ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 13

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών

- Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν έχουν λύση οι εξισώσεις της μορφής

$$x^{2n} = -a \text{ όπου α θετικός αριθμός}$$

Ειδικότερα δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος επαληθεύει την εξίσωση

$$x^2 = -1$$

Επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών σε ένα σύνολο στο οποίο οι παραπάνω εξισώσεις να έχουν λύση:

Το σύνολο αυτό θα το ονομάζουμε **σύνολο των μιγαδικών** και θα το συμβολίσουμε με $\mathbb{C}$.

Ορίζουμε ως λύση της $x^2 = -1$ την λεγόμενη **φανταστική μονάδα** την οποία συμβολίζουμε με i:

$$i^2 = -1\,.$$

Μορφή του μιγαδικού αριθμού και μιγαδικό επίπεδο

- Οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την μορφή:

$$z=x+yi \quad \text{με } x,\ y \text{ πραγματικούς αριθμούς}$$

Το x ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού και συμβολίζεται με **Re(z)=x**

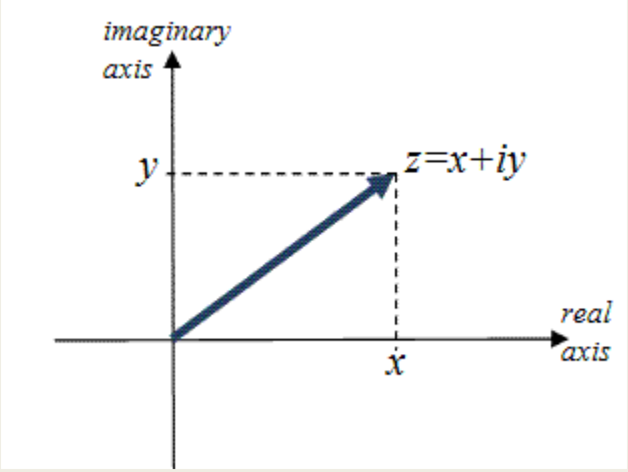
ενώ το y ονομάζεται **φανταστικό μέρος** και συμβολίζεται με **Im(z)=y**

- Σε κάθε μιγαδικό αριθμό z=x+yi αντιστοιχίζουμε το σημείο M(x,y) και σε κάθε σημείο M(x,y) αντιστοιχίζουμε τον μιγαδικό αριθμό z=x+yi. Το επίπεδο του οποίου όλα τα σημεία είναι εικόνες πραγματικών αριθμών ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο**.
- Το M ονομάζεται εικόνα του μιγαδικού αριθμού.
- Ο άξονας xx΄ ο οποίος περιέχει όλα τα σημεία M(x,0) ονομάζεται

  άξονας των πραγματικών αριθμών,

  ενώ ο άξονας yy΄ ο οποίος περιέχει όλα τα σημεία M(0,y)

  ονομάζεται **άξονας των φανταστικών αριθμών**.



Ισότητα μιγαδικών

- Δύο μιγαδικοί αριθμοί θα ονομάζονται ίσοι αν και μόνο αν τα πραγματικά τους μέρη και τα φανταστικά τους μέρη είναι ίσα.

Οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i,\ \ w = \gamma + \delta i$ θα είναι **ίσοι**, z=w αν και μόνο αν α=γ και β=δ.

Ένας μιγαδικός αριθμός θα είναι μηδέν αν και μόνο αν το πραγματικό του μέρος και το φανταστικό του μέρος είναι μηδέν.

Αν z=x+yi θα είναι $z = 0 \Leftrightarrow x = 0\ \kappa\alpha\iota\ y = 0$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποιους

$$(x^2 - 3x + y + 3) + (x + 2y)i = 0$$

Ο μιγαδικός αυτός θα είναι μηδέν αν $x^2 - 3x + y + 3 = 0$ (1) και $x + 2y = 0$ (2).

Από την (2) έχουμε $x = -2y$ και αντικαθιστώντας στην (1)

$$4y^2 + 7y + 3 = 0$$

Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι $y_1 = -3/4$, $y_2 = -1$

Τα αντίστοιχα x θα είναι $x_1 = 3/2$, $x_2 = 2$

Πράξεις μιγαδικών: Α. Πρόσθεση 1/3

Α. Πρόσθεση

Ορισμός: Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i,\ \ w = \gamma + \delta i$, τότε ως **άθροισμά** τους ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z + w = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

