης
- Να παρουσιάσει τους τρόπους μετατροπής αριθμών από ένα σύστημα αρίθμησης σε άλλο
- Να εξηγήσει τη σημασία των συστημάτων αρίθμησης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Εισαγωγή
2. Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
3. Συστήματα αρίθμησης με βάση R
4. Μετατροπές αριθμών από ένα σύστημα αρίθμησης σε άλλο
    1. Μετατροπή αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στο σύστημα αρίθμησης με βάση R
    2. Μετατροπή αριθμών του συστήματος αρίθμησης με βάση R στο δεκαδικό
    3. Μετατροπή αριθμών του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος σε αριθμούς του συστήματος αρίθμησης με βάση R
    4. Μετατροπή αριθμών του συστήματος αρίθμησης με βάση R με κλασματικό μέρος στο δεκαδικό
    5. Πράξεις αριθμών στα συστήματα αρίμησης με βάση R
5. Γιατί συστήματα αρίθμησης;

Εισαγωγή

Σύστημα Αρίθμησης

- Τί είναι ένα Σύστημα Αρίθμησης (ή Αριθμητικό Σύστημα)
  - **Σύστημα γραφής** για την **έκφραση συμβόλων** που **αναπαριστούν αριθμούς**
  - Σήμερα γίνεται χρήση του **δεκαδικού ή αραβικού αριθμητικού συστήματος** για την αναπαράσταση αριθμών.
  - **Δεν** ήταν πάντα έτσι
    - Αρχαίοι Έλληνες
    - Αρχαίοι Ρωμαίοι

Σύστημα Αρίθμησης (2)

- Αρχαίοι Έλληνες
  - Χρήση **γραμμάτων της αλφαβήτου** για την αναπαράσταση αριθμών
  - Απουσία συμβόλου για το μηδέν (0)
  - **Εκτέλεση πράξεων δύσκολη** (πρόσθεση, αφαίρεση, διαίρεση, κλπ)
  - **Δύσκολη η διδασκαλία των πράξεων** μιας και δεν υπήρχε τυποποιημένη αναπαράσταση αριθμών

Σύμβολο	Ποσότητα που εκφράζει
α	1
β	2
γ	3
ιδ	14
τ	300

Πίνακας 1: Ορισμένα σύμβολα για την αναπαράσταση αριθμών στην αρχαία Ελλάδα

Σύστημα Αρίθμησης (3)

- Αρχαίοι Ρωμαίοι
  - **Χρήση γραμμάτων** της αλφαβήτου για την αναπαράσταση αριθμών
  - **Απουσία** συμβόλου για το μηδέν (0)
  - **Πρόσθεση ή αφαίρεση ψηφίων** ανάλογα με τη θέση τους για την ερμηνεία παραστάσεων
    - **VIII -> 5 (V) + III (3) = 8 (ερμηνεία: 3 μετά το πέντε)**
    - **IV -> 5 (V) – 1 (I) = 4 (ερμηνεία : 1 πριν το 5)**
  - **Εκτέλεση πράξεων δύσκολη** (πρόσθεση, αφαίρεση, διαίρεση, κλπ)
  - Δύσκολη η **διδασκαλία των πράξεων** μιας και δεν υπήρχε τυποποιημένη αναπαράσταση αριθμών

Σύστημα Αρίθμησης (4)

- Σήμερα γίνεται χρήση του λεγόμενου **δεκαδικού συστήματος αρίθμησης**
  - **Δέκα βασικά ψηφία (αλφάβητο)**, που εκφράζουν ποσότητες: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
  - **Συνδυασμός των δέκα ψηφίων** για τον σχηματισμό παραστάσεων που ερμηνεύονται ως αριθμοί/ποσότητες π.χ. 1082, 290, 678, 31
  - **Η θέση του ψηφίου εντός του αριθμού αλλάζει την ερμηνεία του. Εκμεταλλεύεται** τη **σημειολογία της θέσης** (γι’αυτό λέγεται θεσιακό σύστημα- positional system).
    - Π.χ. Οι αριθμοί 12 και 21 . Τα ίδια ψηφία 1 και 2 στους δύο αυτούς αριθμούς, αλλά ερμηνεύονται με διαφορετικό τρόπο
    - Το ίδιο σύμβολο π.χ. 4 μπορεί να εκφράσει διαφορετικές τάξεις μεγέθους (δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κλπ), ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό

Σύστημα Αρίθμησης (5)

- Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
  - Με **10 ψηφία** μπορούν να **εκφραστούν οσοδήποτε μεγάλοι αριθμοί**, λόγο της σημασίας της θέσης τους
  - **Συνεπής** και **μονοσήμαντη αναπαράσταση** αριθμών
  - Αναπαράσταση όλων των αριθμών
    - **Φυσικοί** (μη αρνητικούς): 0,1,100,34556 ...
    - **Αρνητικοί**: -2, -2778, ...
    - **Ρητοί**: -249, -1, 0, ¼ , - ½
    - **Άρρητοι:** π, ε
  - Πολύ **εύκολη η εκτέλεση πράξεων** (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλ/σμός, διαίρεση)
  - **Πολύ εύκολη η διδασκαλία των πράξεων** λόγω της τυποποίησης των πράξεων αυτών (δλδ ύπαρξη σαφών κανόνων που λειτουργούν για όλους τους αριθμούς)

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Ερμηνεία αριθμών

- Μία ποιο αναλυτική ματιά στους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και πως ερμηνεύονται

Παράδειγμα: δεκαδικός αριθμός 642

σημαίνει 600 + 40 + 2 (=642)

- Κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του εκφράζει πόσα **πολλαπλάσια δεκάδων** έχουμε. Για τον 642
  - 2 μονάδες (=καμία δεκάδα)
  - 4 δεκάδες (=1 δεκάδα = 10 μονάδες)
  - 6 εκατοντάδες (=1 εκατοντάδα =10 δεκάδες)

Ερμηνεία αριθμών (2)

24501

1 μονάδα (**καμία δεκάδα**)

0 **δεκάδες** (=0 φορές **10 μονάδες**)

5 εκατοντάδες (=5 φορές **10 δεκάδες**)

4 χιλιάδες (=4 φορές **10 εκατοντάδες**)

2 δεκάδες χιλάδες (= 2 φορές **10 χιλιάδες**)

- Το δεκαδικό σύστημα δίνει έμφαση στην **ομαδοποίηση ανά δεκάδες** σε κάθε θέση του αριθμού. Κάθε **ψηφίο** μας λέει **πόσες τέτοιες ομαδοποιήσεις δεκάδων** έχουμε:
  - μονάδα = καμία δεκάδα
  - δεκάδα = **10** μονάδες (ομαδοποίηση ανα 10 των μονάδων)
  - εκατοντάδα = **10** δεκάδες (ομαδοποίηση ανα 10 των δεκάδων)
  - χιλιάδα = **10** εκατοντάδες (ομαδοποίηση ανα 10 των εκατοντάδων)
  - δεκάδα χιλάδα = **10** χιλιάδες (ομαδοποίηση ανα 10 των χιλιάδων)

