ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ Ι
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2009-2010

Άσκηση 1

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x)=\sqrt{|4x-2|-|3x+6|}$, (απάντηση: $(-\infty,-\frac{4}{7}]\cup[8,+\infty)$)

2. $g(x)=\dfrac{-2x^2+6x-4}{x^3-2x^2-5x+6}$, (απάντηση: R-{-2,1,3})

3. $f(x)=\dfrac{|x|-x-1}{\sqrt{x-|x|+1}}$ (απάντηση: $[0,+\infty)$)

ΛΥΣΕΙΣ

Θέλω την υπόριζη ποσότητα μεγαλύτερη-ίση με το μηδέν.
Άρα πρέπει: $|4x-2|-|3x+6|\geq 0$.
Οπότε βρίσκω τις ρίζες των $|4x-2|$, $|3x+6|$ και τα πρόσημα τους, προκειμένου να ορίσω το πεδίο ορισμού σύμφωνα με τον παραπάνω περιορισμό.
Αρχικά έχω: $4x-2=0\Rightarrow x=1/2$ και: $3x+6=0\Rightarrow x=-2$

Ο παρακάτω πίνακας μας διευκολύνει να κατανοήσουμε τα πρόσημα που υπάρχουν ανάμεσα στα διαστήματα αυτά.

X	$-\infty$ -2	-2 ½	½ $+\infty$
4x-2	-	-	+
3x+6	-	+	+

Οπότε για $x\leq -2$ έχουμε: $-4x+2-(-3x-6)\geq 0 \Rightarrow -4x+2+3x+6\geq 0\Rightarrow -x+8\geq 0 \Rightarrow x\leq 8$ Οπότε: $x\in(-\infty,-2]$

Για $-2<x\leq 1/2$ έχουμε: $-4x+2-(3x+6)\geq 0\Rightarrow -4x+2-3x-6\geq 0 \Rightarrow -7x-4\geq 0 \Rightarrow 7x\leq -4 \Rightarrow x\leq -4/7$ Οπότε: $x\in(-2,-4/7]$

Για $x\geq 1/2$ έχουμε: $4x-2-(3x+6)\geq 0\Rightarrow 4x-2-3x-6\geq 0\Rightarrow x-8\geq 0\Rightarrow x\geq 8$ Οπότε: $x\in[8,+\infty)$

Συνεπώς έχω: $x\in(-\infty,-2]\cup[-2,-4/7]\cup[8,+\infty)$ διάστημα το οποίο ισούται με το διάστημα:
$x\in(-\infty,-4/7]\cup[8,+\infty)$.

1. $g(x) = \dfrac{-2x^2+6x-4}{x^3-2x^2-5x+6}$

$x^3-2x^2-5x+6 \neq 0$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2-5x+6 & -2\chi^2+6\chi-4 \\ \cline{2-2}
-x^3+3x^2-2x & -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ \cline{1-1}
x^2-7x+6 & \\
-x^2+3x-2 & \\ \cline{1-1}
-4x+4 &
\end{array}
\Rightarrow
$$

$\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6 = (-2x^2+6x-4)(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}) + (-4x+4)$

$= -2(x^2-3x+2)(-\frac{1}{2})(x+1) - 4(x-1) = (x-2)(x-1)(x+1) - 4(x-1) =$

$= (x-1)[(x-2)(x+1)-4] = (x-1)[(x^2+x-2x-2)-4] = (x-1)(x^2-x-2-4) =$

$= (x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x-3)(x+2)$

$x^3-2x^2-5x+6 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+2) \neq 0 \Rightarrow$

$x \neq 1,,.x \neq 3,,x \neq -2$

Αρα το Πεδίο Ορισμού:

$x \in R - \{-2,1,3\}$

x-|x|+1>0

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$x-|x|+1 = \begin{cases} x-x+1=1, & x \geq o \\ x+x+1=2x+1, & x<0 \end{cases}$

x-|x|+1>0 $\Rightarrow 2x+1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Άρα Πεδίο Ορισμού: $\forall x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$

Άσκηση 2

Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 4x + 3, x \in [-1,4]$ (απάντηση: $(1,19)$). Ομοίως για την συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, (απαντηση\ [\sqrt{2}, +\infty))$

ΛΥΣΗ

Επειδή είναι της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$ το α= 2 >0 θα έχει ελάχιστο στο χ= -β/2α= - (-4)/2*2= 1. Άρα στο 1 τοπικό ελάχιστο = (- β^2 + 4αγ) / (4*α) = 8/8 = 1.
Από -1 μέχρι 1 είναι φθίνουσα και από το 1 μέχρι 4 είναι αύξουσα
f(-1) = 9
f(4) = 19
οπότε το πεδίο τιμών είναι [1, 19].

