ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 5ο
Διαφορικό-Ακρότατα & Μελέτη Συνάρτησης.

Εννοια Διαφορικού

Έστω $y=f(x)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη σε εάν διάστημα (α,β). Ως διαφορικό πρώτης τάξης ορίζεται η συνάρτηση $dy=f'(x)dx$

Κανόνες Διαφόρισης

Οι κανόνες διαφόρισης προέρχονται από τους κανόνες παραγώγισης απευθείας:

Εστω συναρτήσεις f(x)=y,z=g(x)

$$1.d(y+z)=dy+dz=f^{'}(x)dx+g^{'}(x)dx=[f^{'}(x)+g^{'}(x)]dx$$

$$2.d(cy^{m})=(cmy^{m-1})dy=cm[f(x)]^{m-1}f^{'}(x)dx$$

$$3.d(yz)=ydz+zdy=yg^{'}(x)dx+zf^{'}(x)dx=[f(x)g^{'}(x)+g(x)f^{'}(x)]dx$$

$$4.d\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{zdy-ydz}{z^{2}}=\frac{g(x)f^{'}(x)dx-f(x)g^{'}(x)dx}{[g(x)]^{2}}$$

$$5.d(f\circ g)=d[f(g(x))]=[f^{'}(g(x))g^{'}(x)]dx=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}dx$$

$$6.d(e^{z})=e^{z}dz=[g^{'}(x)e^{g(x)}]dx$$

$$7.d(\ln y)=\frac{dy}{y}=\frac{f^{'}(x)}{f(x)}dx$$

$$8.d(\sin y)=\cos ydy=[\cos f(x)]f^{'}(x)dx$$

Κανόνες Διαφόρισης-Παραδείγματα

Ε$\sigma\tau\omega$ οι παρακάτω συναρτήσεις: Να υπολογιστούν τα διαφορικά τους

$$1.\ y = x^3 + 4x^{1/2} - 5x + 2$$

$$2.\ y = (3x^2 + 2)^{3/2}$$

$$3.\ x^3y^2 - 2x^2y + 3xy^2 - 8xy = 0$$

$$4.\ \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x} - 8 = 0$$

Κανόνες Διαφόρισης-Παραδείγματα (οικονομικά)

Τα έσοδα μιας επιχείρησης από την πώληση q μονάδων ενός προϊόντος την ημέρα δίνονται ως εξής: $R(q) = 1000 + 10q^2 + 100\sqrt{q}$

Εκτιμάται ότι θα πωληθούν 400 μονάδες με σχετική ακρίβεια 5%. Να υπολογιστεί η σχετική ακρίβεια εκτίμησης των ημερήσιων εσόδων της επιχείρησης.

Παραγώγιση Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

Να βρεθεί η παράγωγος της παρακάτω συνάρτησης $x^2 + xy + y - 1 = 0$

Τι καλούμε Πεπλεγμένες Συναρτήσεις και ποια η διαφορά τους απο συναρτήσεις;

Η παραγώγισή τους επιτυγχάνεται με την χρήση του διαφορικού.

