ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ Ι

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1 (3 Μονάδες)

Α. Να εξετάσετε εάν συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές (*1 Μονάδα*):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$$

Β. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (*1 Μονάδα*):

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}+x), \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}, \lim_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{(x-1)}$$

Γ. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την εξής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}, x>0\\ \ln(x+3), -3<x\leq 0\end{cases}$

(1 Μονάδα)

ΘΕΜΑ 2 (4 Μονάδες)

Α. Η συνάρτηση ζήτησης μιας μονοπωλιακής επιχείρησης δίνεται ως εξής $p+4q-40=0$ και η συνάρτηση κόστους $TC=q^2+10q$, όπου q η ποσότητα παραγωγής και p η τιμή.

1. Να υπολογίσετε το βέλτιστο σημείο παραγωγής καθώς και την βέλτιστη τιμή.

2. Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο που τα κέρδη μεγιστοποιούνται.

3. Εάν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία ίση με Τ χρηματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος, να υπολογίσετε την τιμή του Τ που μεγιστοποιεί τα φορολογικά της έσοδα (*Προφανώς η φορολογία λειτουργεί ως επιβάρυνση στο κόστος*). (*2 Μονάδες*)

Β. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα (*2 Μονάδες*)

$$I_1 = \int_0^1 xe^x \cos x dx, I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 3}{e^x + 2} dx, I_3 = \int \sin^3 x dx$$

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Α. Μέσω του πολυωνύμου Taylor να υπολογίσετε το πολυώνυμο 4^ου^ βαθμού που προσεγγίζει την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2+x}$ και να γίνει εκτίμηση του σφάλματος για $x_0 = 1$. *(1.5 Μονάδες)*

Β. Να υπολογιστεί το διαφορικό πρώτης τάξης της εξίσωσης του εισοδηματικού περιορισμού(budget constraint) $I = P_x X + P_y Y$. Τι εκφράζει; *(0.5 Μονάδες)*

Γ. Να μελετήσετε την παρακάτω συνάρτηση κόστους $TC = 350000 + 7500q + 0.25q^2$. Ποια τα συμπεράσματά σας; *(1 Μονάδα)*

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Α. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = ... = \lim\left(\frac{1}{1-\left(1/n^2\right)}\right) = 1,$ Δεν συγκλίνει

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}, \lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = ... = \lim\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1,$ συγκλίνει

Β. $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}+x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[|x|\sqrt{1+2/x^2}+1\right] = ... = +\infty$

$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+1)} = ... = 1/3$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{(x-1)} = \frac{0}{0}, DeHospital = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x-1)}$ Το συγκεκριμένο όριο δεν υπάρχει γιατί από δεξιά τείνει στο + άπειρο και από αριστερά στο – άπειρο.

Γ. Η συνάρτηση f τελικά αποδεικνύεται συνεχής.

ΘΕΜΑ 2

Α. Σχηματίζοντας την συνάρτηση κέρδους έχουμε

$\Pi(q) = 30q - 5q^2, \Pi'(q) = 30 - 10q, \Pi''(q) = -10 < 0$

Α$\rho\alpha$ q=3 και p=28

Η ελαστικότητα δίνεται $\varepsilon = -2,33$. Τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν q=3-$\frac{T}{10}$. Άρα τα φορολογικά έσοδα είναι ΦΕ=3Τ-$\frac{T^2}{10}$ και μεγιστοποιούνται όταν Τ=3/2.

B. $I_1 = \int_0^1 xe^x \cos x dx$. Για το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα προτείνουμε την λύση της παραγοντικής ολοκλήρωσης. Άρα,

$$I_1 = \int_0^1 xe^x \cos x dx = xe^x \cos x - \int_0^1 e^x\left(\cos x - x\sin x\right)dx = ... = \left[\frac{1}{2}xe^x\left(\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}e^x \sin x\right]_0^1$$

$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 3}{e^x + 2}dx,$ Στο συγκεκριμένο ολοκλήρωμα προτείνουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση θέτοντας $e^x = t \Rightarrow x = \ln t, dx = t^{-1}dt$. Άρα

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 3}{e^x + 2}dx = -\int_0^1 \frac{t-3}{t(t+2)}dx = ... = 1.5x - 2.5\ln(e^x + 2)$$

$$I_3 = \int \sin^3 x dx = ... = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{3}{2}\cos x + c$$

ΘΕΜΑ 3

A. Η σειρά Taylor υπολογίζεται ως εξής:

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-1) + \frac{1}{27}(x-1)^2 - \frac{1}{81}(x-1)^3 + \frac{1}{243}(x-1)^4 + R_5, R_5 = -\frac{1}{(2+p)^6}(x-1)^5$$

B. $I = P_x X + P_y Y$. Το διαφορικό υπολογίζεται ως εξής: $dI = -\frac{P_y}{P_x}dY$

Γ. $TC = 350000 + 7500q + 0.25q^2$. Η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{dTC}{dq} \equiv MC = 7500 + 0.5q$ και μηδενίζεται για αρνητική ποσότητα και ίση 15000. Η δεύτερη παράγωγος ισούται με 0.5>0(Προφανώς και τον ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο $AC = \frac{350000}{q} + 7500 + 0.25q$.

Η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{dAC}{dq} = \frac{-350000}{q^2} + 0.2$ και η δεύτερη

$\frac{d^2AC}{dq^2} = 700000q^{-3} > 0$).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR