ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚ. ΕΤΟΣ 2024-2025

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 2
Βασικές Έννοιες-Συνάρτηση-Ακολουθία-Όρια

Διδάσκων: Κουνετάς Η. Κωνσταντίνος Καθηγητής ΤΟΕ

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Γενικά εάν έχουμε δύο σύνολα Α,Β το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών τους (x,y) που μπορούν να σχηματιστούν από τα Α και Β έτσι ώστε $x \in A \wedge y \in B$ τότε το σύνολο AxB Καλείται καρτεσιανό γινόμενο των Α,Β.
(*παράδειγμα: ρίψη ενός ζαριού, σύνολα (1,2,3), (α, β) και (3)*)

$A = \{1, 2, 3\}$ και $\text{B}=\{2,4\}$ τότε

$\text{A} \times \text{B}=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

Ποιο είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\text{B} \times A$;

Ορισμός Συνάρτησης

Με τον όρο συνάρτηση f από ένα σύνολο X σε σύνολο Y ορίζουμε μια σχέση μεταξύ του X και του Y έτσι ώστε κάθε στοιχείο του X να σχετίζεται (*απεικονίζεται μέσω της f*) με ένα και μόνο ένα στοιχείο του Y. $f\!:\!X \rightarrow Y$

X καλείται πεδίο ορισμού-$D_{(f)}$

Y καλείται πεδίο τιμών-$R_{(f)}$ (*πως γίνεται η εύρεση του?)*

x αναφέρεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το y ως εξαρτημένη μεταβλητή

Π.Χ. συνάρτηση μεταβλητού κόστους VC=f(q)

Συνάρτηση (Συνέχεια..)

- Πραγματικές Συναρτήσεις, των οποίων το πεδίο τιμών είναι υποσύνολο του R.
- Διανυσματικές Συναρτήσεις, των οποίων το πεδίο τιμών είναι υποσύνολο του R^n
- Σταθερή συνάρτηση όπου το πεδίο τιμών αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο $\pi.\chi$ $f:R \to R,\ f(x)=a, \forall x \in R$
- Συνάρτηση επί, εάν κάθε στοιχείο του Y είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου του X (απεικόνιση του X εντός του Y) $f(x):X \to Y$
- Γραφική Παράσταση: Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $\mathbf{f(x)=}Y$ τότε το σύνολο που ορίζεται ως $\{(x,y):y=f(x)\}$ καλείται γραφική παράσταση.

Συνάρτηση (Συνέχεια..)

- Μια συνάρτηση ένα προς ένα ή αμφιμονοσήμαντη εάν διαφορετικά στοιχεία του Y αντιστοιχούν σε διαφορετικά στοιχεία του X που έχουν την ίδια εικόνα του Y. Δηλαδή:

$$F: X \to Y, \forall\ a,b \in X,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

$$F: X \to Y, \forall\ a,b \in X, ab \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$\pi.\chi.\ f(x) = -x^2 + 8x + 40$$

$$F(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$R(x) = e^{\frac{1-x}{x^2-5x+6}} + \log(x-1)$$

Πεδίο Ορισμού

Είναι ένα προς ένα;

Πράξεις με Συναρτήσεις

Έστω $f: X_1 \to Y, g: X_2 \to Y$

- Άθροισμα: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X_1 \cap X_2$
- Διαφορά: $(f-g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in X_1 \cap X_2$
- Γινόμενο: $(fg)(x) = f(x)g(x), \forall x \in X_1 \cap X_2$
- Πηλίκο: $(f/g)(x) = f(x)/g(x), \forall x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0$
- Γινόμενο με πραγματικό αριθμό: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in X_1, \lambda \in R$
- Δύναμη συνάρτησης: $(f)^n(x) = [f(x)]^n, \forall x \in X_1, n \in Z$
- Απόλυτη Τιμή: $|f|(x) = |f(x)|, \forall x \in X$
- Αντίστροφη Συνάρτηση: Απαιτούμε όχι μόνο σε κάθε x να αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα y αλλά και σε κάθε y ένα και μόνο ένα x. $(f)^{-1}(x): Y \to X$

Για την συναρτηση μεσου κοστους

$$AVC(Q) = \frac{900 + 200Q}{Q}, AVC^{-1}$$

Πράξεις με Συναρτήσεις(2)

- Σύνθεση Συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f από το X στο Y και g από το f(x) στο Z. H συνάρτηση h ονομάζεται σύνθετη συνάρτηση από το X στο Z με εφαρμογή της f συνάρτησης αρχικά και μετά της g.