Να υπολογίσετε την παράγωγο της πεπλεγμένης Συνάρτησης $F(x,y) = y - 3x^4 = 0$

Να υπολογιστεί η πρώτη και δεύτερη τάξεως παράγωγος της $e^{xy} + x - y = 1$

Βασικά Θεωρήματα

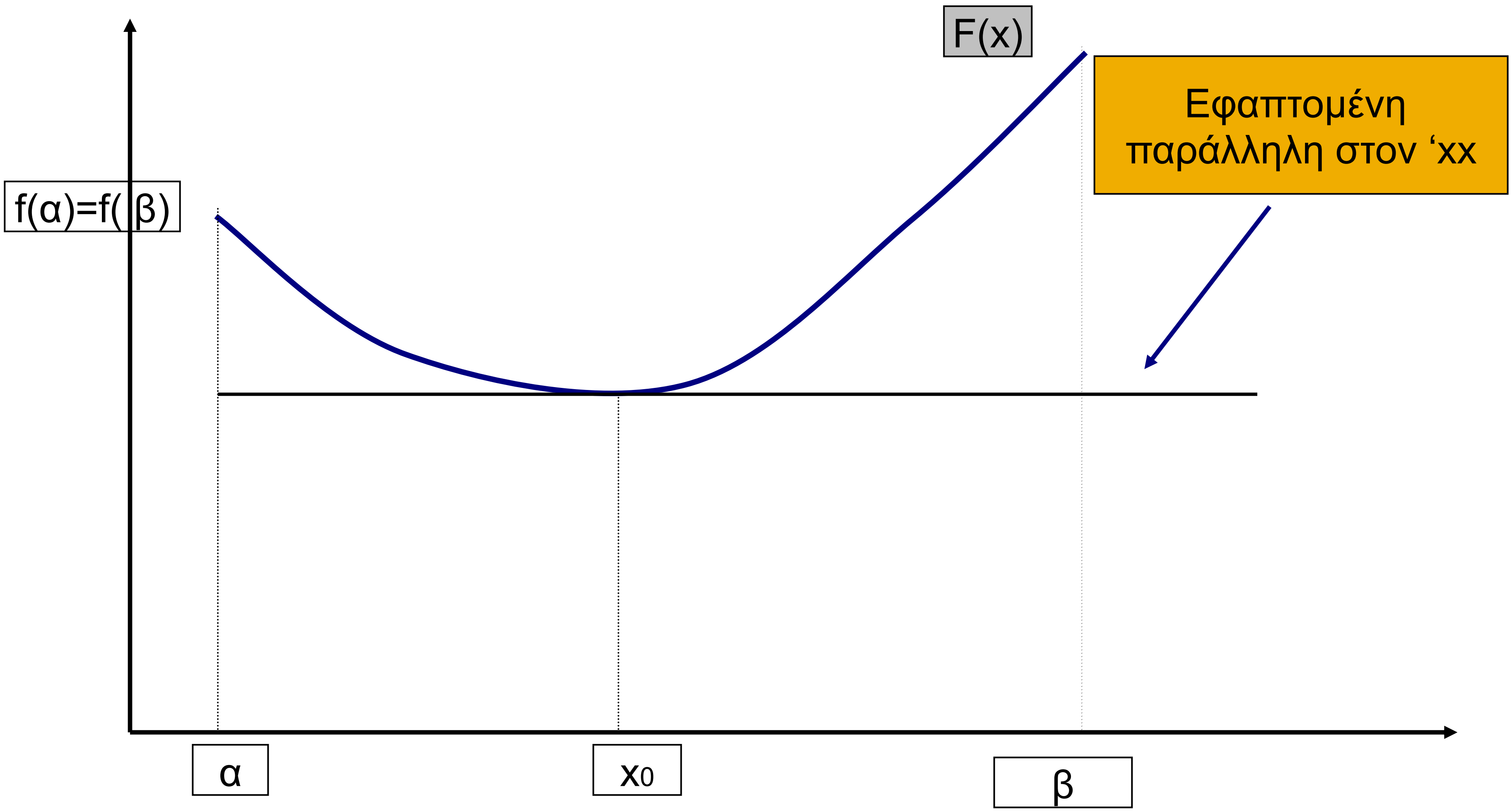
- Θεώρημα Rolle

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα [α,β] για την οποία θεωρούμε ότι:

- Είναι συνεχής στο [α,β]
- Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)
- $f(\alpha)=f(\beta)$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο x_0 στο (α,β) τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία Rolle



Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα [α,β] για την οποία θεωρούμε ότι:

- Είναι συνεχής στο [α,β]
- Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)

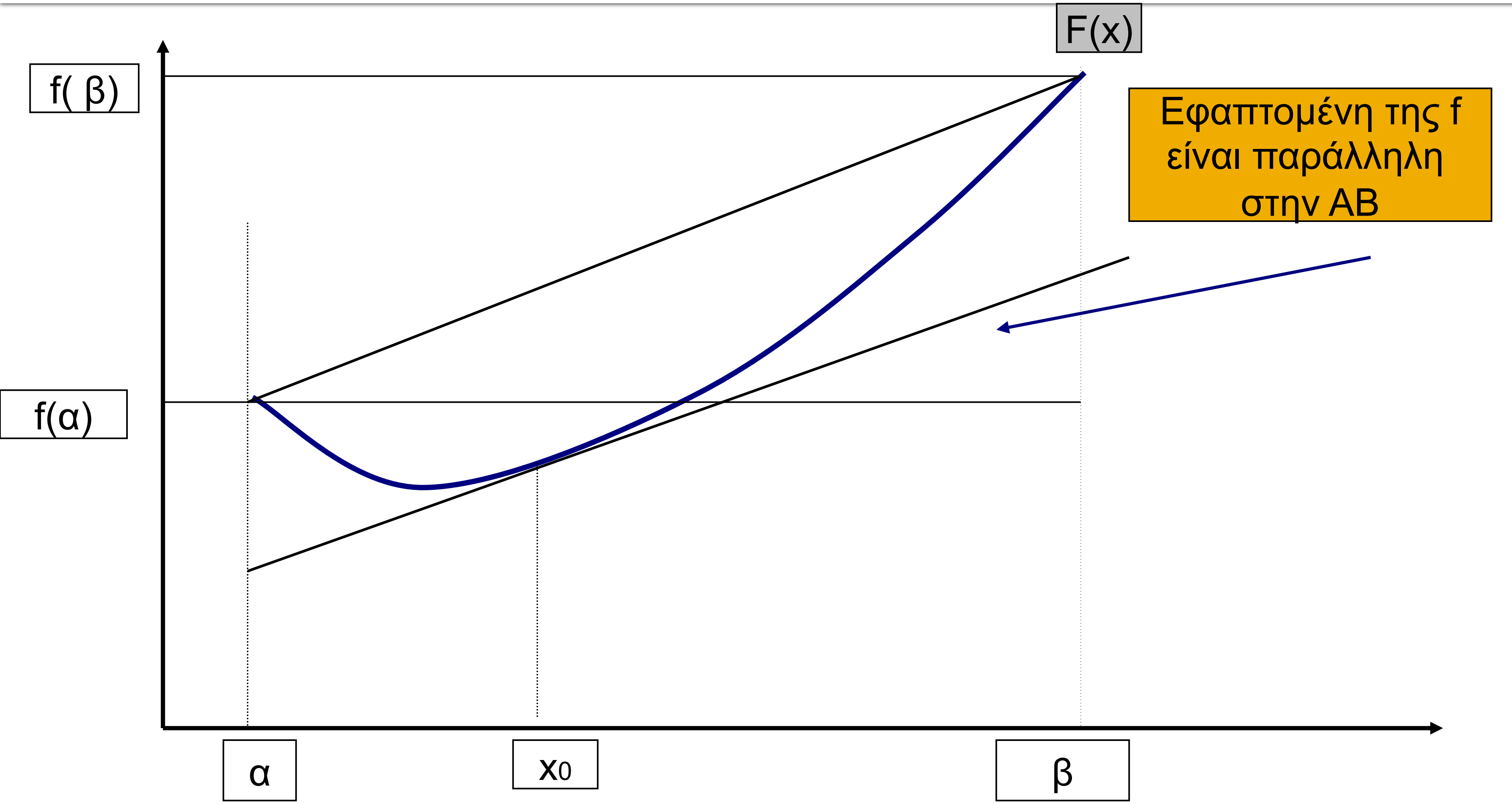
Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο χο στο (α,β) τέτοιο ώστε

- Παράδειγμα

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 4\sqrt{x}$ στο [4,9]. Να βρεθεί το c που ικανοποιεί το ΘΜΤ