1.β
Πρέπει το $x^2 + 2x + 3 > 0$ χ^2 + 2χ + 3 > 0. Η διακρίνουσα ισούται με -8<0 αρα το f(x) >0. Η ελάχιστη τιμή που παίρνει η g (x) είναι το (-β^2 + 4αγ) / 4α = $\sqrt{2}$
Άρα το πεδίο τιμών είναι [$\sqrt{2}$, ∞).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
Δείξτε ότι είναι περιττή. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

ΛΥΣΗ

Περιττή ονομάζεται η συνάρτηση όπου η f(-x)=-f(x) $\forall x \in$ Π.Ο$f(x)$

f(-x)=$\dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \forall x \in R$

$\Rightarrow$ f(x) είναι περιττή

Για την μονοτονία της συγκεκριμένης συνάρτησης:

$$F'(\chi) = \frac{(1+x^2) - 2x(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

X	- ∞	-1	1	+∞

f΄(χ)	-	+	-
f(x)	↘	↗	↘

$\forall$ x$\in$(-∞, -1] $\cup$(-1, +∞) f΄(x)$\leq$o, η f(x) είναι φθίνουσα
$\forall$ x$\in$[-1,1) f΄(x)>0, η f(x) είναι αύξουσα

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 + 4x + 1,\ g(x) = \log x$. Να υπολογιστεί η gof.

Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ να ορίσετε την gogog.

ΛΥΣΗ

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

$$g(x) = \log(x)$$

$$gof = g(f(x)) = \log(3x^2 + 4x + 1)$$

$$3x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 16 - 4*3*1 = 4 > 0$$

$$\chi 1,2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = -1, 1/3$$

Το πεδίο ορισμού της g(χ) είναι το (0, +∞)

Αλλά λόγω του πεδίου ορισμού της f(χ) είναι το (-∞, -1) U (1/3, +∞). Οπότε το πεδίο ορισμού είναι το (1/3, +∞)

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$gog = g(g(x)) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}} = \frac{1}{\dfrac{-x}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}$$

$$gogog = g(g(g(x))) = \frac{1 - \dfrac{1}{1-x}}{-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{\dfrac{1-x-1}{1-x}}{\dfrac{-1}{1-x}} = x$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι R {0,1}.

Άσκηση 5

Να μελετηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις

$1.f(x)=x^2-4|x-1|+3$

$2.g(x)=\log x$

$3.h(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$

$4.t(x)=\sqrt{x}e^{-0.1x}$

Άσκηση 6

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:

$1.\lim_{x\to 0^+}\dfrac{3\sqrt{\eta\mu^2 x}}{x}=...=+\infty$

$2.\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=...=0$

$3.\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x+}-\sqrt{x}]=...=0(\infty)$

$4.\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\eta\mu 3x)}{x}=...=1$

$5.\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-x^2/2}{x^3}=...=1/6$

$6.\lim_{x\to 0}x^x=...=1$

ΛΥΣΕΙΣ

1. $\lim_{\chi\to o}\dfrac{\sqrt[3]{\eta\mu^2\chi}}{\chi}=\lim_{\chi\to o}\dfrac{3\,|\,hmx\,|}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{3\eta\mu x}{x}=3\lim_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=3\dfrac{\eta\mu o}{o}=3$

2. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+\chi)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-\chi^3}+\chi)((1-\chi)^{2\backslash 3}-(1-\chi^3)^{1\backslash 3}\chi+\chi^2}{(1-\chi)^{2\backslash 3}-(1-\chi^3)^{1\backslash 3}\chi+\chi^2}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{(1-x^3)+x^3}{(1-x)^{2\backslash 3}-(1-x^3)^{1\backslash 3}x+x^2}$$