Ερμηνεία αριθμών (3)

- Εναλλακτικοί τρόποι γραφής αριθμού δεκαδικού συστήματος
  - Δίνοντας **έμφαση** στο τί εκφράζει κάθε θέση

$$\mathbf{29872 = 20000 + 9000 + 70 + 2 =}$$

$$\mathbf{= 2*10^4+9*10^3+8*10^2+7*10^1+2*10^0}$$

Θέση ψηφίου εντός αριθμού

- Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης λέγεται ότι έχει **βάση το 10**, γιατί
  - Παρέχει 10 σε πλήθος σύμβολα {**0,1,2,3,4,5,6,7,8,9**}, **το αλφάβητο**, με τα οποία σχηματίζονται οι αριθμοί.
  - Τα ψηφία εκφράζουν τις ποσότητες από 0 έως και 9 (10 – 1 => **βάση μείον 1**)
  - Σε έναν αριθμό, κάθε ψηφίο αναφέρει πόσες ομαδοποιήσεις δεκάδων υπάρχων εντός του αριθμού (γι’αυτό πολ/σμός με μία δύναμη της βάσης 10)

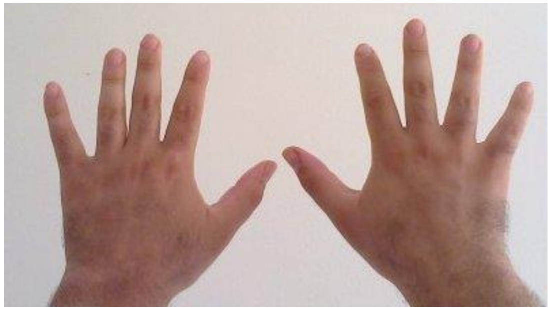
Ερμηνεία αριθμών (4)

- Για έναν αριθμό στο δεκαδικό σύστημα με n σε πλήθος ψηφία $\mathbf{d_{n-1}\ldots d_2d_1d_0}$:

$$\mathbf{d_{n-1}\ldots d_2d_1d_0 = d_0*10^0 + d_1*10^1 + d_2 10^2 + \ldots + d_{n-1}*10^{n-1} =}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} d_i * 10^i$$

- Το **ψηφίο d_0** είναι το πλέον δεξιό ψηφίο του αριθμού και καλείται **λιγότερο σημαντικό ψηφίο (πολ/ται με τη μικρότερη δύναμη)**, ενώ το ψηφίο d_{n-1} το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού και καλείται το **περισσότερο σημαντικό ψηφίο (πολ/ται με τη μεγαλύτερη δύναμη)**.
- **Γιατί αυτή η έμφαση** με τον αριθμό **10** (10 ψηφία, ομαδοποίηση ανά δεκάδες);



Εικόνα 1: Δέκα δάκτυλα ως έμνευση του δεκαδικού συστήματος,

Πηγή: By Maher27777 (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons

Ερμηνεία αριθμών (5)

- Το δεκαδικό σύστημα είναι **ένα από τα πολλά** συστήματα αρίθμησης που υπάρχουν!
- Υπάρχουν
  - **Δυαδικό σύστημα** αρίθμησης, βάση=2
  - **Τριαδικό σύστημα** αρίθμησης, βάση=3
  - **Οκταδικό σύστημα** αρίθμησης, βάση=8
  - **Δεκαεξαδικό σύστημα** αρίθμησης, βάση=16
  - ...

Συστήματα αρίθμησης με βάση R

Συστήματα αρίθμησης με βάση R

- Γενίκευση ορισμού συστήματος αρίθμησης με βάση R
- Γενικά, όταν λέμε «**σύστημα αρίθμησης με βάση το R»** εννοούμε τα εξής:
  I. Ότι το σύστημα αρίθμησης έχει **R σε πλήθος βασικά σύμβολα** (το αλφάβητο), με το οποίο δημιουργούνται οι αριθμοί
  II. Κάθε ένα από τα **R βασικά σύμβολα,** εκφράζει τις **ποσότητες από 0 έως και R-1**
  III. Σε κάθε αριθμό του συστήματος αρίθμησης, **κάθε θέση του ψηφίου** από το αλφάβητο αυτό, εκφράζει πόσες **ομαδοποιήσεις R-άδων περιέχονται στον αριθμό**
     I. Κατ’ αντιστοιχία με τις ομαδοποιήσεις ανα δεκάδες στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Δυαδικό σύστημα αρίθμησης

- Παράδειγμα συστήματος αρίθμησης: το **δυαδικό σύστημα αρίθμησης**, **βάση=2** (R=2). Αυτό σημαίνει:
  - Υπάρχουν **2 (R) σε πλήθος** βασικά σύμβολα (το αλφάβητο)
  - Τα σύμβολα αυτά **αναπαριστούν τις ποσότητες από 0 έως και R-1 = 2-1 =1**. Έτσι τα σύμβολα θα είναι το **σύνολο {0,1}**
  - Αριθμοί που εκφράζονται με το αλφάβητο αυτό μας λένε **πόσες μονάδες, δυάδες (=2 μονάδες), τετράδες (=2 δυάδες), οκτάδες (=2 τετράδες), δεκαεξάδες (=2 οκτάδες) κλπ** υπάρχουν στον αριθμό

Δυαδικό σύστημα αρίθμησης (2)

- Παράδειγμα αριθμού στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης (R=2): **10111**
  - **Προσοχή! Δεν είναι** ο δεκαδικός αριθμός «Δέκα χιλιάδες εκατόν έντεκα». Εκφράζει μία ποσότητα χρησιμοποιώντας το αλφάβητο του δυαδικού συστήματος!
  - Για την αποφυγή παρερμηνειών, με **δείκτη** θα αναφέρεται η **βάση του συστήματος αρίθμησης στο οποίο εκφράζεται ο αριθμός**. Έτσι:
    - 10111_2 είναι αριθμός στο **δυαδικό σύστημα**
- Παράδειγμα **μη έγκυρου αριθμού** στο δυαδικό σύστημα:
  - $\mathbf{12011_2}$ Μη έγκυρος γιατί στο δυαδικό σύστημα γιατί το **ψηφίο 2 δεν υπάρχει στο αλφάβητο του δυαδικού συστήματος**.
- Αν σε έναν αριθμό δεν αναφέρεται δείκτης, εννοείται ότι είναι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
  - 1001 (απουσία δείκτη: αριθμός στο **δεκαδικό σύστημα** αρίθμησης. **Αριθμός: χίλια ένα**)
  - 1001_2 (δείκτης 2: αριθμός στο **δυαδικό σύστημα** αρίθμησης. **Αριθμός: ένα-μηδέν-μηδέν-ένα**)