Γεωμετρική Ερμηνεία ΘΜΤ



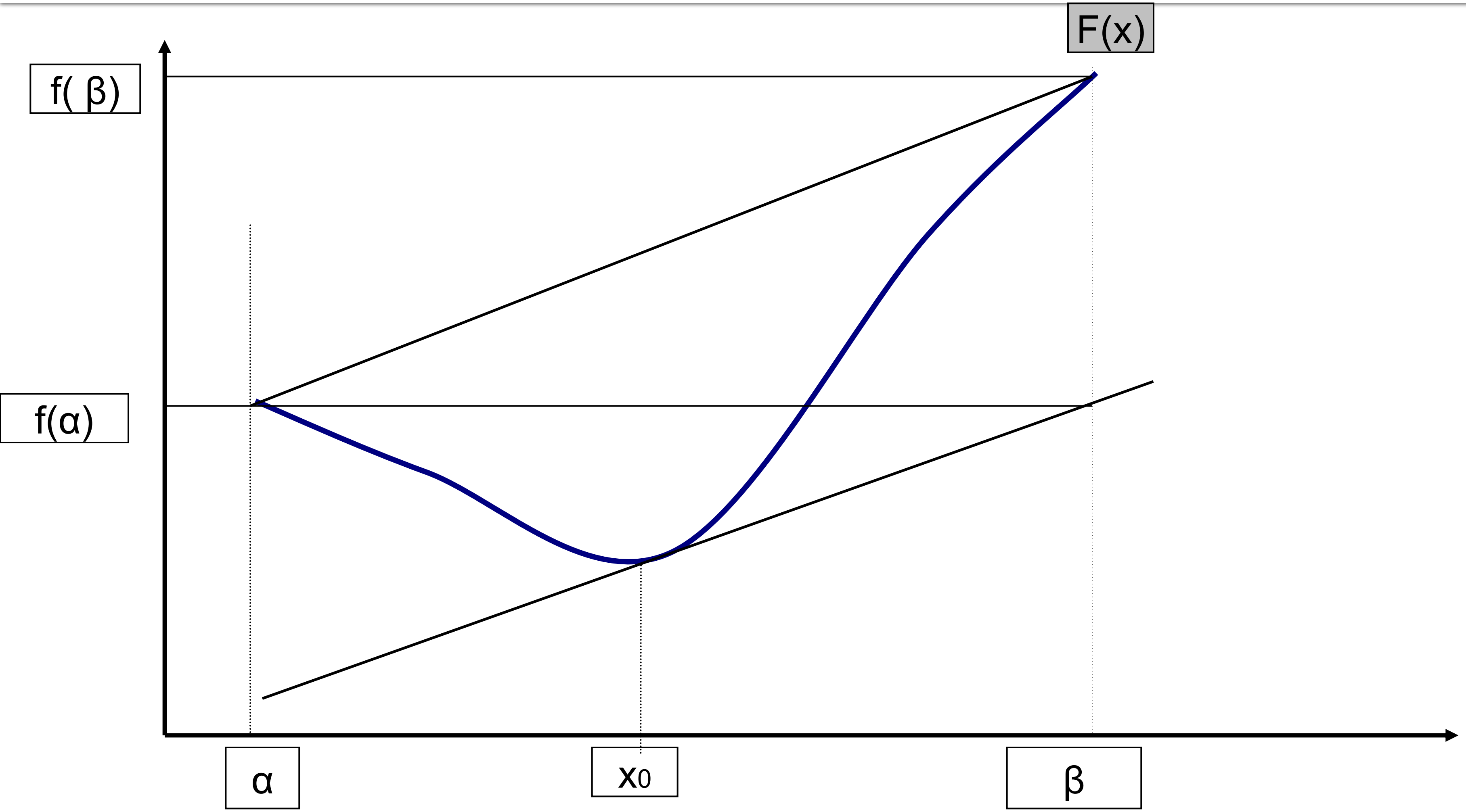
Θεώρημα Fermat

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $F : X \to R, X \subseteq R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in X$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό τότε

$$F^{'}(x_0) = 0 \longleftarrow \boxed{\text{Συνθήκη Πρώτης Τάξης}}$$

(Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει)

Γεωμετρική Ερμηνεία Fermat



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Δείξτε ότι ισχύει $x - {x^2}/{2} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0$
2. Δείξτε ότι η εξίσωση $x + 2 + \ln(3 + x^2) = 0$

έχει μία μοναδική πραγματική ρίζα.

3. Έστω μια συνάρτηση **f(x)** με πεδίο ορισμού το διάστημα **[3, 8]** για την οποία είναι **f(3)=10.** Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και αν **f′(x)≥2** για κάθε**x**∈**(3,8),** ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση στο σημείο **x0=8;**

Μελέτη Συναρτήσεων

Με τον όρο μελέτη συναρτήσεων εννοούμε την μελέτη των παρακάτω κύριων χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης όπως:

- Πεδίο Ορισμού
- Ρίζες
- Συνέχεια
- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Σημεία Καμπής
- Ακρότατα
- Ασύμπτωτες

Μονοτονία

- Εάν η συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) τότε είναι:

$$\text{Αύξουσα στο } (\alpha,\beta) \text{ εάν και μόνο αν } f^{'}(x_0) \geq 0 \;\; \forall x_0 \in (\alpha,\beta)$$

$$\text{Φθίνουσα στο } (\alpha,\beta) \text{ εάν και μόνο αν } f^{'}(x_0) \leq 0 \;\; \forall x_0 \in (\alpha,\beta)$$

Παραδείγματα

- Να μελετηθούν οι συναρτήσεις

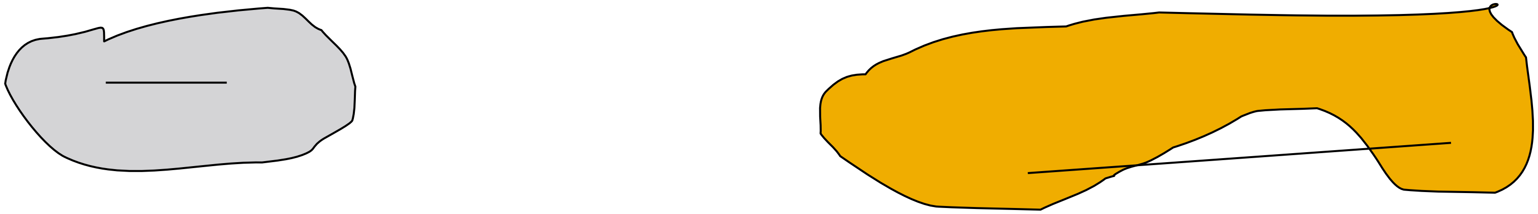
$$1. f(x) = x^2 e^x$$

$$2. g(x) = 6 \big/ x^4 + 2$$

$$3. h(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 1$$

Κυρτά Σύνολα

Έστω ένας διανυσματικός χώρος L και έστω S υποσυνόλου του. Το σύνολο S λέγεται κυρτό αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος σημείων x,y που ανήκουν στο S το σημείο $\lambda x+(1-\lambda)y$ ανήκει επίσης στο S για κάθε λ που ανήκει στο [0,1].(*αλλιώς καλείται μη κυρτός*)