Παράδειγμα: Αν έχουμε τους μιγαδικούς $z = 2 - 3i,\ \ w = 1/2 + 10i$, τότε το άθροισμά τους θα είναι

$$z + w = \left(2 + \frac{1}{2}\right) + (-3 + 10)i = \frac{5}{2} + 7i$$

Πράξεις μιγαδικών: Α. Πρόσθεση 2/3

- Ιδιότητες πρόσθεσης

1. **Αντιμεταθετική** $z + w = \mathrm{w} + \mathrm{z}$ για κάθε z και w στο $\mathbb{C}$.
2. **Προσεταιριστική** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
3. **Νόμος διαγραφής** Αν $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$, τότε $z_2 = z_3$ για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
4. **Ουδέτερο στοιχείο** Υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 0 + 0i$ τέτοιος ώστε

$$z^* + \mathrm{z} = \mathrm{z} + z^* = z \quad \text{για κάθε z στο } \mathbb{C}.$$

5. **Συμμετρικό (ή αντίθετο) στοιχείο** Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός z΄ για τον οποίο ισχύει

$$z + z' = z' + z = z^*$$

Δηλαδή αν z=α+βi τότε z΄ = -α-βi και z+ z΄ = z΄ +z=0

Πράξεις μιγαδικών: Α. Πρόσθεση 3/3

1. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε η εξίσωση

$$z_1 + z = z_2$$

Έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_2 + (-z_1)$.

Η μοναδική αυτή λύση ονομάζεται διαφορά των δύο μιγαδικών και έτσι ορίζεται η πράξη της αφαίρεσης.

Έτσι αν $z = a + \beta i, \quad w = \gamma + \delta i$, **τότε**

$$z - w = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

Παράδειγμα Αν έχουμε τους μιγαδικούς $z = -5 - 3i, \quad w = -1 + 6i$, τότε η διαφορά τους θα είναι

$$z - w = (-5 + 1) + (-3 - 6)i = -4 - 9i$$

Πράξεις μιγαδικών: Β. Πολλαπλασιασμός 1/3

Ορισμός: : Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i, \;\; w = \gamma + \delta i$, τότε ως **γινόμενό** τους ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός

$$zw = (a + \beta i)(\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$$

Πράγματι: $(a + \beta i)(\gamma + \delta i)$=α $(\gamma + \delta i)$ + βi$(\gamma + \delta i)$=

=αγ+αδi+βγi+βδ i^2

=$(\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = -1 + 4i, \;\; w = 3 - 2i$, τότε

$$zw = (-1 + 4i)(3 - 2i) = -3 + 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 8\, i^2$$

$$= -3 + 8 + 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i}$$

$$= 5 + 14\mathrm{i}$$

Πράξεις μιγαδικών: Β. Πολλαπλασιασμός 2/3

- Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

1. **Αντιμεταθετική** $zw = \mathrm{wz}$ για κάθε z και w στο $\mathbb{C}$.
2. **Προσεταιριστική** $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
3. **Επιμεριστική** $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
4. **Νόμος διαγραφής** Αν $z_1\, z_2 = z_1\, z_3$, τότε $z_2 = z_3$ για κάθε $z_1 \neq 0, z_2, z_3$ στο $\mathbb{C}$.
5. **Ουδέτερο στοιχείο** Υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1 + 0i$ τέτοιος ώστε

$$z^*\mathrm{z} = \mathrm{z}z^* = z \quad \text{για κάθε z στο } \mathbb{C}.$$

Πράξεις μιγαδικών: Β. Πολλαπλασιασμός 3/3

5. **Συμμετρικό στοιχείο (ή αντίστροφος)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός z΄ για τον οποίο ισχύει

$$\mathbf{z}\, z' = z'\, z = z^{*} \qquad \text{με } z \neq 0$$

Δηλαδή αν z=α+βi τότε z΄ =1/ (α+βi) και zz΄ = z΄ z=1

6. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$ τότε η εξίσωση

$$z_2 z = z_1$$

Έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_1 {z_2}^{-1}$

Η μοναδική αυτή λύση ονομάζεται πηλίκο των δύο μιγαδικών και έτσι ορίζεται η πράξη της διαίρεσης.

Δύναμη μιγαδικών

Όπως ορίζονται οι δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη ακέραιο, με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι δυνάμεις των μιγαδικών:

- $z^1 = z$ για κάθε z ∈ $\mathbb{C}$

Και επαγωγικά:

- $z^n = z^{n-1}z$ για κάθε z ∈ $\mathbb{C}$ και n=2,3,...

