ΜΑΘΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Α. *Εύρεση Πεδίου Τιμών Συναρτήσεων*

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση h, $h(x)=2x^2-4x+3, x\in[-1,4]$ Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

Λύση

Η λογική για την εύρεση του πεδίου τιμών αφορά τον προσδιορισμό των τιμών $y\in R$ όπου η εξίσωση με άγνωστο x $y=2x^2-4x+3,(1)$ έχει λύση στο διάστημα $[-1,4]$. Η εξίσωση (1) $2x^2-4x+3-y=0,(2)$. Η εξίσωση έχει λύση στο R όταν η διακρίνουσα είναι θετική. Άρα θα πρέπει $\Delta\geq 0,(16-8(3-y))\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 1$. Η εξίσωση (2) έχει λύσεις $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2(y-1)}}{2}$. Επειδή όμως $x\in[-1,4]\Rightarrow -1\leq \dfrac{2\pm\sqrt{2(y-1)}}{2}\leq 4$.

Λύνοντας τις δύο ανισώσεις $y\leq 9$ ή $y\leq 19$.Άρα το πεδίο τιμών είναι [1,19].

Σημείωση: *Η εύρεση του πεδίου τιμών γίνεται και με βάση την μονοτονία.*

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το πεδίου τιμών της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{2x-3}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι $[{}^{3}\!/_{2},+\infty]$. Το πεδίο τιμών μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$R(f)=\{y\in R:\exists\, x\in D(f) \text{ με } y=\sqrt{2x-3}\}=.......=$$

$$=\{y\in R: x\in[{}^{3}\!/_{2},+\infty) \text{ με } x=\frac{3+y^2}{2}, y\geq 0\}=[0,+\infty)$$

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας!!!!)

Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$

Απάντηση: $D_f=(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$.

Β. *Όριο Συναρτήσεων*

Στην συνέχεια παρατίθενται τα παρακάτω όρια τα οποία θα πρέπει να γνωρίζουμε:

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\phi x}{x}=1$$

$$3.\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$4.\lim_{x\to 0}(\frac{e^{x}-1}{x})=1$$

$$5.\lim_{x\to 1}(\frac{\ln x-1}{x})=1$$

$$6.\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a,a\in R^{*},-1\le x\neq 0$$

Β1. Όριο όταν το x τείνει σε πραγματικό αριθμό.

- Όρια Πολυωνυμικών συναρτήσεων
- Όρια Ρητών Συναρτήσεων
- Όρια που εμπλέκουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, λογαριθμικές και εκθετικές.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση h, $h(x)=\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$ Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο 1.

Λύση

Μετά τις απαραίτητες παραγοντοποιήσεις (σχήμα Horner, χρήση ταυτοτήτων κ.λ.π.) έχουμε ότι $h(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)^3(x-2)}=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ με $D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$. Άρα θα έχουμε ότι $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}x=+\infty$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x+10}}$ Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο -1.

<u>Λύση</u>

Για την λύση ασκήσεων που περιέχουν ρίζες εργαζόμαστε αρκετές φορές χρησιμοποιώντας την συζυγή παράσταση. Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με $\sqrt{x+5}+2$, $\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}$. Κάνοντας τις ανάλογες πράξεις έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}}{(x-2)(\sqrt{x+5}+2)}=...=-1/2$.

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}}{(x-2)(\sqrt{x+5}+2)}=...=-1/2$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2|x-3|+5|1-x|-10}{(x^2-9)}=.....=\delta\varepsilon\nu \text{ υπάρχει}$$

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x-64}=...={}^{1}\!/_{48}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}{x^2}=...={}^{3}\!/_{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 5x}{x^2}=...=8$$

Β2. Όριο όταν το x τείνει στο άπειρο.

- Όριο της $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_\nu x^\nu)=\begin{cases}+\infty, \text{ αν } a_\nu>0\\ -\infty, \text{αν } a_\nu<0\end{cases}$
- Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_\nu x^\nu+...+\alpha_1 x_1+a_0)=\pm\lim_{x\to\pm\infty}a_\nu x^\nu$$

- Όριο Ρητής Συνάρτησης

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu+...+\alpha_1 x_1+a_0}{b_m x^m+...+b_1 x_1+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{b_m x^m}=\frac{a_\nu}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}x^{\nu-m}$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το όριο της $f(x)=\dfrac{(a-2)x^2+4x+1}{(a+3)x+2}$ όταν $x\to+\infty$.

Λύση

Στην πρώτη περίπτωση εξετάζουμε εάν $a\neq 2,-3$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^2+4x+1}{(a+3)x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)}{(a+3)}x=\begin{cases}+\infty, \alpha\nu\ \alpha\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)\\ -\infty, \alpha\nu\ \alpha\in(-3,2)\end{cases}$$

Στην δεύτερη περίπτωση εάν α=2 τότε $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+4x+1}{5x+2}=\dfrac{4}{5}$. Τέλος στην Τρίτη περίπτωση όπου α=-3 θα έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+4x+1}{2}=-\infty$.

- Όριο της Συνάρτησης $\sqrt[\kappa]{f(x)}$

  Θα πρέπει να υπολογίσουμε το εξής όριο

  $$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[\kappa]{(a_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1x_1+a_0)}=\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{\nu/k}\sqrt[\kappa]{a_\nu}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το όριο της $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-4x+5}}{x+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Άρα συνεχίζοντας να δουλεύουμε όπως παραπάνω θα πρέπει:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-4x+5}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-4/x+5/x^2}}{x(1+1/x)}\underset{x<0}{=}-\sqrt{3}$$

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})=....=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^2+1}+x)=....=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+{}^{1}\!/_{x})^x=...=e$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=....={}^{1}\!/_{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|3x^5-x+1|-1}{|1+x-x^5|+2x-3}=.....=3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{9x^4+3}-\sqrt{9x^4+5})=...=+\infty$$

C. *Συνέχεια Συναρτήσεων*

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} {}^{x^2-x-2l}\!/_{x-3}, x<3 \\ 2l-k, x=3 \\ \dfrac{2x^2-(2l+1)x+3k}{x-3}, x>3 \end{cases}$.

Να βρεθούν οι τιμές των l,k ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 2

Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}, x>0 \\ \ln(x+3), -3<x\le 0 \end{cases}$

<u>Λύση</u>

- Για κάθε χ>0 η f είναι συνεχής γιατί οι συναρτήσεις $\ln(x+1), 3^x-1$ είναι συνεχής άρα και το πηλίκο τους είναι συνεχής συνάρτηση.
- Επίσης $\forall x\in(-3,0)$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x, x+3$.
- Για χ=0 έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\ln(x+3))=\ln 3$ και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln 3} - 1}{x\ln 3} \frac{x}{\ln(x+1)} \ln 3 =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln 3} - 1}{x\ln 3} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)-1}} \ln 3 = \ln 3$$

Άρα η συνάρτηση μας είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας!!!!)

Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2+3, x<2 \\ a+1, x=2 \\ 3x+1, x>2 \end{cases}$