Κυρτότητα

- Εάν η συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη δύο φορές σε ένα διάστημα (α,β) τότε είναι:

Εάν $f''(x_0) \geq 0 \ \forall x_0 \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι κυρτή στο (α,β) και αντίστροφα

Εάν $f''(x_0) \leq 0 \ \forall x_0 \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι κοίλη στο (α,β) και αντίστροφα

Εάν $f''(x_0) > 0 \ \forall x_0 \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι αυστηρά κυρτή στο (α,β)

Εάν $f''(x_0) < 0 \ \forall x_0 \in (\alpha,\beta)$, τότε η f είναι αυστηρά κοίλη στο (α,β)

Σημεία Καμπής

Τα σημεία καμπής παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς είναι σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στα οποία η συνάρτηση γίνεται κοίλη ή κυρτή και αντίστροφα. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και x_0 σημείο εσωτερικό του Δ. Εάν η δεύτερη παράγωγος στο x_0 είναι μηδέν και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε το σημείο x_0 είναι σημείο καμπής.

Ακρότατα Ι

Έστω μια συνάρτηση $f:X \rightarrow R$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο p του X εάν υπάρχει περιοχή του p τέτοια ώστε $f(p)<=f(x)$ για κάθε x που ανήκει στην περιοχή. Ανάλογα ορίζεται και το τοπικό μέγιστο.

Θ.Fermat: Έστω μια συνάρτηση $f:X \rightarrow R$. Εάν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_o του X και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο αυτό τότε $f'(x_o)=0$.

Ακρότατα ΙΙ

Έστω μια συνάρτηση $f:X \rightarrow R$ και x_o εσωτερικό σημείο στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_o και $f'(x_o)=0$ τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_o:

- Τοπικό Ελάχιστο εάν $f'(x_o)<0$ για x που ανήκει στο $(x_o-ε, x_o)$ και $f'(x_o)>0$ για x που ανήκει στο $(x_o, x_o+ε)$
- Τοπικό Μέγιστο εάν $f'(x_o)>0$ για x που ανήκει στο $(x_o-ε, x_o)$ και $f'(x_o)<0$ για x που ανήκει στο $(x_o, x_o+ε)$
- *ε μικρός θετικός αριθμός*

Ακρότατα III

Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και έστω το σημείο x_o που ανήκει στο Δ είναι $f'(x)=0$.

Η συνάρτηση στο x_o παρουσιάζει:

- Τοπικό Ελάχιστο εάν $f''(x_o)>0$,
- Τοπικό Μέγιστο εάν $f''(x_o)<0$

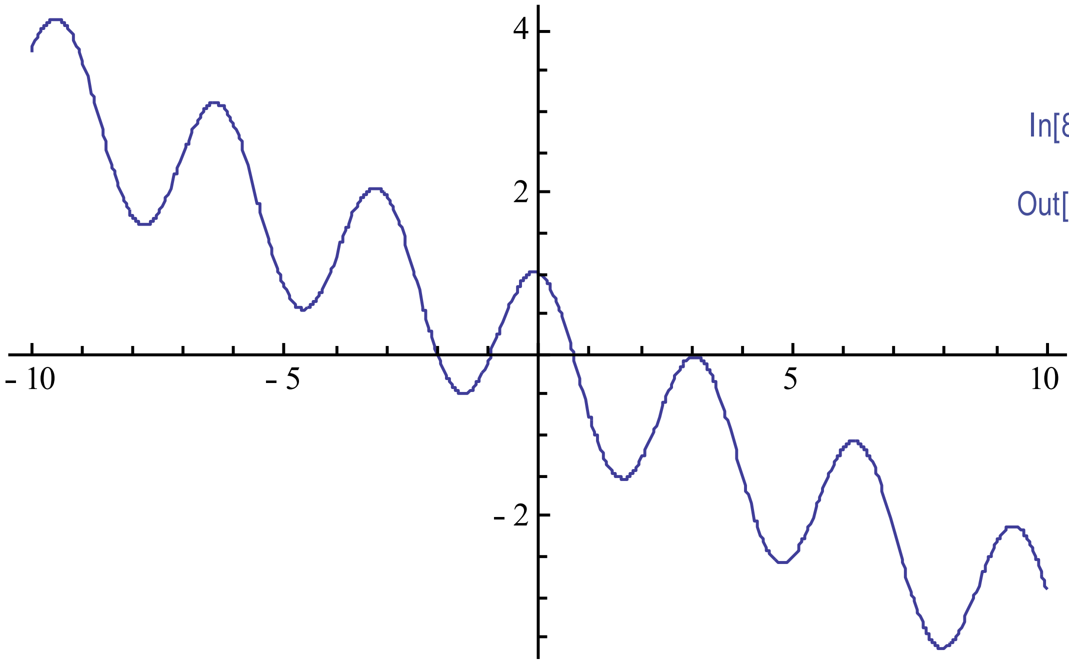
Ακρότατα IV

- *Τα τοπικά ακρότατα δεν είναι κατ'ανάγκη και ολικά ακρότατα*
- Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα συμπαγές κυρτό σύνολο X

Εάν η f είναι συνεχής και κοίλη στο X τότε κάθε τοπικό μέγιστο της είναι και ολικό μέγιστο (*ομοίως το ελάχιστο*)

Εάν η f είναι αυστηρά κοίλη (αυστηρά κυρτή) τότε το ολικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι μοναδικό

Mathematica & Ακρότατα




```
g[x_] := Cos[2 x] - x/3

In[8]:= FindMinimum[g[x], {x, -8, -7}]

Out[8]= {1.60407, {x → -7.77026}}

In[6]:= FindMaximum[g[x], {x, 8}]

Out[6]= {-2.12767, {x → 9.34105}}
```

Ασύμπτωτες

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας το π.ο περιλαμβάνει ένα διάστημα της μορφής (-oo,ρ) και ένα διάστημα της μορφής (ε,+oo). Η ευθεία Y=ax+b λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ή $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$
Εάν το όριο είναι μηδέν τότε η y=b καλείται οριζόντια Ασύμπτωτη.