Επίσης

- $z^0 = 1$ και $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ για κάθε z ∈ $\mathbb{C}$ με $\mathrm{z} \neq 0$ και n=2,3,...
- Δεν ορίζεται η έκφραση 0^0

Δύναμη μιγαδικών

- Αποδεικνύεται ότι και για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν για τις δυνάμεις των μιγαδικών.
- Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι δυνάμεις του i:

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^2 i^2 = 1$

$i^5 = i^4 i = i, \quad i^6 = i^5 i = i^2 = -1$ ......

- Γενικά: $i^n = i^{4k+\upsilon} = i^{4k} i^{\upsilon} = (i^4)^{\upsilon} i^{\upsilon} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \ \upsilon = 0 \\ i, & \alpha\nu \ \upsilon = 1 \\ -1, & \alpha\nu \ \upsilon = 2 \\ -i, & \alpha\nu \ \upsilon = 3 \end{cases}$

- Παράδειγμα: Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού $(2+3i)^3$.

Αναπτύσσουμε την ταυτότητα

$$(2+3i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 + (3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i =$$

$$= 8 - 54 - 27i + 36i = -46 + 9i$$

Άρα Re(z)=-46 και Im(z)=9

Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

- **Ορισμός** Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = a + \beta i$. Θα ονομάζουμε τον μιγαδικό $a - \beta i$ συζυγή του z και θα τον συμβολίζουμε με $\bar{z}$.

$$\bar{z} = a - \beta i$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι:

$$z\bar{z} = (a + \beta i)\ (a - \beta i) = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$z + \bar{z} = a + \beta i + a - \beta i = 2\alpha$$

Παράδειγμα: Να γραφεί στη μορφή $a + \beta i$ ο μιγαδικός:

z= $\frac{1+2i}{3-i}$

Λύση: Μετατρέπουμε τον παρονομαστή του σε πραγματικό αριθμό πολλαπλασιάζοντας τους όρους του κλάσματος με τον συζυγή του παρονομαστή

z= $\frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} =$

$=\frac{3+i+6i-2}{3^2+1^2} = \frac{1+7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$

Ιδιότητες συζυγών

1. $(\overline{-z}) = -\bar{z}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ n=1,2,…
4. $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
5. $(\overline{\frac{z_1}{z_2}}) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $z_2 \neq 0$
6. $\overline{az} = a\bar{z},$ $a \in \mathbb{R}$
7. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
8. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Εξίσωση δευτέρου βαθμού

- Θεωρούμε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση

$$\alpha z^2 + bz + c = 0,\ \ a \neq 0 \qquad (1)$$

- Η (1) γράφεται:

$$z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

1. Αν Δ= $b^2 - 4ac > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Αν Δ=0, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση την $z = -\frac{b}{2a}$
3. Αν Δ<0, τότε η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Πολυωνυμικές εξισώσεις

- Μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές στο $\mathbb{C}$ έχει την μορφή

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}$$

με n=1,2,… και $a_i \in \mathbb{R}$, με $i = 0, \dots, n$.

Αν $a_n \neq 0$ η πολυωνυμική συνάρτηση είναι βαθμού n.

Ένας μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής τότε την επαληθεύει:

$$a_n {\mathrm{z}_0}^n + a_{n-1} {\mathrm{z}_0}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{z}_0 + a_0 = 0$$

Αποδεικνύεται ότι: αν ένας μιγαδικός είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης τότε και ο συζυγής του είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής

Εφαρμογή

- Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$

ii. $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$

Λύση

1. Θέτουμε $w = z^2$ έτσι η εξίσωση γίνεται

$$w^2 + 5w + 4 = 0$$

Με Δ=9, η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις

$$w_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

w_1 =-4, και $w_2 = -1$

Επομένως για w_1 =-4 έχουμε $z^2 = -4$, άρα $z = \pm$2i

Για $w_2 = -1$ έχουμε $z^2 = -1$, άρα $z = \pm$i

- $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$

Η εξίσωση αυτή έχει τρεις πραγματικές ρίζες ή μια πραγματική και 2 μιγαδικές.

Παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο με σχήμα Horner

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -8 & 1 \\ \downarrow & 1 & 4 & 8 & \\ \hline 1 & 4 & 8 & 0 & \end{array}$$

Επομένως το πολυώνυμο γράφεται:

$$z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = (z-1)(z^2 + 4z + 8)$$

Λύνουμε την εξίσωση $z^2 + 4z + 8 = 0$

Με Δ=-16 έχουμε

$z_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{16}}{2} = -2 \pm 2\mathrm{i}$

Συνεπώς το πολυώνυμο έχει τρεις ρίζες. Μια πραγματική και 2 μιγαδικές.