$=\dfrac{1}{\infty}=0^+$

(πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την ίδια ποσότητα και θα εφαρμόσω την ταυτότητα $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$)

3. $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x}-\sqrt{x}]$= έχει κάποιο λάθος κάτι λείπει

4. $\lim\limits_{\chi\to o}\dfrac{\ln(1+3\eta\mu 3\chi)}{\chi}=\dfrac{\ln(1+\eta\mu o)}{0}=\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία

$$=\lim_{\chi\to o}\frac{\dfrac{3\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu 3\chi}}{1}=3*1=3$$

5. $\lim\limits_{\chi\to o}\dfrac{e^{x}-1-x-x^{2}/2}{x^{3}}=\dfrac{1-1-0}{0}=\dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία

$$\lim_{\chi\to o}\frac{e^{x}-1-\dfrac{2x}{2}}{3x^{2}}=\frac{0}{0}\text{απροσδιοριστία}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{6x}=\frac{0}{0}\text{απροσδιοριστία}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{6}=\frac{1}{6}$$

6. $\lim\limits_{\chi\to o}\mathrm{x}^{x}=0^{0}$

Y=x^{x} $\Rightarrow \ln y=\ln x^{x}\Rightarrow \ln y=x\ln x$

Θα βρω το $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$ και μετά υπό τον ορισμό του ln θα βρω το $\lim\limits_{x\to 0}y$

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=0^{+}(-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\ln y=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}y=e^{0}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}y=1$$

Άσκηση 8

1. Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ με ένα πολυώνυμο και να υπολογίσετε τον αριθμό ln(1,25) με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων

2. Να διατυπωθεί σε ανάπτυγμα MacLaurin η συνάρτηση $f(x) = 2x - x^2 + 4x^3 + 4$.

3. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε το πολυώνυμο Taylor βαθμού n για να προσεγγίσετε τις τιμές της συνάρτησης γύρω από το σημείο x0
Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε το λάθος της προσέγγισης.

$f(x) = \sqrt{x}$ n=4 $\mathrm{x}_0 = 4, g(x) = e^{-x}$n=3 $\mathrm{x}_0 = 0.5$

ΛΥΣΗ

f(x)=lnx

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = 1/x$

$f''(x) = -1/x^2$

$f'''(x) = 1/x^4$

$$f(\beta) = f(a) + \frac{\beta - \alpha}{1!} * f'(a) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2!} f''(a) + \frac{(\beta - \alpha)^3}{3!} f'''(a) +$$
$$\frac{(\beta - \alpha)^4}{4!} f''''(\xi)$$

$$f(1,25) = f(1) + \frac{0,25}{1!} * f'(1) + \frac{(0,25)^2}{2!} f''(1) + \frac{(0,25)^3}{3!} f'''(1) +$$
$$\frac{(0,25)^4}{4!} f''''(\xi)$$

$$\ln(1,25) = \frac{0,25}{1} * 1 + \frac{(0,25)^2}{2} * (-1) + \frac{(0,25)^3}{6} * 1$$

Ln(1,25)=0,25+0,31+0,002=0,284

2.

$f(x) = 2x - x^2 + 4x^3 + 4$

$f'(x) = 2 - 2x + 12x^2$

$f''(x) = -2 + 24x$

$f'''(x) = 24$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} * f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0)$$

$$f(x) = 4 + x * 2 + \frac{(x)^2}{2} * (-2) + \frac{(x)^3}{6} * 24$$

$= 2x - x^2 + 4x^3 + 4$.

Άσκηση 9

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$1. \int 2x(x^2+3)^4 dx \quad 2. \int x(x^2+3)^{3/2} dx$

$3. \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}} dx \quad 4. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

$5. \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \quad 6. \int (x+4)\ln x \, dx$

$7. \int e^x \eta\mu x \, dx \quad 8. \int \sqrt{3x^2+3x+1} \, dx$

$9. \int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad 10. \int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

$11. \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \quad 12. \int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$

$13. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx \quad 14. \int \cos^4 x \, dx$

$15. \int \frac{3}{x^2+4} dx \quad 16. \int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)} dx$

$17. \int \frac{2x+3}{x^2(x-3)} dx \quad 18. \int \frac{1}{x(x+1)} dx$

ΛΥΣΕΙΣ

1.