Ασύμπτωτες

Έστω μια συνάρτηση f με π.ο Δ και σημείο συσσώρευσης x_0 που ανήκει στο Δ. Η ευθεία $x= x_0$ καλείται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty \text{ ή } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$$

Εφαρμογές στα Οικονομικά

1. Συνάρτηση παραγωγής και οριακή παραγωγή
2. Συνάρτηση Κόστους και οριακό κόστος.
3. Συνάρτηση κερδών και οριακό κέρδος
4. Συνάρτηση χρησιμότητας και οριακή χρησιμότητα
5. Ελαστικότητα
6. Συνάρτηση κατανάλωσης και οριακή κατανάλωση
7. Προεξόφληση και ανατοκισμός
8. Επιλογή βέλτιστου χρόνου
9. Προφανώς η μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1

Εάν η ζήτηση ενός αγαθού περιγράφεται από την συνάρτηση $q=10-0.5p$ και το συνολικό κόστος παραγωγής του από την συνάρτηση $TC=0.5q^2+5q+100$,

- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.
- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.
- Να βρεθεί το μέσο σταθερό κόστος που αντιστοιχεί στο επίπεδο παραγωγής (β).
- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι η τιμή μιας τέλεια ανταγωνιστικής αγοράς Ισούται με 61 ν.μ και έστω ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας επιχείρησης που λειτουργεί σε αυτή την αγορά είναι

$C(q) = q^3 - 11q^2 + 42q + 15$

- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης.
- Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος.
- Να βρεθούν τα σημεία καμπής της επιχείρησης

Παράδειγμα 3

Μια επιχείρηση έχει εκτιμήσει ότι η ζήτηση για ένα προϊόν μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή με την οποία χρεώνει το προϊόν της, σύμφωνα με την σχέση: $Q = 280000 - 400P$
όπου Q είναι η ποσότητα που ζητείται από την επιχείρηση και P η τιμή του προϊόντος. Το συνολικό ετήσιο κόστος από την παραγωγή Q μονάδων ισούται με $\boldsymbol{C = 350000 + 300Q + 0{,}0015Q^2}$

(α) Βρείτε πόσες μονάδες Q πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη της επιχείρησης.

(β) Σε ποια τιμή θα πρέπει να διατίθεται το προϊόν;

(γ) Ποια θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης;

(δ) Αν μέγιστη δυνατή παραγόμενη ποσότητα είναι 40000 μονάδες, ποια θα είναι η νέα άριστη ποσότητα που θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη

Παράδειγμα 4

Θεωρήστε το υπόδειγμα **Y=C+I+G** προσδιορισμού του εισοδήματος μιας κλειστής οικονομίας**,** στην οποία δεν υπάρχουν διεθνείς συναλλαγές**.** Η συνάρτηση κατανάλωσης είναι **C=100+0,9Yd,**οι επενδύσεις **I=250,** η κρατική δαπάνη **G=300** και οι φόροι **T=30.**

(α**)** Να βρείτε το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και τον πολλαπλασιαστή της κρατικής δαπάνης**.**

(β**)** Αν τα φορολογικά έσοδα προκύπτουν από τη συνάρτηση **T=30+0,10Y,** να βρείτε το νέο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος Και το νέο πολλαπλασιαστή κρατικής δαπάνης**.**

(γ**)** Αν τα φορολογικά έσοδα προκύπτουν από τη συνάρτηση **T=0,30Y+0,125C,** δηλαδή περιλαμβάνουν έναν αναλογικό φόρο εισοδήματος και έναν έμμεσο φόρο κατανάλωσης**,** να βρείτε το νέο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και το νέο πολλαπλασιαστή κρατικής δαπάνης**.** Τι παρατηρείτε**;**

Παράδειγμα 5

Η συνάρτηση ζήτησης μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι $p + 4q - 40 = 0$ και η συνάρτηση κόστους
TC 10q 2 = q + **,** όπου **q** είναι η ποσότητα παραγωγής και **p** η τιμή**.**

(α**)** Να υπολογίσετε το επίπεδο παραγωγής και την τιμή που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης**.**

(β**)** Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη**.**

(γ**)** Αν η κυβέρνηση επιβάλει φορολογία ίση με χρηματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος**,** να υπολογίσετε την τιμή του T που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης**.**

(*Υποθέστε ότι η επιχείρηση θεωρεί τη φορολογία ως μια πρόσθετη επιβάρυνση στο κόστος***).**

Παράδειγμα 6

Μια τράπεζα Α δέχεται καταθέσεις με επιτόκιο **12%** και μηνιαία κεφαλαιοποίηση ενώ μια άλλη τράπεζα Β δέχεται καταθέσεις με επιτόκιο **16%** Και ετήσια κεφαλαιοποίηση**.** Ποια από τις δύο τράπεζες θα προτιμούσατε αν θέλατε να καταθέσετε τα χρήματά σας για **1** μήνα**, 6** μήνες**, 1** έτος ή **5** έτη**;** Γενικά να βρείτε τις χρονικές διάρκειες για τις οποίες θα προτιμούσατε την τράπεζα Α**.**

Παράδειγμα 7

Το συνολικό κόστος **(T*C*)** και έσοδα **(T*R*)** για ένα προϊόν είναι**:**

$TC(Q)$ 500 100Q 0,5Q2 = + +

$TR(Q) = 500Q$

(α**)** Να βρεθεί το επίπεδο του προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος**.**

