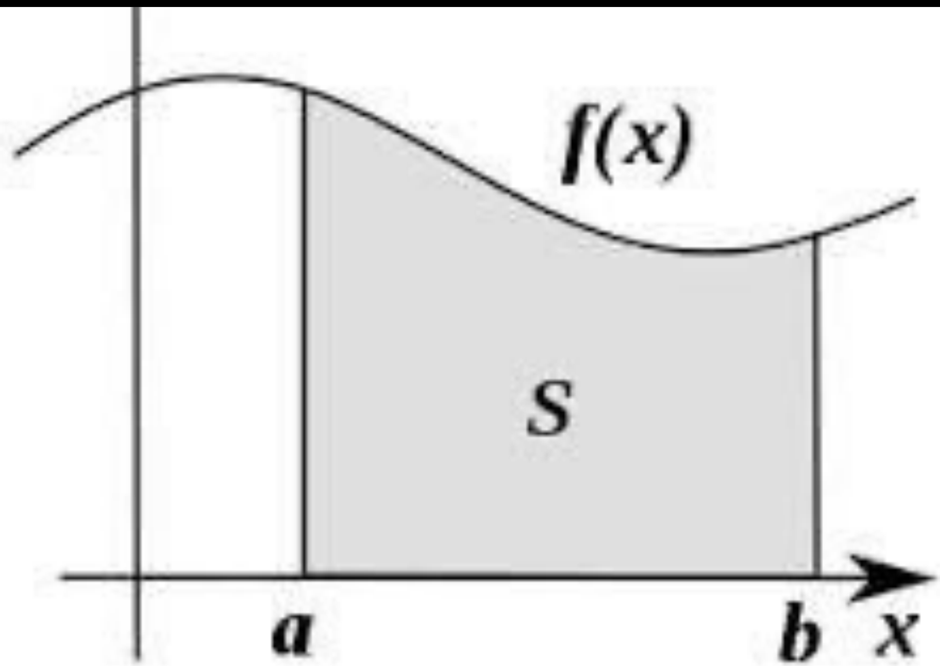
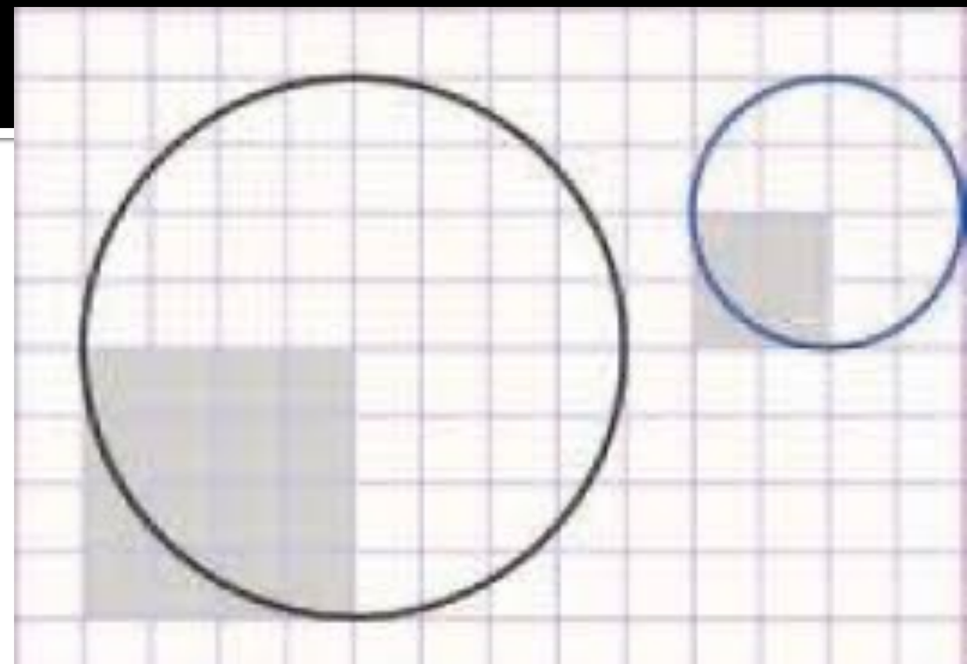
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 8ο Ορισμένο Ολοκλήρωμα (Ολοκληρωτικός Λογισμός).





Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

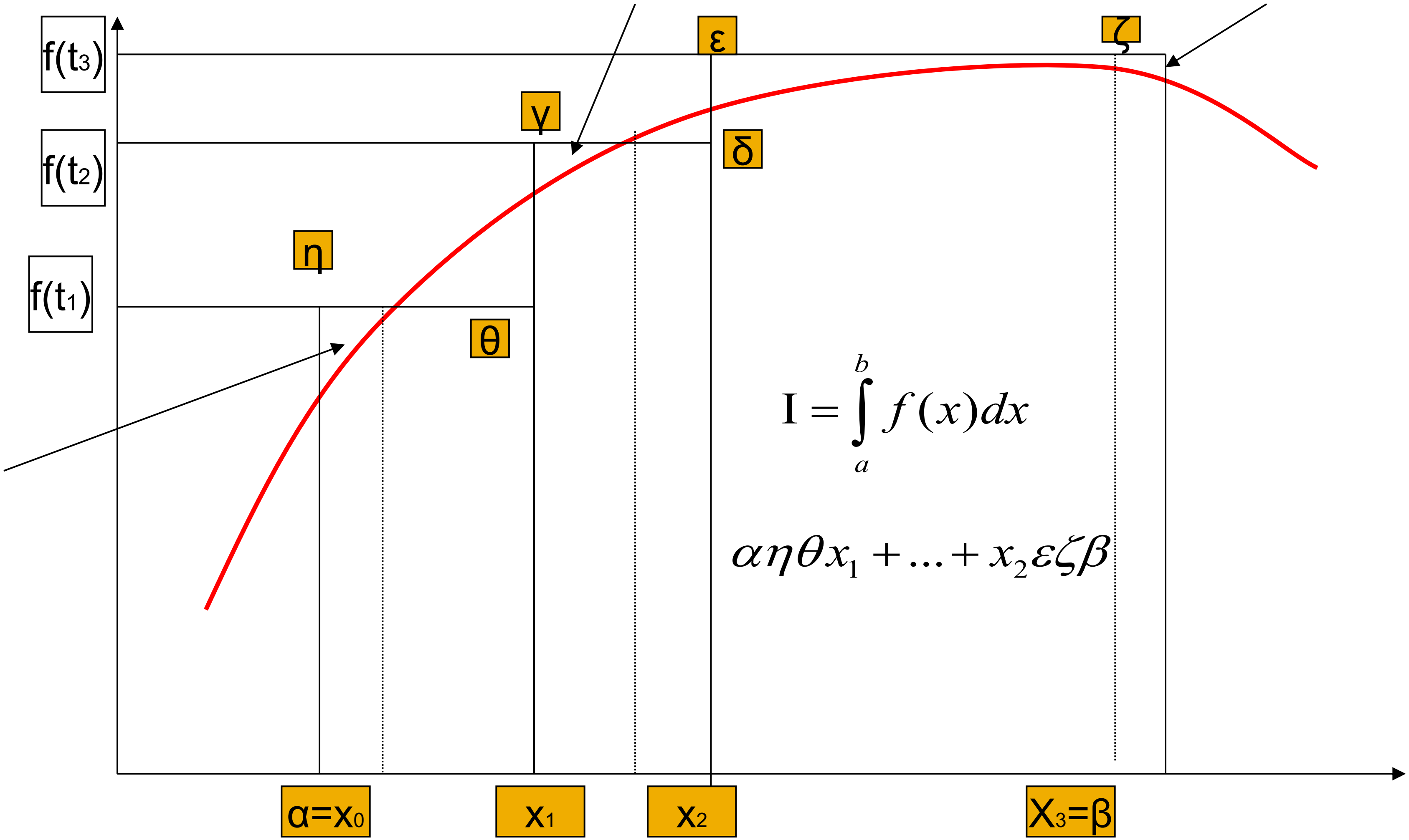
- Ποιες είναι οι συναρτήσεις των οποίων η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής τους παράστασης σε ένα σημείο είναι ίση με f;
- Πως υπολογίζεται το εμβαδόν διαφορετικών χωρίων;

Μέθοδοι Υπολογισμού (Αριθμητικοί)

- Κανόνας Τραπεζίου
- Κανόνας Ορθογωνίου
- Μέθοδος Simpson

Έννοια Διαμέρισης: Ονομάζουμε διαμέριση ενός διαστήματος κάθε πεπερασμένη γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_k) στοιχείων του $[\alpha,\beta]$ με πρώτο στοιχείο $x_0=\alpha$ και τελευταίο $x_\nu=\beta$. Λεπτομερέστερος διαμερισμός!