Ισχύουν $w(x) = [(hog)of](x) = (hog)[f(x)] = h[g[f(x)]]$

1. $(hog)of = ho(gof)$
2. $(hog)^{-1} = g^{-1}oh^{-1}$

Είδη Συναρτήσεων

Συνάρτηση σταθερή: Εάν το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης αποτελείται απο ένα μόνο στοιχείο, δηλαδή εάν όλα τα στοιχεία του X έχουν την ίδια εικόνα στο Y f(x)=a.

Συνάρτηση 1-1:H συνάρτηση που απεικονίζει το X στο Y, ονομάζεται 1-1 εάν διαφορετικά στοιχεία του Y αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία του X, ή δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία του Xπου να έχουν την ίδια εικόνα του Y.

Συνάρτηση Επί:Εάν f(x)=Y, δηλαδή εάν κάθε στοιχείο του Y είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείο του X.

Πραγματική συνάρτηση: Εάν ισχύει ότι $f(x) = X \to Y, Y \subseteq R$

Υπάρχουν Οικονομικές Συναρτήσεις;

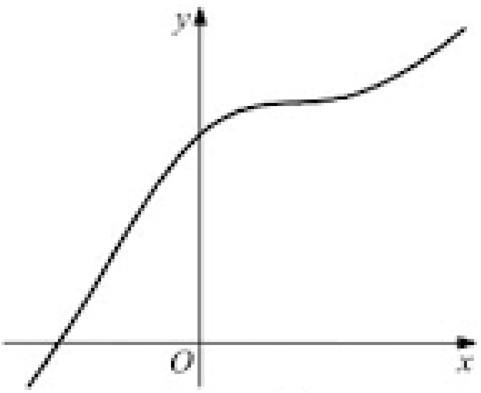
Συναρτήσεις 1-1 και επί

- Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται επί όταν $f(A) = B$.
- Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται 1-1 όταν για κάθε

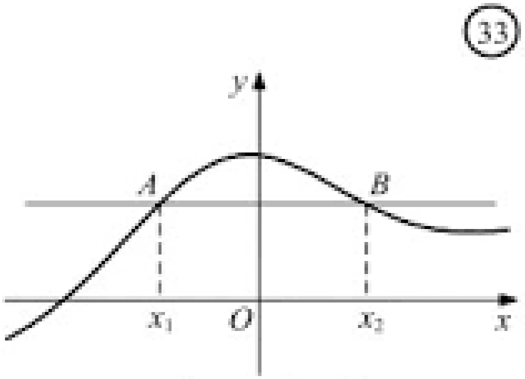
$x_1, x_2 \in A$: $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή με αντιθετοαντιστροφή

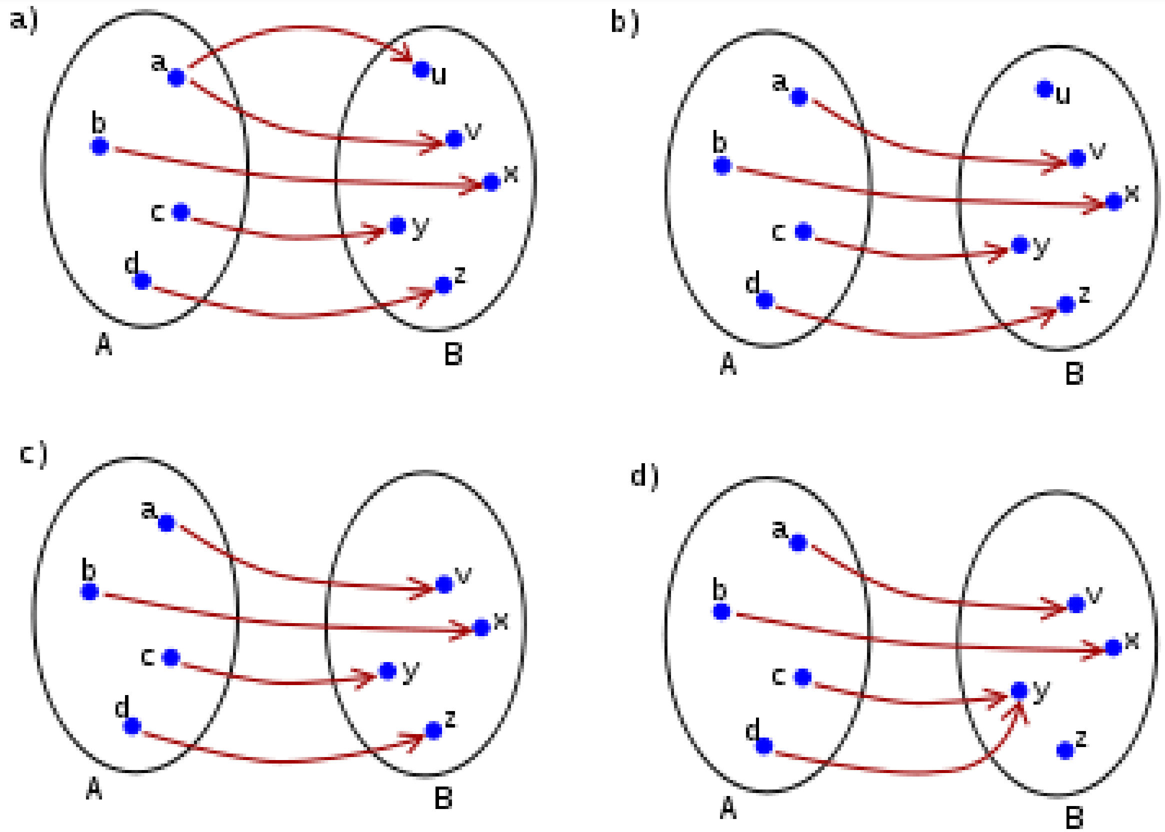
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