(β**)** Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος**;**

Παράδειγμα 8-Έλεγχος αποθεμάτων

Σε προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με μερικές εφαρμογές της παραγώγισης όπως η μεγιστοποίηση της φορολογικής απόδοσης, χωρίς να λάβουμε υπόψιν μας τις συνθήκες δεύτερης τάξης. Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε εφαρμογές στις οποίες δεν είναι τόσο προφανές κατά πόσο μία συνάρτηση βρίσκεται στο μέγιστο ή στο ελάχιστο σημείο της όταν η κλίση της είναι μηδέν, επομένως πρέπει να εξεταστούν οι συνθήκες δεύτερης τάξης. Η συγκεκριμένη εφαρμογή αναφέρεται στο πως αναλύεται και υπολογίζεται το βέλτιστο μέγεθος των παραγγελιών μιας επιχείρησης που επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος παραγγελιών και αποθήκευσης. Μία επιχείρηση πρέπει να λάβει υπόψη της και άλλα κόστη εκτός από τα κόστη των συντελεστών που χρησιμοποιεί. Αυτά τα κόστη περιλαμβάνουν:

a. Κόστη παραγγελίας: κάθε παραγγελία για αποστολή εξαρτημάτων περιλαμβάνει γραφειοκρατικά κόστη, κόστη παράδοσης και φόρτωσης.
b. Κόστη αποθήκευσης: όσο περισσότερα προϊόντα αποθηκεύει μία επιχείρηση τόσο περισσότερο αποθηκευτικό χώρο χρειάζεται. Παράλληλα υπάρχει και το κόστος ευκαιρίας του κεφαλαίου μιας επιχείρησης το οποίο σχετίζεται με τη δαπάνη η οποία είναι συνδεδεμένη με τις πρώτες ύλες.

Συνθήκες πρώτης τάξης για το μέγιστο

Ας συνεχίσουμε με το εξής παράδειγμα: Δείξτε ότι το TR είναι μέγιστο όταν $q=18$ για την μη γραμμική συνάρτηση ζήτησης $P=194.4-0.2Q^2$

Γνωρίζουμε ότι $TR=PQ= 194.4Q-0.2Q^3$ παραγωγίζοντας τώρα , ως προς την ποσότητα έχουμε ότι $MR=dTR/dQ= 194.4-0.6Q^2$ Στο στάσιμο σημείο αυτής της κυβικής συνάρτησης η κλίση πρέπει να είναι 0 και έτσι $Q=18$. Όταν $q=18$ τότε η παράγωγος δεύτερης τάξης είναι $-0.12Q=-21.6<0$. Συνεπώς οι συνθήκες δεύτερης τάξης για την ύπαρξη μέγιστου ικανοποιούνται και το TR είναι στο μέγιστο από τα στάσιμα σημεία, όπου $q=18$.

- (Σημειώστε ότι σε αυτό το παράδειγμα η δεύτερης τάξης παράγωγος $-1.2q$ είναι μικρότερη του μηδέν για οποιαδήποτε θετική τιμή του q).

Συνθήκες δεύτερης τάξης για ελάχιστο

Με παρόμοια λογική όπως αυτή που προσδιορίσαμε στην παραπάνω, εάν ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης μιας συνάρτησης είναι θετικός στο σημείο όπου η κλίση είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση βρίσκεται σε σημείο που αντιστοιχεί σε ελάχιστο. Υπολογίστε το ελάχιστο σημείο της συνάρτησης μέσου κόστους $AVC(Q)=\frac{25}{Q}+0.1Q^2$

Η κλίση της συνάρτησης AC θα είναι μηδέν όταν

$$\frac{dAVC(Q)}{dQ}=0 \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{25}{Q}+0.1Q^2\right)}{dQ}=0 \Leftrightarrow Q^3=125 \Leftrightarrow Q=5$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης σε αυτό το σημείο βρίσκεται παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση και μετά υπολογίζοντας την παράγωγο δεύτερη τάξης όταν q=5

$$\frac{d^2AVC(Q)}{dQ^2}=50Q^{-3}+0.2=0.6>0$$

Περίληψη των συνθηκών δεύτερης τάξης

Τα σημεία M και N που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο και ελάχιστο, αντίστοιχα, και αποτελούν μόνο σημεία τοπικού μέγιστου και ελάχιστου. Παρόλα αυτά, στα περισσότερα παραδείγματα που θα συναντήσετε στα οικονομικά οποιοδήποτε τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σημείο είναι επίσης ολικό μέγιστο ή ελάχιστο σημείο και έτσι δεν χρειάζεται να ανησυχείτε για αυτή τη διάκριση. Για να το ελέγξουμε ωστόσο για περαιτέρω σημεία καμπής χρειαζόμαστε περαιτέρω ανάλυση εξετάζοντας την τρίτη, τέταρτη και ίσως και μεγαλύτερης τάξης παράγωγο για πιο σύνθετες πολυωνυμικές συναρτήσεις.

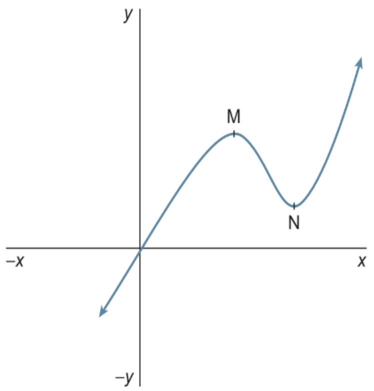


Figure 9.3

Λύσεις τελικού σημείου (end point solution)

Υπάρχουν κάποιες εξαιρέσεις στις συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές μιας συνάρτησης. Αν το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης περιορίζεται σε συγκεκριμένο διάστημα, τότε το μέγιστο ή ελάχιστο σημείο μπορεί να προσδιοριστεί από με βάση τον περιορισμό του πεδίου ορισμού, δίνοντας αυτό που είναι γνωστό ως λύση τελικού σημείου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν εφαρμόζεται ο συνήθης κανόνας για τη μεγιστοποίηση που προσδιορίστηκε σε αυτή την ενότητα.

Ασκήσεις προς λύση

1. Μία επιχείρηση αντιμετωπίζει συνάρτηση ζήτησης $p=200-2q$ και συνάρτηση συνολικού κόστους $TC(Q)=2/3Q^3-14Q^2+222Q+50$. Προσδιορίστε τις αλγεβρικές εκφράσεις των παρακάτω συναρτήσεων και υπολογίστε εάν έχουν μέγιστα ή ελάχιστα σημεία. Εάν έχουν, υπολογίστε την τιμή του q στα οποία οι συναρτήσεις μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται και υπολογίστε τις τιμές των συναρτήσεων για αυτό το q.