Επιλογή συμβόλων στα συστήματα αρίθμησης

- Στο δυαδικό σύστημα **επιλέχτηκε το αλφάβητο {0,1}** για την έκφραση των αντίστοιχων ποσοτήτων
  - Αυτό για **λόγους ευκολίας**
- Στο δυαδικό σύστημα, μπορούν να **επιλεγούν οποιαδήποτε σύμβολα ως αλφάβητο**, αρκεί να οριστούν ότι **εκφράζουν τις ποσότητες από 0 έως και 1**
  - Για το δυαδικό σύστημα θα μπορούσε **να επιλεγεί το αλφάβητο {‡, ꜩ}** όπου το σύμβολο **‡** εκφράζει το μηδέν και το σύμβολο **ꜩ** τη μονάδα
    - Τότε δυαδικοί αριθμοί θα γράφονταν ως: ꜩ ꜩ‡ ꜩ‡$_{2}$

Ερμηνεία αριθμών στο δυαδικό σύστημα

- Ερμηνεία αριθμών στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης
  - Επειδή η βάση R=2, σε κάθε θέση η **ομαδοποίηση γίνεται σε δυάδες** (στο δεκαδικό γίνεται σε δεκάδες)

Τριανταδυάδες	Δεκαεξάδες	Οκτάδες	Τετράδες	Δυάδες	Μονάδες
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

101001_2

1 τριανταδυάδα (**2 δεκαεξάδες**)

0 δεκαεξάδες (**2 οκτάδες**)

1 οκτάδα (**2 τετράδες**)

0 τετράδες (**2 δυάδες**)

0 δυάδες (**2 μονάδες**)

1 μονάδα (**καμία δυάδα**)

Ερμηνεία αριθμών σε συστήματα αρίθμησης με βάση R

- Η **ίδια λογική** και σε **άλλα συστήματα αρίθμησης**
- Τριαδικό σύστημα (R=3)
  - **Τρία σε πλήθος σύμβολα** στο αλφάβητο
  - Εκφράζουν τις **ποσότητες από 0 έως και 2** (R-1=3-1=2), αλφάβητο {0,1,2}
  - Στους αριθμούς που δημιουργούνται με το αλφάβητο του τριαδικού συστήματος, η **θέση κάθε ψηφίου** εκφράζει πόσες **ομαδοποιήσεις σε τριάδες** υπάρχουν
    - Μονάδες, τριάδες (3 μονάδες), εννιάδες (3 τριάδες), εικοσιεπτάδες (3 εικοσιεπτάδες) κλπ.

Ερμηνεία αριθμών σε συστήματα αρίθμησης με βάση R

- Τριαδικό σύστημα αρίθμησης (**R=3, {0,1,2}**)
  - Κάθε θέση **ομαδοποιεί σε τριάδες**

Εικοσιεπτάδες **Εννιάδες** **Τριάδες** **Μονάδες**

$$\mathbf{2021_3}$$

2 εικοσιεπτάδες (**3 εννιάδες**)

0 εννιάδες(**3 τριάδες**)

2 τριάδες (**3 μονάδες**)

1 μονάδα (**καμία τριάδα**)

Ερμηνεία αριθμών σε συστήματα αρίθμησης με βάση R

- Με την **ίδια λογική (αλφάβητο, ομαδοποιήσεις)**, συστήματα αρίθμησης με
  - **R=4** (τετραδικό σύστημα αρίθμησης)
  - **R=5** (πενταδικό σύστημα αρίθμησης)
  - **R=6** (εξαδικό σύστημα αρίθμησης)
  - κλπ

Συστήματα αρίθμησης με βάση >10

- Και συστήματα αρίθμησης με βάση **μεγαλύτερη από το δέκα, R > 10**
  – Βαβυλώνιοι και Σουμέριοι είχαν το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης (R=60)
    - Από εκεί το γεγονός ότι 1 ώρα = 60 λεπτά, 1 λεπτό=60 δευτερόλεπτο, 360 μοίρες ο κύκλος κλπ
- Παράδειγμα: **δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης**

Δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης

- Δεκαξαδικό σύστημα αρίθμησης, R=16
  - Υπάρχουν **16 σε πλήθος βασικά σύμβολα** με τα οποία σχηματίζονται οι αριθμοί
  - Τα 16 αυτά σύμβολα εκφράζουν **τις ποσότητες από 0 έως και 15 (R-1 = 16-1 = 15)**.
    - Ποιά είναι τα σύμβολα αυτά (αλφάβητο); Είναι τα εξής: **{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F}**
    - Στο δεκαεξαδικό πρέπει να υπάρχει **ένα σύμβολο που εκφράζει μία δεκάδα**, **ένα σύμβολο που εκφράζει μία εντεκάδα** κοκ.
      - Στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης το σύμβολο **A** εκφράζει μία δεκάδα, το **B** μία εντεκάδα και το **F** μία δεκαπεντάδα

Δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης

- Δεκαξαδικό σύστημα αρίθμησης, R=16
  - Η θέση κάθε ψηφίου εκφράζει **ομαδοποιήσεις σε δεκαεξάδες**

Διακοσιοπενηνταεξάδες **Δεκαεξάδες** **Μονάδες**

$3DA_{16}$

3 διακοσιοπενηνταεξάδες (**16 δεκαεξάδες**)

13 δεκαεξάδες (**16 μονάδες**). **D** είναι το σύμβολο για μία δεκατριάδα

10 μονάδες (**καμία δεκαεξάδα**) . **A** είναι το σύμβολο για μία δεκάδα

Συστήματα αρίθμησης με R>10

- Με την ίδια λογική ερμηνεύονται όλα τα συστήματα αρίθμησης με R > 10
  – Εικοσαδικό σύστημα αρίθμησης (R=20)
  – Τριανταεξαδικό σύστημα αρίθμησης (R=36)
  – Εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης (R=60)
- Γενικά, σε κάθε **σύστημα αρίθμησης με βάση R**, οι **ποσότητες μικρότερες** από τη βάση (<R) **αναπαρίστανται στο αλφάβητο από ένα μόνο σύμβολο**.
  – Π.χ. Στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης R=11, η ποσότητα **11** (11<16) πρέπει να αναπαρασταθεί με ένα σύμβολο, το **B**
  – Στο εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης R=60, η ποσότητα **47** (47 <60) πρέπει να αναπαρασταθεί με ένα σύμβολο (οποιοδήποτε)

Μετατροπές αριθμών από ένα σύστημα αρίθμησης σε άλλο

Μετατροπές αριθμών

- Κάθε αριθμός **εκφρασμένος σε ένα σύστημα αρίθμησης R**, μπορεί να **μετατραπεί** σε οποιοδήποτε αριθμό **άλλου συστήματος αρίθμησης R'** .
  - Ο στόχος είναι, δοθέντος ενός αριθμού $\mathbf{X_R}$ εκφρασμένος στο σύστημα αρίθμησης R, να μετατραπεί σε αριθμό του συστήματος αρίθμησης R' $\mathbf{\Psi_{R'}}$, έτσι ώστε οι αριθμοί **$\mathbf{X_R}$ και $\mathbf{\Psi_{R'}}$ να εκφράζουν την ίδια ποσότητα**.
  - Για παράδειγμα **ο αριθμός 25** του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης αν μετατραπεί στο δυαδικό σύστημα γράφεται ως $\mathbf{11001_2}$. Και οι δύο εκφράζουν την **ίδια ποσότητα**.