$\int 2x(x^2+3)^2 dx$

$$(\frac{1}{5}(x^2+3)^5)' = \frac{5}{5}(x^2+3)^4 * 2x$$

$$\int (\frac{1}{5}(x^2+3)^5)' dx = \frac{1}{5}(x^2+3)^5 + c$$

2

$$\int x(x^2+3)^{3/2} dx$$

$$x(x^2+3)^{3/2} = \frac{1}{2} 2x(x^2+3)^{3/2} = \frac{1}{2}(2x(x^2+3)^{3/2}) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{5}((x^2+3)^{5/2})'$$

$$x(x^2+3)^{3/2} = \frac{1}{5}((x^2+3)^{5/2})'$$

$$\int \ x(x^2+3)^{3/2} dx = \int \ \frac{1}{5}((x^2+3)^{5/2})' dx = \frac{1}{5}(x^2+3)^{5/2} + c$$

3.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}} dx$$

$$(\sqrt{x^2+8})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+8}} * 2x$$

$$(2\sqrt{x^2+8})' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}$$

4

Γνωρίζουμε ότι : $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{1}{2} \ln |\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}| + c$

Άρα

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+3^2}} dx = \frac{1}{2} \ln |\frac{3+\sqrt{x^2+3^2}}{x}| + c$$

5.

$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

Θέτω t= e^x

$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx =$

$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

$dt = (e^x)'dx$

$dt = e^x dx$

$dt = tdx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t^2}{1+t} * \frac{1}{t}dt = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \frac{1+t-1}{1+t}dt = \int 1dt - \int \frac{1}{1+t}dt = t - \ln|1+t| + c =$$
$$= e^x - \ln|1+e^x| + c$$

6.

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες

$$\int (x+4)\ln x dx = \int x \ln x dx + \int 4 \ln x dx =$$
$$\frac{1}{2}\int (x^2)'\ln x dx + 4\int (x)'\ln x dx = \frac{1}{2}(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}) + c_1 + 4(x\ln x - x + c_2) =$$
$$\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + 4x\ln x - 4x + c$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (x^2)'\ln x dx = \frac{1}{2}(x^2 \ln x - \int x^2 (\ln x)' dx) =$$
$$\frac{1}{2}(x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x}dx) = \frac{1}{2}(x^2 \ln x - \int x dx) =$$
$$\frac{1}{2}(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}) + c$$

$$I_2 = 4\int (x)'\ln x dx = 4(x\ln x - \int x(\ln x)'dx) =$$
$$4(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx) = 4(x\ln x - \int 1dx) =$$
$$4(x\ln x - x + c)$$

7
Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες

$$\int e^x \eta\mu x dx = \int (e^x)' \eta\mu\chi dx = e^x \eta\mu x - \int e^x (\eta\mu x)' dx =$$
$$e^x \eta\mu x - \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx = e^x \eta\mu x - \int (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx =$$
$$e^x \eta\mu x - (e^\chi \sigma\upsilon\nu x + \int e^x \eta\mu x dx)$$
$$I_1 = e^x \eta\mu x - e^\chi \sigma\upsilon\nu x - I_1 \Rightarrow$$
$$2I_1 = e^x \eta\mu x - e^\chi \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$$
$$I_1 = \frac{1}{2} e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$$

8
Γνωρίζουμε ότι : $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \sin x^{-1} \frac{x}{a} + c$

$$I = \int \sqrt{3x^2 + 3x + dx} = \int \sqrt{3} \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} dx =$$
$$\sqrt{3} \int \sqrt{x^2 + 2\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} dx = \sqrt{3} \int (x + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{12}$$