2. Μία επιχείρηση επιχειρεί να αυξήσει το προϊόν της σε βραχυχρόνιο ορίζοντα αντιμετωπίζοντας συνάρτηση για το συνολικό προϊόν εργασίας της μορφής $TP(L)=-L^3+24Q^2$. Σε ποιο επίπεδο L, τα (a)TP_L, (b) MP_L και (c) AP_L θα είναι στα μέγιστο επίπεδό τους;

Μεγιστοποίηση Κερδών Ι

Έχουμε ήδη ασχοληθεί με μερικά προβλήματα που σχετίζονται με τη μεγιστοποίηση των κερδών. Καθώς η μεγιστοποίηση των κερδών είναι ένα από τα συνηθισμένα ζητήματα που θα ασχοληθείτε στα οικονομικά, σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε αναλυτικά με τις συνθήκες δεύτερης τάξης για τη μεγιστοποίηση των κερδών και θα δούμε πώς σχετίζονται με τα διαφορετικά σημεία τομής των καμπυλών οριακού κόστους MC και οριακών εσόδων MR μιας επιχείρησης.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το προϊόν που μεγιστοποιεί τα κέρδη μιας επιχείρησης που έχει συναρτήσεις συνολικού κόστους και εσόδων ως εξής:

$$TC(Q) = 4 + 97Q - 8.5Q^2 + \tfrac{1}{3}Q^3, TR(Q) = 58Q - 0.5Q^2$$

Μεγιστοποίηση Κερδών ΙΙ

Η βασική συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιείται είναι η εξής MR=MC. Συνεπώς θα έχουμε ότι, $MR(Q)=58-Q, MC(Q)=97-17Q+3Q^2$

$$58-Q=97-17Q+3Q^2 \Leftrightarrow (3-Q)(13-Q)=0$$

$$Q=3, Q=13$$

Αυτές είναι οι δύο τιμές του παραγόμενου προϊόντος στις οποίες οι καμπύλες MC και MR τέμνονται, αλλά ποια από τις δύο ικανοποιεί τον δεύτερο κανόνα για τη μεγιστοποίηση των κερδών; Για να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση του κέρδους και μετά να υπολογίσουμε το μέγιστο. Έτσι το κέρδος θα είναι

$$\Pi(Q)=TR(Q)-TC(Q)=58Q-0.5Q^2-(4+97Q-8.5Q^2+{}^1\!/_3\,Q^3)=$$

$$-39Q+8Q^2-4-{}^1\!/_3\,Q^3$$

Παραγωγίζοντας και θέτοντας ίσο με μηδέν όπως και πριν.

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ}=0 \Leftrightarrow -39-16Q+Q^2=0, Q=3, Q=13$$

Η δεύτερη παράγωγος, $\frac{d^2\Pi(Q)}{dQ^2}=16-2Q$

Ασκήσεις προς λύση

1. Αν μία επιχείρηση έχει συνάρτηση ζήτησης $p=120-3q$ και συνάρτηση συνολικού κόστους $TC(Q)=120+36Q+1.2\,Q^2$
2. Εξηγήστε γιατί μία μονοπωλιακή επιχείρηση σε μία αγορά με συνάρτηση ζήτησης $q=167-2.5p$ και συνάρτηση συνολικού κόστους $TC(Q)=220+120Q-12\,Q^2+0.5Q^3$ δεν μπορεί ποτέ να έχει κέρδος.
3. Αν μία επιχείρηση έχει συνάρτηση ζήτησης $p=53.5 – 0.7q$ ποια θα είναι η τιμή που θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της αν η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι $TC(Q)=400+35Q-6Q^2+0.1Q^3$

Ένα Παράδειγμα αποθέματος

Μία επιχείρηση χρησιμοποιεί 200,000 μονάδες τον χρόνο ενός υλικού του οποίου η ζήτηση επιμερίζεται ισόποσα κατά τη διάρκεια του χρόνου. Εκτός από την τιμή αγοράς, κάθε παραγγελία του υλικού κοστίζει επιπλέον £80. Κάθε μονάδα που διατηρείται ως απόθεμα στοιχίζει £8 τον χρόνο. Ποιο είναι το άριστο μέγεθος της παραγγελίας;

ΛΥΣΗ

Το άριστο μέγεθος της παραγγελίας είναι q και έτσι το μέσο απόθεμα που διακρατείται είναι q/2. Ο αριθμός των παραγγελιών είναι Q/200000. Καθώς κάθε παραγγελία κοστίζει £80 και κάθε μονάδα που αποθηκεύεται για ένα χρόνο κοστίζει £8 τότε TC= παραγγελία + κόστος αποθήκευσης=4Q+16000000/Q. Για το στάσιμο σημείο

Επίσης, $\frac{dTC}{dQ} = 4 - 16000000Q^{-2} = 0 \Leftrightarrow Q = 2000$

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης για ελάχιστο ικανοποιούνται στο στάσιμο σημείο αφού $\frac{d^2TC}{dQ^2} = 32000000Q^{-3} > 0$

Ασκήσεις προς λύση

1. Εάν κάθε παραγγελία ενός υλικού κοστίζει £700, το κόστος αποθήκευσης ανά έτος ανά υλικό είναι £20, και οι ετήσιες ανάγκες της επιχείρησης για υλικό είναι 4,480 μονάδες, ποιο είναι το άριστο μέγεθος παραγγελίας;
2. Μία επιχείρηση χρησιμοποιεί 1,280 μονάδες ενός υλικού ανά χρόνο. Το κόστος παραγγελίας είναι £540 και κάθε υλικό που διατηρείται ως απόθεμα κοστίζει £6 το χρόνο. Ποιο είναι το μέσο μέγεθος παραγγελίας που θα συμβουλεύατε την εταιρεία να κάνει;
3. Μία επιχείρηση χρησιμοποιεί 1,400 μονάδες υλικού G ανά χρόνο. Κάθε παραγγελία κοστίζει £350 και έχει μέσο κόστος αποθήκευσης £20 ανά μονάδα του G. Υπάρχει επίσης ένα έξτρα κόστος δεδομένου ότι η εταιρεία πρέπει να εξασφαλίσει χώρο αποθήκευσης q, παρόλο που αυτός ο χώρος αποθήκευσης μπορεί να μην χρησιμοποιηθεί καθ’ όλη τη διάρκεια του χρόνου. Αυτό κοστίζει £15 ανά μονάδα G. Προσαρμόστε τον τύπο αριστοποίησης μεγέθους της παραγγελίας ώστε να συμπεριλάβει αυτό το επιπλέον κόστος και μετά βρείτε το άριστος μέγεθος της παραγγελίας για αυτήν την επιχείρηση.