Μετατροπή αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στο σύστημα αρίθμησης με βάση R

Μετατροπές αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης

- Μετατροπή αριθμού εκφρασμένος **στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης** σε άλλο **σύστημα αρίθμησης με βάση R**
  - Ερωτήσεις της μορφής: Ο αριθμός 247 πως θα εκφραστεί στο δυαδικό, τριαδικό, δεκαεξαδικό κλπ σύστημα αρίθμησης;
  - Βασική ιδέα αλγορίθμου: με **διαδοχικές διαιρέσεις** του αριθμού του δεκαδικού συστήματος **με τη βάση R του συστήματος «προορισμού»**.
    - Τα **υπόλοιπα των διαιρέσεων** θα σχηματίσουν τον αριθμό στο σύστημα αρίθμησης R

Αλγόριθμος μετατροπής αριθμού από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης στο σύστημα αρίθμησης με βάση R

- Βασικός αλγόριθμος (**Είσοδος**: αριθμός δεκαδικού συστήματος και βάση R συστήματος αρίθμησης προορισμού. **Έξοδος**: αναπαράσταση αριθμού εισόδου στο σύστημα αρίθμησης R)
  - Έλεγξε αν ο αριθμός του δεκαδικού συστήματος είναι μικρότερος από τη βάση προορισμού R.
  - Αν είναι, τότε ο αριθμός εκφράζεται με ένα σύμβολο. Διάλεξε ένα (οποιοδήποτε) σύμβολο και αυτό είναι η απάντηση
  - Αν δεν είναι, διαίρεσε τον αρχικό αριθμό του δεκαδικού συστήματος με τη βάση R. Βρες το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης. Η διαίρεση γίνεται στο δεκαδικό σύστημα
  - Ενόσω το πηλίκο δεν είναι 0, συνέχιζε να διαιρείς το πηλίκο με τη βάση R. Σε κάθε διαίρεση κράτα το νέο πηλίκο (που θα διαιρεθεί με τη βάση R) και το υπόλοιπο. Οι διαιρέσεις γίνονται στο δεκαδικό σύστημα.
  - Αν το πηλίκο της διαίρεσης προκύψει 0 σταμάτα τις διαιρέσεις
  - Τα υπόλοιπα που προέκυψαν, σχηματίζουν τον αριθμό στο σύστημα αρίθμησης R. Ειδικότερα, το υπόλοιπο που προέκυψε από την πρώτη διαίρεση με τη βάση R θα αποτελέσει το πλέον δεξιό ψηφίο του αριθμού, ενώ το τελευταίο υπόλοιπο που προέκυψε θα αποτελέσει το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού.

Μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό σύστημα στο δυαδικό

- Παράδειγμα: Μετατροπή του αριθμού **59** του δεκαδικού συστήματος στο **δυαδικό σύστημα αρίθμησης** (R=2)
  - 59 > 2 (βάση) οπότε δεν μπορεί να εκφραστεί με ένα σύμβολο

Αριθμός εισόδου διαιρείται με τη βάση προορισμού

Πηλίκο προηγούμενου βήματος διαιρείται με τη βάση προορισμού

Διαίρεση με βάση R	Πηλίκο	Υπόλοιπο
59 : 2	**29**	**1**
29 : 2	**14**	**1**
14 : 2	**7**	**0**
7 : 2	**3**	**1**
3 : 2	**1**	**1**
1 : 2	**0**	**1**

Πηλίκο 0. Η διαδικασία διαιρέσεων σταματά

Τα **υπόλοιπα της διαίρεσης σχηματίζουν τον ζητούμενο αριθμό** στο δυαδικό σύστημα. Το πρώτο υπόλοιπο απαρτίζει το πλέον δεξιό ψηφίο του δυαδικού αριθμού, το τελευταίο υπόλοιπο το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού. Συνεπώς ο **αριθμός 59 γράφεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης ως εξής:**

$\mathbf{111011_2}$

Μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό σύστημα στο πενταδικό

- Παράδειγμα: Μετατροπή του αριθμού **59** του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στο **πενταδικό σύστημα αρίθμησης** (R=5)
  - 59 > 5 (βάση) οπότε δεν μπορεί να εκφραστεί με ένα σύμβολο

Αριθμός εισόδου διαιρείται με τη βάση προορισμού

Διαίρεση με βάση R	Πηλίκο	Υπόλοιπο
59 : 5	**11**	**4**
11 : 5	**2**	**1**
2 : 5	**0**	**2**

Πηλίκο προηγούμενου βήματος διαιρείται με τη βάση προορισμού

Πηλίκο 0. Η διαδικασία διαιρέσεων σταματά

Τα **υπόλοιπα της διαίρεσης σχηματίζουν τον ζητούμενο αριθμό** στο δυαδικό σύστημα. Το πρώτο υπόλοιπο απαρτίζει το πλέον δεξιό ψηφίο του δυαδικού αριθμού, το τελευταίο υπόλοιπο το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού. Συνεπώς ο **αριθμός 59 γράφεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης ως εξής:**

$\mathbf{214_5}$

Μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό

- Παράδειγμα: Μετατροπή του αριθμού **43** του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στο **δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης** (R=16)
  - 43 > 16 (βάση) οπότε δεν μπορεί να εκφραστεί με ένα σύμβολο

Αριθμός εισόδου διαιρείται με τη βάση προορισμού

Διαίρεση με βάση R	Πηλίκο	Υπόλοιπο
43:16	**2**	**11**
2 : 16	**0**	**2**

Πηλίκο προηγούμενου βήματος διαιρείται με τη βάση προορισμού

Πηλίκο 0. Η διαδικασία διαιρέσεων σταματά

Τα **υπόλοιπα της διαίρεσης σχηματίζουν τον ζητούμενο αριθμό** στο δυαδικό σύστημα. Το πρώτο υπόλοιπο απαρτίζει το πλέον δεξιό ψηφίο του δυαδικού αριθμού, το τελευταίο υπόλοιπο το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού.