Θέτω
$$u = x + \frac{1}{4} \Rightarrow du = dx$$

Οπότε:
$$I = \sqrt{3} \int u^2 + (\sqrt{\frac{1}{12}})^2 du$$
Λόγω της παραπάνω ιδιότητας έχουμε:
$$I = \sqrt{3} \int u^2 + (\sqrt{\frac{1}{12}})^2 du$$
$$I = \sqrt{3} (\frac{u^2}{2} \sqrt{\frac{1}{12} + u^2} + \frac{1}{12} \sin^{-1} \frac{u}{\sqrt{\frac{1}{12}}} + c$$
$$I = \sqrt{3} (\frac{x + \frac{1}{4}}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + (x + \frac{1}{4})^2} + \frac{1}{12} \sin^{-1} \frac{\sqrt{12}(x + \frac{1}{4})}{1} + c)$$

10

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

Θέτω t= e^x

$$dt = (e^x)' dx$$
$$dt = e^x dx$$
$$dt = t dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} * \frac{1}{t} dt = \int \frac{-1}{t} dt + \int \frac{2}{t+1} dt = -\ln|t| + 2\ln|t+1| + c =$$
$$-\ln e^x + 2\ln(e^x + 1) + c = -x + 2\ln(e^x + 1) + c$$

$$\frac{t-1}{(t+1)*t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{At + A + Bt}{(t+1)*t} = \frac{t(A+B) + A}{(t+1)*t}$$
$$A + B = 1$$
$$A = -1$$
$$B = 2$$

11

$$\int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x + \int \frac{1 - cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$
$$\tan x + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x + \tan x - \int 1 dx = 2\tan x - x + c$$

12

$$\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$$

Θέτω $\sqrt[3]{x} = u$

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x}^4 dx$$

$$\sqrt[3]{x} = u \Rightarrow (x^{\frac{2}{3}}) = u \Rightarrow \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}dx = du \Rightarrow \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx = du \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x}dx = du \Rightarrow \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}du$$

$$I = \frac{2}{3}\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x}^4)dx = \frac{2}{3}\int (1+u)^4 du = \frac{(1+u)^5}{5} = \frac{(1+\sqrt[3]{x}^4)^5}{5} + c$$

13

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^5 x}dx =$$

$$\int \frac{\sin x - \sin x \cos^2 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$$

θέτω

$$u = \cos x = du = -\sin xdx$$

$$I_1 = \int \frac{du}{u^5} = -\int u^{-5}du = -\frac{u^{-5}}{-4} = \frac{1}{4u^5} + c_1$$

Ομοιως θέτω

$$du = -\sin dx$$

$$I_2 = \int \frac{-du}{u^3} = -\int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{2ue^2} + c_2$$

$Τελικά$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{2ue^2} + c \Rightarrow I = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

14

$$\int \cos^4 x dx = \int \cos^2 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x(1-\sin^2 x)dx =$$
$$\int \cos^2 x dx - \int \cos^2 x \sin^2 x dx =$$
$$\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx - \int (\cos x \sin x)^2 dx =$$
$$\int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \int (\frac{\sin 2x}{2})^2 dx =$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx =$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\int 1 dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + c$$

15

$$\int \frac{3}{x^2+4}dx$$

Είναι γνωστό ότι $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

Θέτω u= x/α

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{du}{1^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + c = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + c$$

16

$$\int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}dx$$

$$\frac{2x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{\chi+1} \quad A(x^2-1) = Ax^2 - A$$

$$\mathrm{A}(\chi-1)(\chi+1) \quad Bx+B$$

$$B(x+1) \quad \Gamma(x^2-2x+1) = \Gamma x^2 - 2\Gamma x + \Gamma$$

$$\Gamma(x-1)^2$$

$$x^2(A+\Gamma) + x(B-2\Gamma) + \mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma$$

$$2x = x^2(A+\Gamma) + x(B-2\Gamma) + \mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma$$

$$A+\Gamma = 0$$

$$B-2\Gamma = 2$$

$$A+B+\Gamma = 0$$

Άρα έχουμε
Α=-Γ
Β=2Γ+2

-Γ+2Γ+2+Γ=0
2Γ+2=0
Γ=-1
Α=1
Β=4

Ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$\int \frac{2x}{(x-1)^2(x-1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx$$

$$4\int (x-1)^{-2+1}dx = 4\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} = -4(x-1)^{-1}$$