Συγκριτική στατική και επιδράσεις των φόρων

Σε προηγούμενη ενότητα εξετάσαμε τις συγκριτικές στατικές επιδράσεις των φόρων για τα κέρδη μιας επιχείρησης που θέλει να μεγιστοποιήσει το παραγόμενο προϊόν όταν όλες οι σχετικές συναντήσεις ήταν γραμμικές. Ο διαφορικός λογισμός μας επιτρέπει το να επεκτείνουμε τώρα την ανάλυση και σε μη γραμμικές συναρτήσεις. Εφόσον μάθαμε πώς να προσδιορίζουμε τη μεγιστοποίηση του κέρδους και του παραγόμενου προϊόντος μιας επιχείρησης κατασκευάζοντας τη συνάρτηση κερδών της επιχείρησης και μετά μεγιστοποιώντας την, θα δούμε τώρα πώς θα επηρεαστούν οι τιμές ισορροπίας αν αλλάξει μία εξωγενής μεταβλητή. Υπό το πλαίσιο αυτό θα εξετάσουμε τώρα τι θα συμβεί σε αυτές τις τιμές ισορροπίας εάν επιβληθούν οι παρακάτω διαφορετικοί τύποι φορολογίας στην επιχείρηση.

a. Φόρος ανά μονάδα προϊόντος στις πωλήσεις
b. Κατ’ αποκοπήν φόρος
c. Ποσοστιαίος φόρος στα κέρδη

Συγκριτική στατική και επιδράσεις των φόρων Ι

(a) Φόρος ανά πωλούμενη μονάδα

Έστω ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι TC=50+0.4q^2 και αντιμετωπίζει συνάρτηση ζήτησης P=360-2.1q. Αν η επιχείρηση πρέπει να πληρώσει στην Κυβέρνηση ένα ποσό t για κάθε μονάδα του αγαθού q που πουλάει, τότε ο συνολικός φόρος που θα πρέπει να πληρώσει θα είναι tq. Το συνολικό της κόστος συμπεριλαμβανομένου και του φόρου θα δίνεται ως εξής:

$$TC = 50 + 0.4Q^2 + tQ$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης είναι p=360-2.1q, η συνάρτηση συνολικού εσόδου θα είναι TR=360q-2.1q^2

Συγκριτική στατική και επιδράσεις των φόρων ΙΙΙ

(c) Ποσοστιαίος φόρος επί των κερδών

Αν μία επιχείρηση πρέπει να πληρώσει μέρος από τα κέρδη της ως φόρο τότε θα προσπαθήσει να μεγιστοποιήσει τα καθαρά της κέρδη τα οποία θα είναι $\Pi=(TR-TC)(1-c)$, όπου c είναι ο φόρος επί των κερδών (ο φόρος επί των κερδών αναφέρεται ως εταιρικός φόρος και για αυτό χρησιμοποιούμε το σύμβολο c).

Σειρά Taylor-McLaurin

- Σειρά Taylor

Εάν μια συνάρτηση είναι ν φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του π.ο της και σε ένα διάστημα (α,β) και έστω ότι η προηγούμενης τάξης είναι συνεχής στο [α,β] τότε εάν χο ανήκει στο (α,β) για κάθε χ που θα ανήκει στο ίδιο διάστημα υπάρχει σημείο p μεταξύ των όπου:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n =$$

$$= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^n(p)}{n!}(x - x_0)^n$$

Σειρά Taylor-McLaurin

- Σειρά McLaurin

Εάν μια σειρά Taylor αναπτύσσεται γύρω από το ο τότε μιλάμε για την σειρά McLaurin όπου:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n =$$

$$= f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{k}(0)}{k!}x^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{n}(p)}{n!}x^n$$

Παραδείγματα σε Σειρές Taylor-McLaurin I

Να βρεθεί το ανάπτυγμα του Taylor της συνάρτησης $f(x) = 10 + 25x + 13x^2, \gamma\iota\alpha \text{ x=c}$

$f(x) = \ln x, \gamma\iota\alpha \text{ x=1,n=3}$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της σειράς McLaurin των συναρτησεων

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 + 4x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Παραδείγματα σε Σειρές Taylor-McLaurin II

Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η $f(x)=\ln(1-x)$ συνάρτησηαναπτύσσεται σε σειρά MCLaurin και να βρεθεί το ανάπτυγμα αυτό. Να υπολογίσετε ένα άνω φράγμα του σφάλματος στος υπολογισμό της τιμής

$$\ln(1-\alpha),|\alpha|<0.1$$

με βάση το ανάπτυγμα πριν κρατώντας όρους μέχρι και τρίτου βαθμού.

Γραμμική προσέγγιση

Γραμμική προσέγγιση μιας συνάρτηση f(x) λέμε το ανάπτυγμα McLaurin της κρατώντας όρους μόνο πρώτου βαθμού ως προς x οπότε για τιμές του x κοντά στο ο θα ισχύει: $f(x) \simeq f(0) + f^{'}(0)x, |x| << 1$
Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = e^{-2x}\sin(3x)$

Τι να διαβάσω;

- Κεφάλαιο Τέταρτο-Πέμπτο- Jacques
- Κεφάλαιο Τέταρτο Ξεπαπαδέας για την θεωρία
- Κεφάλαιο Πέμπτο με τις Οικονομικές Εφαρμογές από Ξεπαπαδέα
- Σημειώσεις από το http://eclass.upatras.gr (Παρουσίαση Μαθήματος και αντίστοιχες ασκήσεις)