Προσοχή! Το πρώτο υπόλοιπο είναι 11, αλλά αυτός είναι αριθμός του δεκαδικού συστήματος (η διαίρεση έγινε στο δεκαδικό σύστημα). Πρέπει να αναζητηθεί πως ο αριθμός 11 εκφράζεται στο δεκαεξαδικό σύστημα. Επειδή 11 < 16, εκφράζεται με ένα σύμβολο. Από το αλφάβητο του δεκεξαδικού έχουμε ότι: 11 = B_{16} οπότε ο αριθμός 43 του δεκαδικού συστήματος εκφράζεται στο δεκαεξαδικό σύστημα ως εξής:

$2B_{16}$

Μετατροπή αριθμών του συστήματος αρίθμησης με βάση R στο δεκαδικό

Μετατροπές αριθμών από σύστημα αρίθμησης με βάση R στο δεκαδικό

- Μετατροπή αριθμού εκφρασμένος στο σύστημα αρίθμησης R στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
  - Ερωτήσεις της μορφής: Ο αριθμός 247_{16} πως θα εκφραστεί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης;
  - **Δύο τρόποι:**
    1. Διαδοχικές διαιρέσεις με τη βάση του συστήματος αρίθμησης προορισμού (δηλαδή το 10, R=10)
    2. Χρήση της ερμηνείας των αριθμών που εκφράζονται στο σύστημα αρίθμησης R και εφαρμοφή τύπου αθροίσματος

1ος Τρόπος μετατροπής

- 1ος τρόπος:
  - Ίδια διαδικασία με την μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε αριθμό του συστήματος αρίθμησης R
  - Αρχική διαίρεση αρχικού αριθμού με τη βάση προορισμού 10. Διατηρείται το πηλίκο και το υπόλοιπο
  - Ακολούθως διαδοχικές διαιρέσεις του πηλίκου που προκύπτει με τη βάση προορισμού 10, έως ότου προκύψει πηλίκο 0
  - Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων σχηματίζουν τον αριθμό
  - **<u>ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Οι παραπάνω διαιρέσεις πρέπει να γίνουν στο σύστημα αρίθμησης R, στο οποίο βρίσκεται ο δοσμένος αριθμός, όχι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης**
    - **Αυτό κάνει τη διαδικασία αυτή δύσκολη**

Μετατροπή αριθμού από το οκταδικό στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

- 1^{ος} τρόπος
  - Παράδειγμα: μετατροπή αριθμού 43_8 του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (R=10)

<u>Οι διαιρέσεις πρέπει να γίνουν στο οκταδικό σύστημα</u> κι όχι στο δεκαδικό αφού ο αριθμός εισόδου είναι στο οκταδικό. Ο αριθμός 10 του δεκαδικού, εκφράζεται ως 12_8 στο οκταδικό. Συνεπώς πρέπει να γίνει διαίρεση του 43_8 και των πηλίκων με τον 12_8 αφού $12_8 = 10$

Αριθμός εισόδου διαιρείται με τη βάση προορισμού

Διαίρεση με βάση R	Πηλίκο	Υπόλοιπο
$43_8 : 12_8$	3_8	5_8
$3_8 : 12_8$	0_8	3_8

Πηλίκο προηγούμενου βήματος διαιρείται με τη βάση προορισμού

Πηλίκο 0. Η διαδικασία διαιρέσεων σταματά

Τα **υπόλοιπα της διαίρεσης σχηματίζουν τον ζητούμενο αριθμό** στο δεκαδικό σύστημα. Το πρώτο υπόλοιπο απαρτίζει το πλέον δεξιό ψηφίο του δεκαδικού αριθμού, το τελευταίο υπόλοιπο το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού. Συνεπώς, ο αριθμός 43_8 του οκταδικού συστήματος εκφράζεται στο δεκαδικό σύστημα ως εξής:

35

<u>Σημείωση:</u> τα υπόλοιπα 5_8 και 3_8 που προέκυψαν είναι στο οκταδικό, αλλά συμβολίζονται με τον ίδιο τρόπο και στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης .

Δηλαδή $5_8 = 5$ και $3_8 = 3$.

2^{ος} Τρόπος μετατροπής

- 2^{ος} τρόπος
  - Γίνεται ερμηνεία του αριθμού στο σύστημα αρίθμησης R βάσει των ομαδοποιήσεων και εφαρμογή ενός τύπου αθροίσματος
  - Πολύ **πιο εύκολος** τρόπος μετατροπής αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης **από τις διαιρέσεις του 1^{ου} τρόπου**

Βασική ιδέα της διαδικασίας μετατροπής

- 2ος τρόπος
  - Βασική ιδέα: **κάθε θέση** του αριθμού στο σύστημα αρίθμησης R **αναφέρει ομαδοποιήσεις κατά R-άδες**. Το **ψηφίο** στη θέση αυτή αναφέρει **πόσες τέτοιες ομαδοποιήσεις** υπάρχουν στον αριθμό

Αυτή η θέση αναφέρει πόσες οκτάδες υπάρχουν στον αριθμό

Αυτή η θέση αναφέρει πόσες μονάδες υπάρχουν στον αριθμό

Αυτή η θέση αναφέρει πόσες εξηντατετράδες υπάρχουν στον αριθμό

$\mathbf{143_8}$

1 εξηντατετράδα(**<u>οκτώ</u> οκτάδες**)

3 μονάδες (**καμία οκτάδα**)

4 οκτάδες (**<u>οκτώ</u> μονάδες**)

- Ο αριθμός του οκταδικού συστήματος 143_8 εκφράζει την εξής ποσότητα: **3 μονάδες, 4 οκτάδες και 1 εξηντατετράδα**. Δηλαδή η συνολική ποσότητα που εκφράζει είναι: $3 + 4*8 +1*64= 3+4*8 + 4*8^2=$**99**

Βασική ιδέα της διαδικασίας μετατροπής (2)

- $2^{ος}$ τρόπος

Αυτή η θέση αναφέρει πόσες διακοσιοπενηνταεξάδες υπάρχουν στον αριθμό

Αυτή η θέση αναφέρει πόσες δεκαεξάδες υπάρχουν στον αριθμό

Αυτή η θέση αναφέρει πόσες μονάδες υπάρχουν στον αριθμό

$1FA_{16}$

A μονάδες =>10 μονάδες (**καμία δεκαεξάδα**)

1 διακοσιοπενηνταεξάδα (**16 δεκαεξάδες**)

F δεκαεξάδες => 15 δεκαεξάδες (**16 μονάδες**).

  – Έτσι ο αριθμός $1FA_{16}$ εκφράζει την εξής ποσότητα: **10 μονάδες, 15 δεκαεξάδες και 1 διακοσιοπενηνταεξάδα**. Η συνολική ποσότητα που εκφράζει είναι: 10 + 15*16 + 1*256 = 10 + 15*16+1*16^2 = **506**

Γενίκευση διαδικασίας μετατροπής

- $2^{ος}$ τρόπος
  - Γενίκευση ομαδοποίησης και αθροισμάτων
  - ‘Εστω n-ψήφιος ακέραιος αριθμός στο σύστημα αρίθμησης με βάση R, με d_i να είναι το ψηφίο στη θέση i, $d_{n-1}…d_2d_1d_0$, τότε το άθροισμα:

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i * R^i$$

δίνει τον δεκαδικό αριθμό που αναπαριστά ο αριθμός $d_{n-1}…d_2d_1d_0$ στο σύστημα αρίθμησης R.