Άρα

$$\int \frac{2x}{(x-1)^2(x-1)}dx = \ln|x-1| - 4(x-1)^{-1} - \ln|x+1| + c$$

17

$$\int \frac{2x+3}{x^2(x-3)}dx=$$

$$\frac{2x+3}{x^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{\chi-3}=\frac{\mathrm{A}x(x-3)+B(x-3)+\Gamma x^2}{x^2(x-3)}$$

$$Ax^2-3Ax+B(x-3)+\Gamma x^2$$
$$(A-\Gamma)x^2+x(-3A+B)-3B=2x+3$$
$$A-\Gamma=0$$
$$-3A+B=2$$
$$-3B=3$$

$$A=\Gamma$$
$$-3A+1=2\Rightarrow A=1$$
$$A=\Gamma=1$$
$$B=1$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2(x-3)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x-3}dx=$$
$$\ln|x|-\frac{1}{x^2}+\ln|x-3|+c$$

18

$$\int \frac{1}{\chi(\chi+1)}dx=$$
$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x)}{x(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)}=$$
$$\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

$$(A+B)x+A=1$$
$$A=1$$
$$A+B=0\Rightarrow 1+B=0\Rightarrow B=-1$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x|-\ln|x-1|+c$$

Άσκηση 10

Έστω ότι το οριακό κόστος μιας επιχείρησης δίνεται από την συνάρτηση $\frac{dMC}{q} = 20e^{-0.5q}$ και ότι τα σταθερά κόστη είναι 50 χρηματικές μονάδες. Να υπολογιστεί το συνολικό κόστος της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

$$\frac{dMC}{dq} = 20e^{-0.5q}$$

$$\int 20e^{-\frac{1}{2}q}dq = 20\int e^{-\frac{1}{2}q}dq = 20*(-2)*e^{-\frac{1}{2}q} + c$$

Γνωρίζουμε ότι τα σταθερά κόστη είναι 50χρηματικες ,μονάδες όποτε c=50.

Αρα το συνολικό κόστος ισούται με $-40*e^{-\frac{1}{2}q} + 50$.

Άσκηση 11

Η συνάρτηση οριακών κερδών μιας επιχείρησης όταν η παραγωγή κυμαίνεται μεταξύ 40 και 70 μονάδων, έχει υπολογιστεί ότι είναι $\Pi^{'}(q) = \frac{-q^2}{10}5q - 3$. Να υπολογιστεί το μέσο κέρδος της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ των 40 και 70 μονάδων.

ΛΥΣΗ

$$\Pi'(q) = \frac{-q^2}{10}*5q - 3$$

$$\int_{40}^{70}(\frac{-q^2}{10}5q - 3)dq = \int_{40}^{70}(\frac{-5q^3}{10} - 3)dq = \frac{-5q^4}{40} - 3x + c$$

$$F(B) - F(A) = (\frac{-5(70)^4}{40} - 3*70) - (\frac{-5(40)^4}{40} - 3*40) = (3001040) - (63880) = 2937160$$

Οπότε το μέσο κέρδος της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ των 40 και 70 μονάδων είναι 2937160μοναδες.

Άσκηση 12

Η οριακή πρόσοδος μιας επιχείρησης δίνεται από την εξής συνάρτηση $MR = 1 - 3q - 4q^2$. Να υπολογιστούν η συνολική πρόσοδος και η συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης .

ΛΥΣΗ

$MR = 1 - 3q - 4q^2$

$$\int (1-3q-4q^2)dq = \int 1dq - \int (3q)dq - \int (4q^2)dq = 1q - \frac{3q^2}{2} - \frac{4q^3}{3} + c$$

Άρα η συνολική πρόσοδος είναι $1q - \frac{3q^2}{2} - \frac{4q^3}{3} + c$

Και η συνάρτηση ζήτησης είναι P(Q)= $1q - \frac{3q^2}{2} - \frac{4q^3}{3}$.