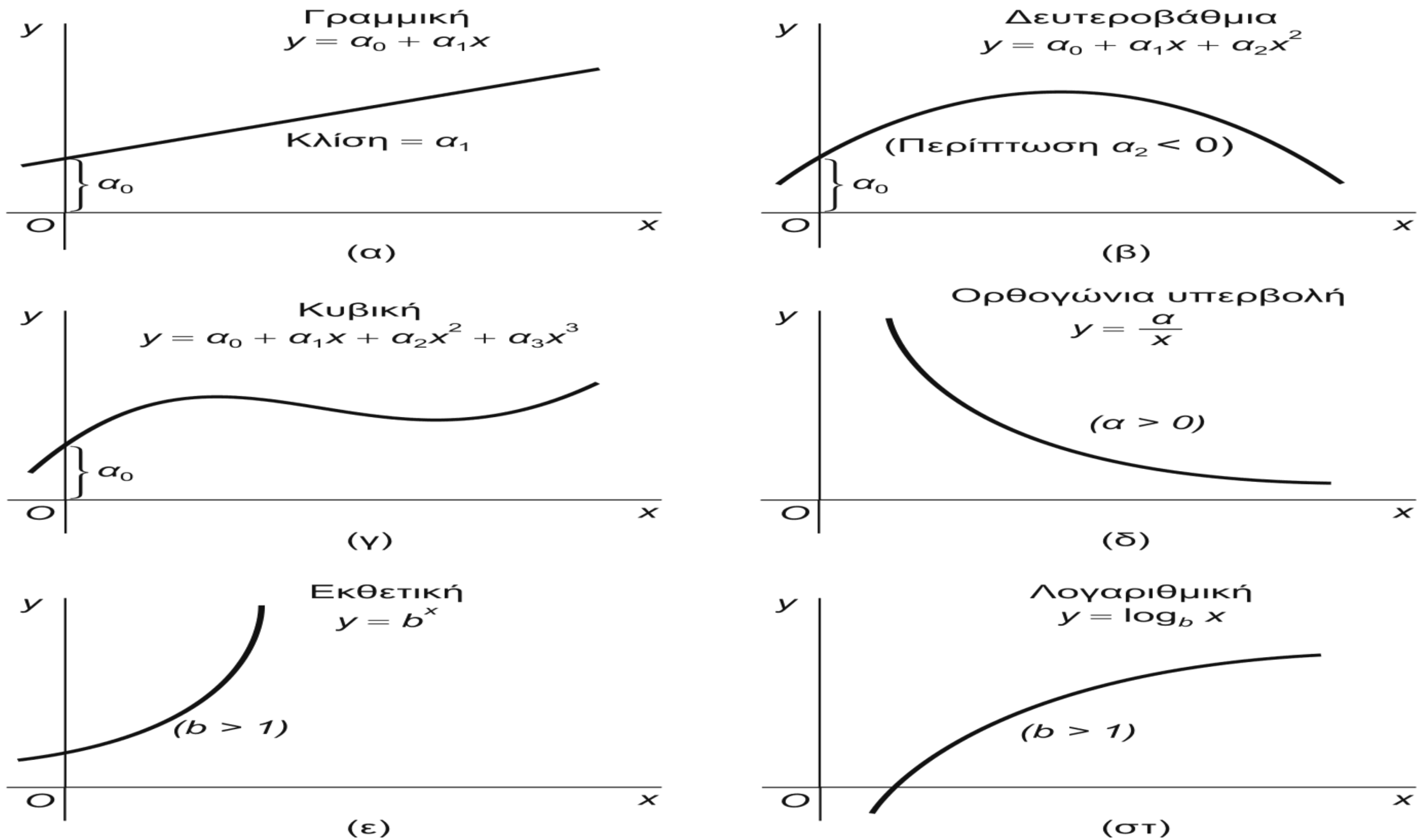
συνάρτηση 1-1



συνάρτηση όχι 1-1


a)
b)
c)
d)
A
B
a
b
c
d
u
v
x
y
z

Γραφικές απεικονίσεις

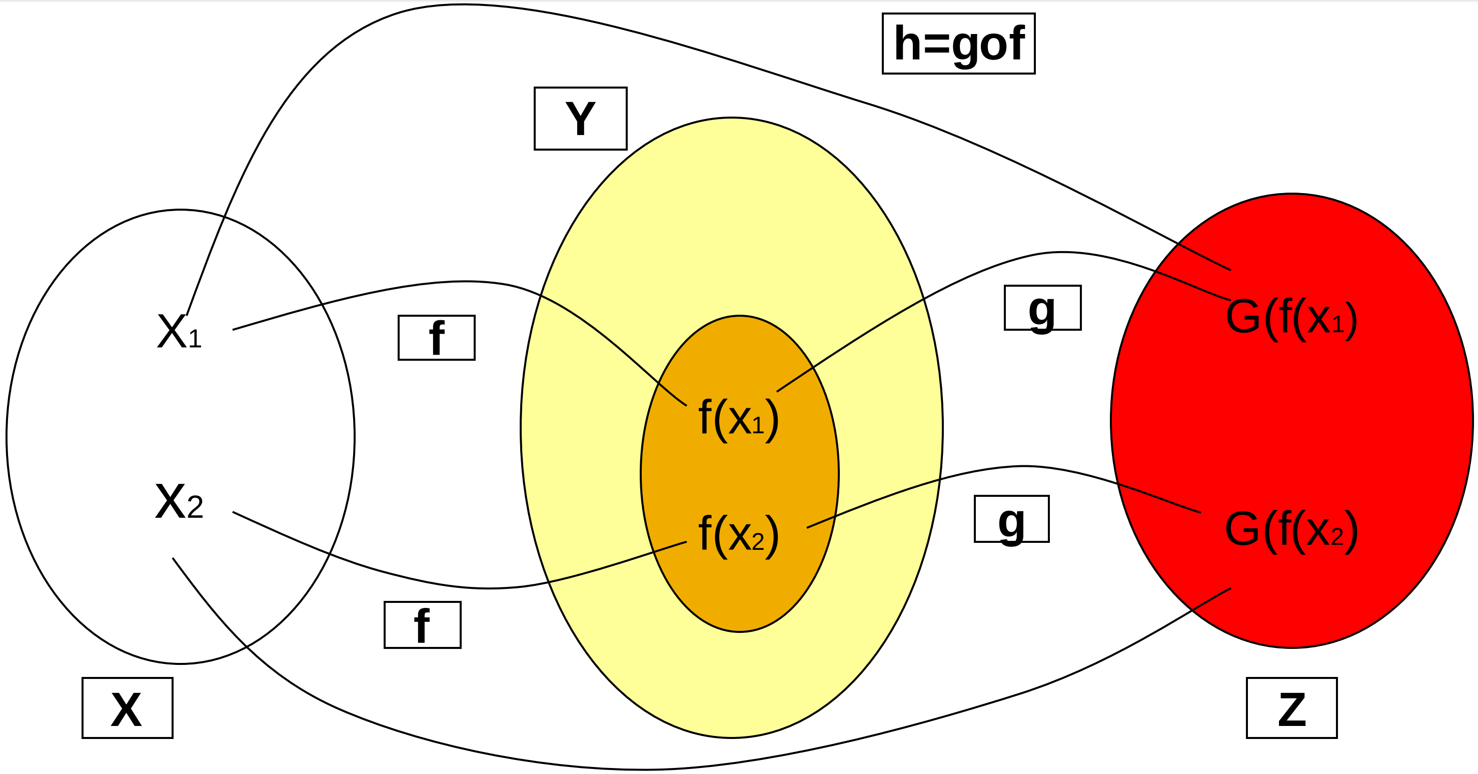


Πράξεις με Συναρτήσεις (3)

Στα οικονομικά η μεταβλητή που παριστάνει τις τιμές του π.ο της συνάρτησης καλείται ανεξάρτητη-εξωγενής ενώ εξαρτημένη-ενδογενής αυτή που οι τιμές της καθορίζονται από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (x,y αντίστοιχα).