  - Το ψηφίο $\mathbf{d_0}$ είναι το **πλέον δεξιό** ψηφίο του ακέραιου αριθμού και $\mathbf{d_{n-1}}$ το **πλέον αριστερό**.

Μετατροπή αριθμού από το οκταδικό στο δεκαδικό σύστημα

- 2ος τρόπος
  - Παράδειγμα: μετατροπή αριθμού 43_8 του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (R=10)

$$\mathbf{43_8}$$

Εφαρμογή του τύπου $\sum_{i=0}^{n-1} d_i * R^i$ με R=8, $d_0 = 3$, $d_1=4$

$$43_8 = \mathbf{3}*8^0 + \mathbf{4}*8^1 = 3+32 = \mathbf{35}$$

Μετατροπή αριθμού από το πενταδικό στο δεκαδικό σύστημα

- $2^{ος}$ τρόπος
  - Παράδειγμα: μετατροπή αριθμού 231_5 του πενταδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (R=10)

$$\mathbf{231_5}$$

Εφαρμογή του τύπου με R=5, d_0 = 1, d_1=3, d_2=2

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i * R^i$$

$$231_5 = \mathbf{1}*5^0 + \mathbf{3}*5^1 + \mathbf{2}*5^2 = 1+15 + 50 = \mathbf{66}$$

Μετατροπή αριθμού από το δεκαεξαδικό στο δεκαδικό σύστημα

- 2^{ος} τρόπος
  - Παράδειγμα: μετατροπή αριθμού $10FA_{16}$ του δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (R=10)

$10FA_{16}$

Εφαρμογή του τύπου με R=16, d_0 = A, d_1=F, d_2=0, d_3=1

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i * R^i$$

$$10FA_{16} = \mathbf{10}*16^0 + \mathbf{15}*16^1 + \mathbf{0}*16^2 + \mathbf{1}*16^3 = \mathbf{4346}$$

Το σύμβολο **A** στον αριθμό, που στο δεκαεξαδικό εκφράζει μία δεκάδα

Το σύμβολο **F** στον αριθμό, που στο δεκαεξαδικό εκφράζει μία δεκαπεντάδα

Μετατροπή αριθμών του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος σε αριθμούς του συστήματος αρίθμησης με βάση R

Μετατροπές αριθμών του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος

- Η μετατροπή αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης **με κλασματικό μέρος** π.χ. 21.3, 51.908, 8.78 σε αριθμούς του συστήματος αρίθμησης R γίνεται σε δυο φάσεις:
  - **Μετατροπή** στο σύστημα αρίθμησης R **του ακέραιου μέρους του αριθμού**
  - **Μετατροπή** στο σύστημα αρίθμησης R **του κλασματικού μέρους** του αριθμού

Μετατροπές αριθμών του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος (2)

- **Μετατροπή του ακέραιου μέρους** γίνεται με **διαδοχικές διαιρέσεις** με τη βάση του συστήματος αρίθμησης προορισμού R
- **Μετατροπή του κλασματικού μέρους** γίνεται με **διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς** του κλασματικού μέρους με τη βάση του συστήματος αρίθμησης προορισμού R
  - Ο πολλαπλασιασμός αυτός θα δώσει αριθμό που χωρίζεται σε ακέραιο και κλασματικό μέρος
  - Τα ακέραια μέρη των γινομένων θα δημιουργήσουν την αναπαράσταση του αριθμού στο σύστημα αρίθμησης με βάση R

Μετατροπή αριθμού του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος

- Παράδειγμα: μετατροπή του αριθμού 41.6875 στο δυαδικό σύστημα
  - Ακέραιο μέρος αριθμού εισόδου: 41
  - Κλασματικό μέρος αριθμού εισόδου: 0,6875
  - Το **ακέραιο μέρος (41)** μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης με διαδοχικές διαιρέσεις

Διαίρεση με τη βάση 2	Πηλίκο	Υπόλοιπο
41 : 2	**20**	**1**
20 : 2	**10**	**0**
10 : 2	**5**	**0**
5 : 2	**2**	**1**
2 : 2	**1**	**0**
1 : 2	**0**	**1**

Τα **υπόλοιπα της διαίρεσης σχηματίζουν τον ζητούμενο αριθμό** στο δυαδικό σύστημα. Το πρώτο υπόλοιπο απαρτίζει το πλέον δεξιό ψηφίο του δυαδικού αριθμού, το τελευταίο υπόλοιπο το πλέον αριστερό ψηφίο του αριθμού. Συνεπώς ο **αριθμός 41 γράφεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης ως εξής:**

$\mathbf{101001_2}$

Μετατροπή αριθμού του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος (2)

- Παράδειγμα: μετατροπή του αριθμού 41.6875 στο δυαδικό σύστημα
  - Δεκαδικό μέρος αριθμού εισόδου: 0.6875
  - Το **κλασματικό μέρος (0.6875)** μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς

Πολλαπλασιασμός με βάση R = 2	Αποτέλεσμα	Ακέραιο μέρος	Κλασματικό μέρος
0.6875 x 2	1.375	**1**	**0.375**
0.375 x 2	0.75	**0**	**0.75**
0.75 x 2	1.5	**1**	**0.5**
0.5 x 2	1.0	**1**	**0**

Κλασματικό μέρος 0. Η διαδικασία πολλαπλασιασμών σταματά

Τα **ακέραια μέρη των πολλαπλασιασμών σχηματίζουν τον ζητούμενο αριθμό** στο δυαδικό σύστημα. Το πρώτο ακέραιο μέρος απαρτίζει το πλέον αριστερό ψηφίο του δυαδικού αριθμού, το τελευταίο ακέραιο μέρος το πλέον δεξιό ψηφίο του αριθμού. Συνεπώς το **κλασματικό μέρος 0.6875 γράφεται στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης ως εξής:**

$\mathbf{0.1011_2}$

Μετατροπή αριθμού του δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος (3)

- Παράδειγμα: μετατροπή του αριθμού 41.6875 στο δυαδικό σύστημα
  - Μετατροπή ακέραιου μέρους αριθμού (41): $\mathbf{101001_2}$
  - Μετατροπή κλασματικού μέρους αριθμού (0.6875): $\mathbf{0.1011_2}$
  - Τα δύο μέρη συνδυάζονται και δίνουν το τελικό αποτέλεσμα:

$$\boxed{\mathbf{41.675 = 101001.1011_2}}$$

Γενίκευση μετατροπής αριθμών με κλασματικό μέρος

- Κατ’αντιστοιχία μετατροπή αριθμών δεκαδικού συστήματος με κλασματικό μέρος **σε άλλα συστήματα αρίθμησης**
  - Μετατροπή 41.675 στο πενταδικό (R=5): το **41 διαιρείται με το 5**, το **0.675 πολλαπλασιάζεται με το 5**
  - Μετατροπή 209.784 στο δεκαεξαδικό (R=16): το **209 διαιρείται με το 16**, το **0.784 πολλαπλασιάζεται με το 16**

Μετατροπή αριθμών του συστήματος αρίθμησης με βάση R με κλασματικό μέρος στο δεκαδικό

Μετατροπές αριθμών του συστήματος αρίθμησης με βάση R με κλασματικό μέρος στο δεκαδικό

- Παράδειγμα: μετατροπή αριθμού με κλασματικό μέρος του πενταδικού συστήματος αρίθμησης (R = 5) 3.1234_5 στο δεκαδικό
  - Χρήση του τύπου αθροίσματος
  - Στο άθροισμα, τα ψηφία μετά την υποδιαστολή πολλαπλασιάζονται με αρνητικές δυνάμεις της βάσης (R=5), η οποία ελαττώνεται κατά ένα, καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά.