Άσκηση 13

Μια μονοπωλιακή επιχείρηση αποσκοπεί στην μεγιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης $\Pi(q) = (100-q)q - 25q$ όπου P=100-q και C=25q είναι οι συναρτήσεις ζήτησης και κόστους αντίστοιχα. Βρείτε την παραγομένη ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη. (απάντηση q=37.5).

ΛΥΣΗ

Π(q)=(100-q)q-25q , P=100-q , C= 25q

Τα κέρδη στο μονοπώλιο μεγιστοποιούνται όταν MR=MC.

$$MR = [P*Q]' = ([100-q]*q)' = (100q - q^2)' = 100 - 2q$$
$$MC = (25q)' = 25$$

Οπότε έχουμε:

$$MR = MC \Rightarrow 100 - 2q = 25 \Rightarrow 100 - 25 = 2q \Rightarrow 75 = 2q \Rightarrow q = 37,5$$

Άρα η ζητούμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη είναι $q = 37,5$

Άσκηση 14

Το σταθερό κόστος μιας επιχείρησης είναι 100 χρηματικές μονάδες, ενώ το

μεταβλητό κόστος της δίνεται από τη συνάρτηση $VC(Q) = 2 + \frac{100}{q}$

όπου Q είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση συνολικού κόστους και τη συνάρτηση οριακού κόστους (απάντηση 2).

(β) Να υπολογίσετε το οριακό κόστος που αντιστοιχεί σε ποσότητα Q=30 μονάδων και να εκτιμήσετε τη μεταβολή του συνολικού κόστους όταν η παραγόμενη ποσότητα αυξάνεται κατά 2 μονάδες από το επίπεδο των 30 μονάδων (απάντηση 4 χ.μ)

ΛΥΣΗ

FC (Q) =100

VC (Q) =2+$\frac{100}{q}$

TC= VC+FC = 2+$\frac{100}{q}$+100 = 2q+100+10q = 102q+100

Το οριακό κόστος είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης του συνολικού κόστους παραγωγής. Άρα έχουμε ότι:

TC (q) =$\int TC'(q) = \int 102q + 100dq = \frac{102q^2}{2}$ =MC

MC= $\frac{TC}{Q} = \frac{102q + 100}{30}$

Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση ζήτησης$Q = \frac{1000}{\sqrt{P}}$. Να βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης

όταν η τιμή είναι **P=3** και όταν είναι **P=5** και να εκτιμήσετε τη μεταβολή στα συνολικά έσοδα καθώς η τιμή μεταβάλλεται μεταξύ αυτών των δύο ορίων**.**

ΛΥΣΗ

$$E = \frac{dp}{dq}\frac{p}{q} = \frac{d(1000 - p^{-1\backslash 2}}{dq}\frac{p}{q} = \frac{\frac{1}{2}p}{1000 - p^{-1\backslash 2}} = \frac{p}{2000 - p}$$

Για p=3 η ε=1.50

Για p=4 η ε=2

Άσκηση 16

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q = \frac{40}{P^2}$ **.** Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή

που αντιστοιχεί στην τιμή P=8.

ΛΥΣΗ

CS=$\int I(q)dq = \int \frac{40}{p^2}dp = \int 40p^{-2} = \frac{40p-2}{-2} \Rightarrow \frac{40*8^{-2}}{8^{-2}} = 1.04$

Άσκηση 17

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2l \big/ x-3, x<3 \\ 2l-k, x=3 \\ \frac{2x^2-(2l+1)x+3k}{x-3}, x>3 \end{cases}$.

Να βρεθούν οι τιμές των l,k ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια-παραγωγισιμότητα την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-ax+2}{x-3}, x \le 1 \\ \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, 1<x \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$\lim_{x\to 3-} \frac{2\chi^2-(2*3+1)\chi+3\kappa}{\chi-3} = \lim_{x\to 3-} \frac{2\chi^2-7\chi+3\kappa}{\chi-3} =$$

$$\lim_{x\to 3-} \frac{(2\chi^2-7\chi+3*1)'}{(\chi-3)'} = \lim_{x\to 3-} \frac{4\chi-7}{1} = 5$$

$$2\chi^2-7\chi+3\kappa$$
$$2*3^2-7*3+3\kappa=0$$
$$18-21+3\kappa=0$$
$$-3+3\kappa=0$$
$$\kappa=1$$

