

**ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ Ι  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2009-2010**

Παρακάτω δίνονται 17 συνολικά ασκήσεις με πολλαπλά ερωτήματα τις οποίες θα επιλύσετε με όποιον τρόπο θέλετε. Οι συγκεκριμένες ασκήσεις αντιστοιχούν σε ποσοστό 10% της συνολικής σας βαθμολογίας εάν αυτές επιλυθούν στο σύνολο τους και σωστά. Οι ασκήσεις θα παραδοθούν μέχρι και την Πέμπτη 21/01/2010 ηλεκτρονικά στο e-mail: [Kounetas@upatras.gr](mailto:Kounetas@upatras.gr). Θα ήταν προτιμότερο να δοθούν με την μορφή word document και με την χρήση του προγράμματος math type ή Microsoft equation για την αναγραφή του μαθηματικού κομματιού. Οποιαδήποτε καθυστέρηση θα σημαίνει μηδενική βαθμολόγηση.

*Καλές Γιορτές με Υγεία και ευτυχισμένος ο καινούργιος χρόνος*

**Άσκηση 1**

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$1. f(x) = \sqrt{|4x-2| - |3x+6|}, (\text{απάντηση: } (-\infty, -\frac{4}{7}] \cup [8, +\infty))$$

$$2. g(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}, (\text{απάντηση: } \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\})$$

$$3. f(x) = \frac{|x| - x - 1}{\sqrt{x - |x|} + 1} (\text{απάντηση: } [0, +\infty))$$

**Άσκηση 2**

Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = 2x^2 - 4x + 3, x \in [-1, 4]$  (απάντηση: (1,19)). Ομοίως για την συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, (\text{απάντηση } [\sqrt{2}, +\infty))$

**Άσκηση 3**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Δείξτε ότι είναι περιττή. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

**Άσκηση 4**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ ,  $g(x) = \log x$ . Να υπολογιστεί η  $g \circ f$ .

Ομοίως για την συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  να ορίσετε την  $g \circ g \circ g$ .

**Άσκηση 5**

Να μελετηθούν οι ακόλουθες συναρτήσεις

$$1. f(x) = x^2 - 4|x-1| + 3$$

$$2. g(x) = \log x$$

$$3. h(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

$$4. t(x) = \sqrt{x}e^{-0.1x}$$

**Άσκηση 6**

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{\eta\mu^2 x}}{x} = \dots = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \dots = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+} - \sqrt{x}] = \dots = 0(\infty)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\eta\mu 3x)}{x} = \dots = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \dots = 1/6$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \dots = 1$$

**Άσκηση 7**

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής  $q = -5L + 60L^2$ .

Σε ποιο επίπεδο παραγωγής αρχίζει ο νόμος των φθινουσών αποδόσεων; Επίσης να βρεθούν τα σημεία που μεγιστοποιούνται οι συναρτήσεις του οριακού και του μέσου προϊόντος.

**Άσκηση 8**

1. Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  με ένα πολυώνυμο και να υπολογίσετε τον αριθμό  $\ln(1,25)$  με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων

2. Να διατυπωθεί σε ανάπτυγμα MacLaurin η συνάρτηση  $f(x) = 2x - x^2 + 4x^3 + 4$ .

3. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε το πολυώνυμο Taylor βαθμού  $n$  για να προσεγγίσετε τις τιμές της συνάρτησης γύρω από το σημείο  $x_0$ . Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε το λάθος της προσέγγισης.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad n=4 \quad x_0 = 4, \quad g(x) = e^{-x} \quad n=3 \quad x_0 = 0.5$$

**Άσκηση 9**

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$1. \int 2x(x^2 + 3)^4 dx \quad 2. \int x(x^2 + 3)^{3/2} dx$$

$$3. \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 8}} dx \quad 4. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$5. \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx \quad 6. \int (x+4) \ln x dx$$

$$7. \int e^x \eta \mu x dx \quad 8. \int \sqrt{3x^2 + 3x + 1} dx$$

$$9. \int \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \quad 10. \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$11. \int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \quad 12. \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$$

$$13. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx \quad 14. \int \cos^4 x dx$$

$$15. \int \frac{3}{x^2 + 4} dx \quad 16. \int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)} dx$$

$$17. \int \frac{2x+3}{x^2(x-3)} dx \quad 18. \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

**Άσκηση 10**

Έστω ότι το οριακό κόστος μιας επιχείρησης δίνεται από την συνάρτηση  $\frac{dMC}{dq} = 20e^{-0.5q}$  και ότι τα σταθερά κόστη είναι 50 χρηματικές μονάδες. Να υπολογιστεί το συνολικό κόστος της επιχείρησης.

