

**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024**

Μαθηματικά για Οικονομολόγους I-Μάθημα 1ου Γενικευμένο
Ολοκληρωμα (Ολοκληρωτικός Λογισμός).

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Πολλά οικονομικά φαινόμενα εξελίσσονται διαχρονικά με αποτέλεσμα να είναι χρήσιμος ο υπολογισμός του ολοκληρώματος στο άπειρο. Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα θα καλείται γενικευμένο όταν τουλάχιστον ένα από τα όρια ολοκλήρωσης του είναι άπειρο ή όταν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση τείνει στο άπειρο.

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx, \int_0^1 x^{-1/2} dx,$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΑ ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε ορίζονται τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$1. \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

$$2. \int_{-\infty}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} f(x) dx + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 f(x) dx$$

Παραδείγματα

$$1. \int_1^{\infty} x^{-2} dx$$

$$2. \int_1^{\infty} x e^{-2x} dx$$

$$3. \int_{-\infty}^0 e^x dx =$$

Μετασχηματισμός Laplace, Συνάρτηση Gamma

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[α,β]$ με σημεία ασυνέχειας στο συγκεκριμένο διάστημα. Τότε ορίζονται τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

1. Η f έχει σημείο ασυνέχειας το $x=β$:

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x)dx, \text{ εφόσον το όριο υπάρχει}$$

2. Η f έχει σημείο ασυνέχειας το $x=β$ ή δεν ορίζεται σε αυτό:

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx, \text{ εφόσον το όριο υπάρχει}$$

3. Η f έχει σημείο ασυνέχειας το $x=γ$ ή δεν ορίζεται σε αυτό ($α < γ < β$):

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{\gamma-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \int_{\gamma+\varepsilon'}^{\beta} f(x)dx, \text{ εφόσον και τα δύο όρια υπάρχουν}$$

Παραδείγματα-Γενικευμένα Ολοκληρώματα με ασυνεχείς συναρτήσεις

$$1. \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

$$2. \int_0^1 -\frac{3}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{3}{(x-4)^2} dx =$$

Η εκθετική κατανομή
ορίζεται ως

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \in [0, +\infty), \lambda > 0$$

Ναδειχθεί ότι το εμβαδόν
κάτω από το γράφημα
της f και του διαστήματος
 $[0, +\infty)$ ισούται με 1.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-kx^2} dx =$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx =$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Σημειώσεις από το e-class
- Προφανώς το κεφάλαιο 15 από το βιβλίο του Chiang και το κεφάλαιο 18^ο από τον Λουκάκη.