Μετατροπές αριθμών στο σύστημα αρίθμησης με βάση R με κλασματικό μέρος στο δεκαδικό (2)

- Γενικός τύπος
  - ‘Εστω αριθμός στο σύστημα αρίθμησης με βάση R, με **n ακέραια ψηφία** και **k ψηφία του κλασματικού μέρους**, $d_{n-1}...d_2d_1d_0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}...d_{-k}$ με d_i να είναι το ψηφίο στη θέση i, τότε το άθροισμα:

$$\sum_{i=-k}^{n-1} d_i * R^i$$

δίνει τον δεκαδικό αριθμό που αναπαριστά ο αριθμός $d_{n-1}...d_2d_1d_0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}...d_{-k}$ στο σύστημα αρίθμησης R.

Μετατροπή αριθμού από σύστημα αρίθμησης με βάση R με κλασματικό μέρος

- Παράδειγμα
  - μετατροπή αριθμού 23.1234_5 του πενταδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (R=10)

23.1234_5

Εφαρμογή του τύπου με R=5, d_1 =2, d_0 = 3, d_{-1}=1, d_{-2}=2, d_{-2}=3, d_{-4}=4

$$\sum_{i=-k}^{n-1} d_i * R^i$$

23.1234_5 = **2**$*5^1$ + **3**$*5^0$ + **1**$*5^{-1}$ + **2**$*5^{-2}$ + **3**$*5^{-3}$ +**4**$*5^{-4}$ = **13.3104**

Πράξεις αριθμών στα συστήματα αρίμησης με βάση R

Πράξεις στα συστήματα αρίμησης με βάση R

- Οι αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) γίνονται με τον ίδιο τρόπο όπως στο δεκαδικό
  - Π.χ. στην περίπτωση της πρόσθεσης, το κρατούμενο που προκύπτει, μεταφέρεται στην επόμενη θέση
- Δύο τρόποι εκτέλεσης τέτοιων πράξεων
  1. Μετατροπή όλων των τελεστέων στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, εκτέλεση της πράξης στο δεκαδικό σύστημα και μετατροπή του αποτελέσματος στο σύστημα αρίθμησης των τελεστέων
  2. Εκτέλεση πράξεις απ'ευθείας στο σύστημα αρίθμησης στο οποίο οι δίνονται οι τελεστέοι

Πρόσθεση

- 1ος τρόπος: Μετατροπή τελεστέων στο δεκαδικό σύστημα
  - Παράδειγμα: πρόσθεση στο πενταδικό σύστημα αρίθμησης

Μετατροπή τελεστέων από το πενταδικό στο δεκαδικό σύστημα με χρήση του αθροίσματος γινομένων

$$\begin{array}{r} 3014_5 \\ +\ \ 112_5 \\ \hline 3131_5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 384 \\ +\ \ 32 \\ \hline 416 \end{array}$$

Εκτέλεση πρόσθεσης στο δεκαδικό σύστημα

Μετατροπή αποτελέσματος από στο δεκαδικό στο πενταδικό σύστημα με τη μέθοδο των διαιρέσεων

Πρόσθεση

- $2^{ος}$ τρόπος: Απ’ευθείας εκτέλεση πράξης στο σύστημα αρίθμησης R
  - Πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα

Τριανταδυάδες	Δεκαεξάδες	Οκτάδες	Τετράδες	Δυάδες	Μονάδες

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\quad 10111_2 \\ \hline 1000100_2 \end{array}$$

Πρόσθεση ψηφίων όπως στο δεκαδικό.

Οι αριθμοί είναι στο **δυαδικό** έτσι οι **μονάδες προστίθενται στις μονάδες**, **δυάδες στις δυάδες**, **τετράδες στις τετράδες** κλπ.

1) Η διαδικασία ξεκινά **προσθέτοντας το πλήθος των μονάδων** των δύο αριθμών: $1_2 + 1_2 = 10_2$ (=2). Αυτό σημαίνει ότι η πρόσθεση των μονάδων των αριθμών **δίνει 0 μονάδες και 1 δυάδα**. Συνεπώς το αποτέλεσμα της **άθροισης μόνο των μονάδων θα είναι 0**, με 1 δυάδα να μεταφέρεται (ως «κρατούμενο») στην πρόσθεση των δυάδων.

2) **Ακολούθως προσθέτονται το πλήθος των δυάδων** και θα έχουμε: $0_2 + 1_2 + 1_2$ (κρατούμενο) = 10_2 δηλαδή θα μας δώσει **0 δυάδες και μία τετράδα**, που θα πρέπει να προστεθεί με τις τετράδες. Έτσι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης **των δυάδων θα είναι 0, με 1 τετράδα ως κρατούμενο**

3) **Προσθέτοντας τις τετράδες** θα έχουμε: $1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2$ που δίνει ως αποτέλεσμα **1 τετράδα και 1 οκτάδα**, που μεταφέρεται στην επόμενη θέση. Το αποτέλεσμα είναι 1, με 1 ως κρατούμενο

4) Η διαδικασία συνεχίζεται με το ίδιο τρόπο για τα υπόλοιπα ψηφία. Απουσία ψηφίου σε έναν αριθμό, σημαίνει μηδέν στη θέση αυτή.

Πρόσθεση

- $2^{ος}$ τρόπος: Απ’ευθείας εκτέλεση πράξης στο σύστημα αρίθμησης R
  - Πρόσθεση στο δεκαεξαδικό σύστημα

$$\begin{array}{rccc} & \text{Διακοσιοπενηνταεξάδες} & \text{Δεκαεξάδες} & \text{Μονάδες} \\ & 3 & A & B_{16} \\ + & A & F & 3_{16} \\ \hline & E & 9 & E_{16} \end{array}$$

Πρόσθεση αντίστοιχων ψηφίων όπως στο δεκάδικό.

Οι αριθμοί είναι στο **δεκαεξαδικό** έτσι οι **μονάδες προστίθενται στις μονάδες**, **δεκαεξάδες στις δεκαεξάδες** κλπ.