Διαμερισμός



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$\alpha\eta\theta x_1 + \ldots + x_2\varepsilon\zeta\beta$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

- Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη

στο διάστημα [α,β] η οποία είναι και φραγμένη στο διάστημα αυτό.

- Έστω διαμερισμός $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του [α,β]:

$$\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta \text{ και } \Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$$

- Τέλος έστω t οποιοδήποτε σημείο του υποδιαστήματος $x_\kappa - x_{\kappa-1}$

Το άθροισμα

$$S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(t)\Delta x_k$$

καλείται άθροισμα Riemann

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann ως προς x στο διάστημα [α,β] εάν υπάρχει το όριο του αθροίσματος Riemann της f για ν→ άπειρο. Όταν το όριο αυτό υπάρχει ονομάζεται ολοκλήρωμα Riemann (συνάρτηση υπο ολοκλήρωση) και συμβολίζεται με

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx, \lim_{\nu \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t)\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_K \Delta x_k , \sum_{k=1}^{n} m_K \Delta x_k$$

Ανώτερο και κατώτερο Άθροισμα Riemann

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

- Τα α,b καλούνται και κάτω και άνω άκρο ολοκλήρωσης.
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ..... ενώ το αόριστο είναι....
- Ολοκληρώσιμη κατά Riemann:

$\exists$ A : $\forall$ ε>0 $\exists$ διαμερισμός P_E :

$\forall$ P λεπτομερέστερο του P_E και

επιλογής σημείων ισχύει $|S(P,\varphi)-A| < \varepsilon$

Ορισμός 3-ΘΜΤ Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω συνάρτηση f ολοκληρώσιμη και συνεχής σε διάστημα [α,β] και ξ ανήκει στο (α,β). Θα ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα την ποσότητα:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \alpha < \xi < \beta$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. $\int_a^b \left(c_1 f(x) \pm c_2 g(x)\right) dx = c_1 \int_a^b f(x)dx \pm c_2 \int_a^b g(x)dx, c_1 c_2$ σταθερές

2. Εάν $c \in (a,b)$: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

3. Εάν $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a,b)$ τότε $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

4. Εάν $f(x) = c$ $\forall x \in (a,b)$ τότε $\int_a^b c dx = c(b-a)$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, f$ ολοκληρώσιμη στο [α,b].

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω συνάρτηση f ολοκληρώσιμη και συνεχής σε διάστημα [α,β]. Το ολοκλήρωμα $\int_a^x f(u)du$ Υπάρχει για κάθε x και είναι μια συνάρτηση F του άνω ορίου του x δηλαδή:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du, \text{ εάν x} \in (\alpha,\beta) \text{ και ισχύει}$$

$$F'(x) = f(x)$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω συνάρτηση f ολοκληρώσιμη και συνεχής σε διάστημα [α,β] και F μια παράγουσα της f δηλαδή ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Βασικά Θεωρήματα

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, b] τότε είναι και ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.
2. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, b] και α<c<b τότε
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$ και $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ στο [α, b]
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b cf(x)dx =$ c $\int_a^b f(x)dx$ για κάθε πραγματικό αριθμό c
6. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α,b] και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
7. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, b] και η συνάρτηση F ορίζεται στο [α, b] από την σχέση
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt},$$

τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο [α, b].

Το (πρώτο) Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού

- Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο [α, b] και η F ορίζεται στο [α, b] από τον τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο c στο [α, b], τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c και

$$F'(c) = f(c).$$

Απόδειξη

Με $c \in (a,b)$: $F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$

Με h>0 έχουμε $F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^c f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_c^a f(t)\,\mathrm{dt}$

$$= \int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{dt}$$

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού

- $$F(c+h)-F(c)=\int_{c}^{c+h} f(t)\,\mathrm{dt}$$

Αν θεωρήσουμε $m_h = inf\{f(x): c \leq x \leq c+h\}$ και $\mathrm{M}_h = sup\{f(x): c \leq x \leq c+h\}$ θα είναι

$$m_h \leq f(x) \leq M_h$$

τότε από το θεώρημα 6

$$m_h h \leq \int_{c}^{c+h} f(t)\,\mathrm{dt} \leq M_h h$$

$$m_h h \leq F(c+h)-F(c) \leq M_h h$$

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h$$

Με $\lim\limits_{h\to 0} m_h = \lim\limits_{h\to 0} M_h = f(c)$

$$\boldsymbol{F'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)}$$

Βασικό Πόρισμα

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, b] και για κάποια συνάρτηση g ισχύει f=g', τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{g(b)} - \mathrm{g(\alpha)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$