**Άσκηση 11**

Η συνάρτηση οριακών κερδών μιας επιχείρησης όταν η παραγωγή κυμαίνεται μεταξύ 40 και 70 μονάδων, έχει υπολογιστεί ότι είναι  $\Pi'(q) = \frac{-q^2}{10} 5q - 3$ . Να υπολογιστεί το μέσο κέρδος της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ των 40 και 70 μονάδων.

**Άσκηση 12**

Η οριακή πρόσοδος μιας επιχείρησης δίνεται από την εξής συνάρτηση  $MR = 1 - 3q - 4q^2$ . Να υπολογιστούν η συνολική πρόσοδος και η συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης.

**Άσκηση 13**

Μια μονοπωλιακή επιχείρηση αποσκοπεί στην μεγιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης  $\Pi(q) = (100 - q)q - 25q$  όπου  $P = 100 - q$  και  $C = 25q$  είναι οι συναρτήσεις ζήτησης και κόστους αντίστοιχα. Βρείτε την παραγομένη ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη. (απάντηση  $q = 37.5$ ).

**Άσκηση 14**

Μια επιχείρηση έχει εκτιμήσει ότι η ζήτηση για ένα προϊόν μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή με την οποία χρεώνει το προϊόν της, σύμφωνα με την σχέση:  $Q = 28000 - 400P$  όπου  $Q$  είναι η ποσότητα που ζητείται από την επιχείρηση και  $P$  η τιμή του προϊόντος. Το συνολικό ετήσιο κόστος από την παραγωγή  $Q$  μονάδων ισούται με:  $TC = 350000 + 300Q + 0.0015Q^2$

- (α) Βρείτε πόσες μονάδες  $Q$  πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη της επιχείρησης.
- (β) Σε ποια τιμή θα πρέπει να διατίθεται το προϊόν;
- (γ) Ποια θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης;
- (δ) Αν μέγιστη δυνατή παραγόμενη ποσότητα είναι 40000 μονάδες, ποια θα είναι η νέα άριστη ποσότητα που θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της επιχείρησης; Συγκρίνετε την νέα ποσότητα με αυτή του ερωτήματος α.

### Άσκηση 14

Το σταθερό κόστος μιας επιχείρησης είναι 100 χρηματικές μονάδες, ενώ το

μεταβλητό κόστος της δίνεται από τη συνάρτηση  $VC(Q) = 2 + \frac{100}{q}$

όπου  $Q$  είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

- (α) Να βρείτε τη συνάρτηση συνολικού κόστους και τη συνάρτηση οριακού κόστους (απάντηση 2).
- (β) Να υπολογίσετε το οριακό κόστος που αντιστοιχεί σε ποσότητα  $Q=30$  μονάδων και να εκτιμήσετε τη μεταβολή του συνολικού κόστους όταν η παραγόμενη ποσότητα αυξάνεται κατά 2 μονάδες από το επίπεδο των 30 μονάδων (απάντηση 4 χ.μ)

### Άσκηση 15

Έστω η συνάρτηση ζήτησης  $Q = \frac{1000}{\sqrt{P}}$ . Να βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης

όταν η τιμή είναι  $P=3$  και όταν είναι  $P=5$  και να εκτιμήσετε τη μεταβολή στα συνολικά έσοδα καθώς η τιμή μεταβάλλεται μεταξύ αυτών των δύο ορίων.

### Άσκηση 16

Έστω η συνάρτηση ζήτησης  $Q = \frac{40}{P^2}$ . Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή

που αντιστοιχεί στην τιμή  $P=8$ .

**Άσκηση 17**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2l}{x-3}, x < 3 \\ \frac{2l - k, x=3}{2x^2 - (2l+1)x + 3k}, x > 3 \end{cases}$$

1. Δίνεται η συνάρτηση

Να βρεθούν οι τιμές των  $l, k$  ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια-παραγωγισιμότητα την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax + 2}{x-3}, x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x-1}, 1 < x \end{cases}$$