1) Η διαδικασία ξεκινά **προσθέτοντας τις μονάδες** των δύο αριθμών: $\mathbf{B_{16} + 3_{16} = E_{16}}$ (B_{16} είναι 11 στο δεκαδικό και 3_{16} το 3 στο δεκαδικό, δίνοντας αποτέλεσμα στο δεκαδικό 14, που στο δεκαεξαδικό αναπαρίσταται από το E). Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της **άθροισης μόνο των μονάδων των αριθμών θα είναι E**, ενώ δεν μεταφέρεται καμία δεκαξάδα στην επόμενη θέση.

2) **Προστίθενται ακολούθως το πλήθος των δεκαεξάδων A_{16} και F_{16}** : $\mathbf{A_{16}}$ + $\mathbf{F_{16}}$ = $\mathbf{19_{16}}$ (αφού $\mathbf{A_{16}}$ =10, $\mathbf{F_{16}}$ =15 και στο δεκαδικό το άθροισμά τους είναι 25. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν 25 δεκαεξάδες που στο δεκαεξαδικό αναπαρίσταται ως $\mathbf{19_{16}}$). Συνεπώς το αποτέλεσμα της πρόσθεσης του των δεκαξάδων **θα είναι 9**, με **1 διακοσιοπενηνταεξάδα ως κρατούμενο**

3) **Προστίθενται οι διακοσιοπενηνταεξάδες** : $\mathbf{3_{16} + A_{16} + 1_{16}}$ **(κρατούμενο) =** $\mathbf{E_{16}}$ που δίνει ως αποτέλεσμα E_{16}

Άλλες πράξεις

- Με τον ίδιο τρόπο γίνονται κι όλες οι άλλες πράξεις
  - Αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση

Γιατί συστήματα αρίθμησης;

Γιατί συστήματα αρίθμησης;

- Γιατί η μελέτη των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης;
  - Ποια η χρησιμότητά τους;
  - Τί μας διδάσκει η ύπαρξή τους;
- Η επιλογή του **κατάλληλου συστήματος αρίθμησης διευκολύνει** πάρα πολύ την **επίλυση ορισμένων προβλημάτων**

Γιατί συστήματα αρίθμησης; (2)

- Γιατί οι Σουμέριο και Βαβυλώνιοι γιατί επέλεξαν το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης (R=60);
  - Για να **διευκολυνθούν ορισμένες πράξεις όπως η διαίρεση**, που τότε **δεν ήταν εύκολη διαδικασία**
    - Το 60 έχει πολλούς διαιρέτες : 2,3,4,5,6,10,12 κλπ
    - Είναι ο μικρότερος αριθμός με διαιρέτες τους 2,3,4,5 και 6

Γιατί συστήματα αρίθμησης; (3)

- Στον χώρο των υπολογιστών, γιατί δυαδικό σύστημα αρίθμησης;
  – Αν και δύναται να **σχεδιαστεί υπολογιστής** όπου η **αναπαράσταση των αριθμών** γίνεται με το **δεκαδικό σύστημα**, είναι **δύσκολη η διαδικασία χειρισμού τους (πράξεις)** και τα αναγκαία **ηλεκτρονικά κυκλώματα γίνονται αρκετά πολύπλοκα**
    - Π.χ. πρέπει να διακρίνονται 10 επίπεδα τάσεως ρεύματος (όσα και τα ψηφία), που σημαίνει εξοπλισμό με μεγαλύτερη ευαισθησία στην τάση και πολύ μικρό εύρος σφάλματος
  – Με την **αναπαράσταση των αριθμών στο δυαδικό σύστημα**, η κατασκευή υπολογιστών είναι **πολύ εύκολη**, **φτηνή** και **πιο αξιόπιστη**
    - Π.χ. πρέπει να διακρίνονται μόνο δύο στάθμες τάσεως ρεύματος: Αν τάση < κατώφλι ή καθόλου σημαίνει 0, αν > από κατώφλι ή ύπαρξη τάσης σημαίνει 1. Τα κυκλώματα απλοποιούνται πάρα πολύ.
  – Δηλαδή αν θέλουμε να κατασκευάσουμε **μηχανές που μας βοηθούν στις πράξεις (=υπολογιστές)** και μας **δυσκολεύει η αναπαράσταση των αριθμών**, απλά την αλλάζουμε (υιοθέτηση του δυαδικού συστήματος) και **ανοίγονται νέες δυνατότητες**.

Ασκήσεις

Ασκήσεις

- Μετατρέψτε τους παρακάτω αριθμούς στο σύστημα αρίθμησης που ζητούνται:
  - $12 = ?_4$
  - $233_3 = ?_{10}$
  - $41_6 = ?_4$
  - $9.34 = ?_2$
  - $197 = ?_{16}$
  - $3A_{16} = ?_{60}$
  - $G6_{25} = ?_{10}$
  - $0.234 = ?_{20}$

Ασκήσεις

- Ποιες από τις παρακάτω πράξεις είναι σωστές και ποιες όχι. Σε όσες πράξεις το αποτέλεσμα λάθος, βρείτε το αποτέλεσμα της πράξης στο σύστημα αρίθμησης που η πράξη δίνεται:
  - $23_4 + 12_4 = 101_4$
  - $41_6 + 55_6 = 120_6$
  - $F1_{16} + 23_{16} = 14_{16}$
- Δίνεται η παρακάτω σωστή μετατροπή ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

  $231_x = 91$

  Βρείτε το x .

Ασκήσεις

- Οι άνθρωποι τελικά κατορθώνουν να ταξιδεύουν σε μακρινούς γαλαξίες και πλανήτες. Φτάνοντας στον απομακρυσμένο πλανήτη HIP 13044 b, βρίσκουν ίχνη ζωής.

  Ειδικότερα, βρίσκουν μία περίεργη μπλε πλάκα, όπου αναγράφονται οι εξής μαθηματικές πράξεις:

13 + 15 = 31

10 * 10 = 100

6 * 3 = 24

Πόσα δάκτυλα έχουν οι κάτοικοι του πλανήτη HIP 13044 b;

Ασκήσεις

- Δίνεται το ακόλουθο αλφάβητο συστήματος αρίθμησης:

{ ɲ, Ϫ, Ħ, ƪ, ȹ, ə }

Βρείτε το αποτέλεσμα της παρακάτω πρόσθεσης εκφρασμένο με το παραπάνω αλφάβητο:

Ħ ƪ ɲ ȹ ə ə **+** ə Ϫ ƪ ə ə

Ασκήσεις

- Υπάρχει μοναδιαίο σύστημα αρίθμησης, δηλαδή σύστημα αρίθμησης με βάση R=1; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Μανώλης Τζαγκαράκης, Βικτωρία Δασκάλου, Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών . «Εισαγωγή στους Η/Υ και Εφαρμογές. Συστήματα Αρίθμησης». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/ECON1242/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: Δέκα δάκτυλα ως έμνευση του δεκαδικού συστήματος , By Maher27777 (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons, Πηγή: https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ATwo_hand%2C_ten_fingers.jpg