Τότε έχουμε $F'(x) = \mathrm{g}'(x) = f(x)$. Άρα θα υπάρχει αριθμός c τέτοιος ώστε

$$F(x) = \mathrm{g}(x) + c$$

Υπολογίζουμε τον c: $F(\alpha) = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{dt} = 0 = \mathrm{g}(\alpha) + c$

Άρα c=$-\mathrm{g}(\alpha)$ *και επομένως* $F(x) = \mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(\alpha)$. *Για x=b θα έχουμε*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = \mathrm{g(b)} - \mathrm{g(\alpha)}$$

Άσκηση 1

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2 dx$$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x} = t$ οπότε $x = t^2,\ \ dx = 2tdt,$

$\sqrt{x+1} = \sqrt{t^2+1},\ \ για\ x = 0 \Rightarrow t = 0$ και για $x = 4 \Rightarrow t = 2$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^2 \left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2 2tdt$$

Θέτουμε $\sqrt{t^2+1} = \omega - t$, οπότε $t^2+1 = (\omega - t)^2 \Leftrightarrow t^2+1 = \omega^2 - 2\omega t + t^2$

$\Leftrightarrow t = \frac{\omega^2-1}{2\omega}$

$\mathrm{d}t = \left(\frac{\omega^2-1}{2\omega}\right)' d\omega \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{4\omega^2-2\omega^2+2}{4\omega^2} d\omega = \frac{\omega^2+1}{2\omega^2} d\omega$

Άσκηση 1

- $για\ t=0 \Rightarrow \omega = 1$ και για t= $2 \Rightarrow \omega = \sqrt{5}+2$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{1}^{\sqrt{5}+2} (t+\omega-t)^2 2\frac{\omega^2-1}{2\omega}\frac{\omega^2+1}{2\omega^2}d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{5}+2}\frac{\omega^4-1}{\omega}d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{5}+2}(\omega^3-\frac{1}{\omega})\,d\omega =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\omega^4}{4}-ln|\omega|\right]_{1}^{\sqrt{5}+2} =$$

$$\frac{(\sqrt{5}+2)^4}{8}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)-\frac{1}{8}$$

Παραδείγματα

- Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

$1.\int_{2}^{3} \frac{x^2+5x+8}{x+3}dx$

$2.\int_{1}^{2} x\sqrt{2x^2+7}dx$

$3.\int_{1}^{2} x\ln x dx$

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τον οριζόντιο άξονα, τις ευθείες x=0,x=8 και την γραφική παράσταση της f(x)=-x$^2+7x-10$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

- Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την συνάρτηση

  $f(x) = -x^2 + 10x - 16$ στο $[2,8]$

  και στο διάστημα $[0,2]$

- Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τις καμπύλες

  $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 1$ στο $[1,2]$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση κέρδους μιας επιχείρησης είναι $\Pi(q)=5000-q-3062500/q$ και το παραγόμενο προϊόν μεταβάλλεται από 1000 σε 3000 μονάδες. Ποιο το μέσο κέρδος της επιχείρησης;

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Η ιδέα της παραγώγισης ολοκληρώματος εμφανίστηκε στην διαφάνεια με το πρώτο θεώρημα κατά το οποίο το ολοκλήρωμα παραγωγίζεται από ως προς το ανώτερο όριο του, δηλαδή,

$$F^{'}(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Σημειώσεις από το e-class
- Το κεφάλαιο 6 από το βιβλίο του Jacques, το κεφάλαιο 18 απο το βιβλίο του Renshaw.
- Επίσης, το κεφάλαιο 10 του ολοκληρωτικού από το βιβλίο του Ξεπαπαδέα ή το κεφάλαιο 17^{o} απο τον Λουκάκη.