Για χ=3 μηδενίζεται ο παρανομαστής άρα για να υπάρχει το όριο του κλάσματος πρέπει ο αριθμητής να είναι μηδέν. Αλλιώς το όριο θα ήταν άπειρο άρα δεν θα ήταν συνεχής

$$\lim_{x\to 3-}\frac{\chi^2-\chi-2\lambda}{\chi-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{\chi^2-\chi-6}{\chi-3}=$$
$$\lim_{x\to 3-}\frac{(\chi^2-\chi-6)'}{(\chi-3)'}=\lim_{x\to 3-}\frac{2\chi-1}{1}=5$$

$$\chi^2-\chi-2\lambda=0$$
$$3^2-3-2\lambda=0$$
$$6-2\lambda=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(3\chi\,^\wedge 2+1)}-2}{\chi-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{(3\chi\,^\wedge 2+1)}-2)'}{(\chi-1)'}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{(3\chi\,^\wedge 2+1)'}{2*\sqrt{(3\chi\,^\wedge 2+1)}*1}=\lim_{x\to 1}\frac{6\chi}{2*\sqrt{(3\chi\,^\wedge 2+1)}*1}=\frac{5}{6}$$

Για χ=3 μηδενίζεται ο παρανομαστής άρα για να υπάρχει το όριο του κλάσματος πρέπει ο αριθμητής να είναι μηδέν. Αλλιώς το όριο θα ήταν άπειρο άρα δεν θα ήταν συνεχής

$$\frac{\chi^2-\alpha\chi+2}{\chi-3}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{1^2-\alpha 1+2}{1-3}=\frac{5}{6}$$
$$\frac{3-\alpha}{-2}=\frac{5}{6}$$
$$(3-\alpha)*6=-10$$
$$18-6\alpha=-10$$
$$28=6\alpha$$
$$\alpha=\frac{14}{3}$$

Οι λύσεις των ασκήσεων που δίνονται παραπάνω παρατίθενται με τον τρόπο που αυτές αποδόθηκαν από τους φοιτητές που συμμετείχαν. Θα ήθελα λοιπόν να εκφράσω τα συγχαρητήρια μου στους φοιτητές που προσπάθησαν να επιλύσουν τις παραπάνω ασκήσεις κατά την διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 2009-2010.

ΟΙ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΕΡΓΑΣΤΗΚΑΝ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	Α.ΜΗΤΡΩΟΥ
ΜΠΙΤΑΣ ΘΥΜΙΟΣ	09138
ΤΣΙΡΙΝΤΑΝΗΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ	09210
ΜΠΟΥΤΣΑΚΗΣ ΝΙΚΟΣ	09142
ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ	09002
ΤΡΥΓΩΝΑΚΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ	04202
ΕΥΑΝΘΙΑ ΛΙΟΥΠΡΑ	09114
ΛΥΜΠΕΡΟΠΟΥΛΟΥ ΣΟΦΙΑ	09118
ΟΛΝΤΑΣΗ ΟΛΓΑ	09152
ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΣΟΦΙΑ	09164
ΤΗΛΕΜΑΧΟΥ ΕΥΤΥΧΙΑ	09256
ΚΑΣΠΙΡΗΣ ΣΠΥΡΟΣ	06046
ΔΕΡΜΕΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ	09044
ΜΠΑΛΗΣ ΜΙΛΤΙΑΔΗΣ	09130
ΒΑΡΕΛΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ	09276
ΜΟΥΛΟΥΔΑΚΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ	02244
ΤΥΡΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ	06164
ΓΕΡΙΜΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ	
ΜΟΥΛΟΥΔΑΚΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ	02244
ΓΚΡΙΤΖΑΛΗ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	
ΚΑΤΣΑΜΠΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ	09082
ΑΝΑΡΓΥΡΟΥ ΕΛΕΝΗ	09008
ΤΖΕΛΕΠΗ ΝΑΤΑΣΑ	
ΚΕΛΛΙΔΗΣ ΚΥΡΙΑΚΗΣ	09084
ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	08230
ΖΑΧΑΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ	09060