Πεδίο τιμών: Μπορεί να εμφανιστεί ως το σύνολο των εικόνων: $f(\mathrm{X}) = \left\{ y \in Y : y = f\left(x\right), x \in X \right\}$

Σύνθεση Συναρτήσεων



Παράδειγμα Σύνθεσης Συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση ζήτησης καφέ με την μορφή $K(x)=\sqrt{3x-6}$ και η συνάρτηση ζήτησης για ζάχαρη $Z(x)=x+6$

Ποια η σύνθεση $(KoZ)(x)$?

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 4$. Να προσδιοριστούν οι $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [1, +\infty)$ ενώ το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι

$$A_1 = \{x \in A: f(x) \in B\}$$

Δηλαδή

$$A_1 = \left\{x \in [1, +\infty): \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= [1, +\infty)$$

Για τον τύπο της $g \circ f$ έχουμε

$$g \circ f = g(f(x) = g\left(\sqrt{x-1}\right)$$
$$= \sqrt{x-1}^2 + 4 =$$
$$x - 1 + 4 = x + 3$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι

$$A_2 = \{x \in B: g(x) \in A\}$$

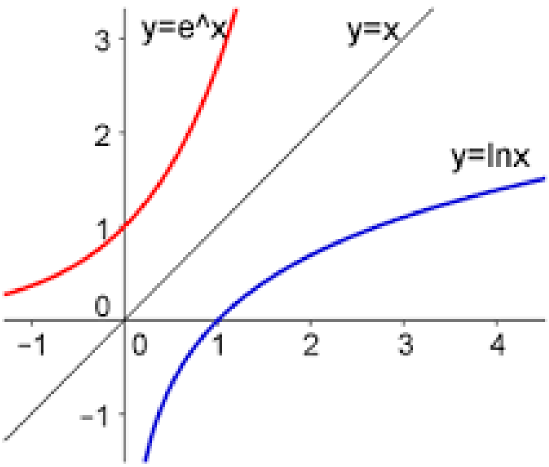
Δηλαδή

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4 \in [1, +\infty)\} = \mathbb{R}$$

Για τον τύπο της $f \circ g$ έχουμε

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x^2 + 4 - 1} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης



- Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια 1-1 συνάρτηση. Ορίζουμε τότε μια συνάρτηση g: $f(A) \to A$ ως εξής:
- Για κάθε $y \in f(A)$ θέτουμε $g(y) = x$ όπου x το μοναδικό στοιχείο του A για το οποίο $f(x) = y$.
- Η συνάρτηση g ονομάζεται αντίστροφη της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 1$. Να βρεθεί στην περίπτωση που ορίζεται η αντίστροφή της.

Λύση

Η συνάρτηση είναι 1-1.

Με $x_1, x_2 \in A$ θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \; x_1 = x_2$$

Πράγματι έστω

$${x_1}^2 + 1 = {x_2}^2 + 1 \Rightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

Ελέγχουμε αν είναι επί:

$$\mathrm{f}(x) = y$$
$$x^2 + 1 = y$$
$$x^2 = y - 1$$

Με $x \in [1, +\infty)$

$$x = \sqrt{\mathrm{y} - 1}$$

Επομένως $\mathrm{y} \in [1, +\infty)$

Άρα είναι επί.

Η αντίστροφη θα είναι

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ένας πρώτος διαχωρισμός που θα μπορούσε να γίνει αφορά σε

1. Πραγματικές Συναρτήσεις,
2. Διανυσματικές Συναρτήσεις

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (1)

Οι πραγματικές Συναρτήσεις με την σειρά τους θα μπορούσαν να αποδοθούν ως εξής:

1. Πολυωνυμικές (Polynomial) (και οι γραμμικές)
2. Αλγεβρικές (algebraic) (Ρητές και μη)
3. Υπερβατικές (transcedental) (Non algebraic)(εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές)

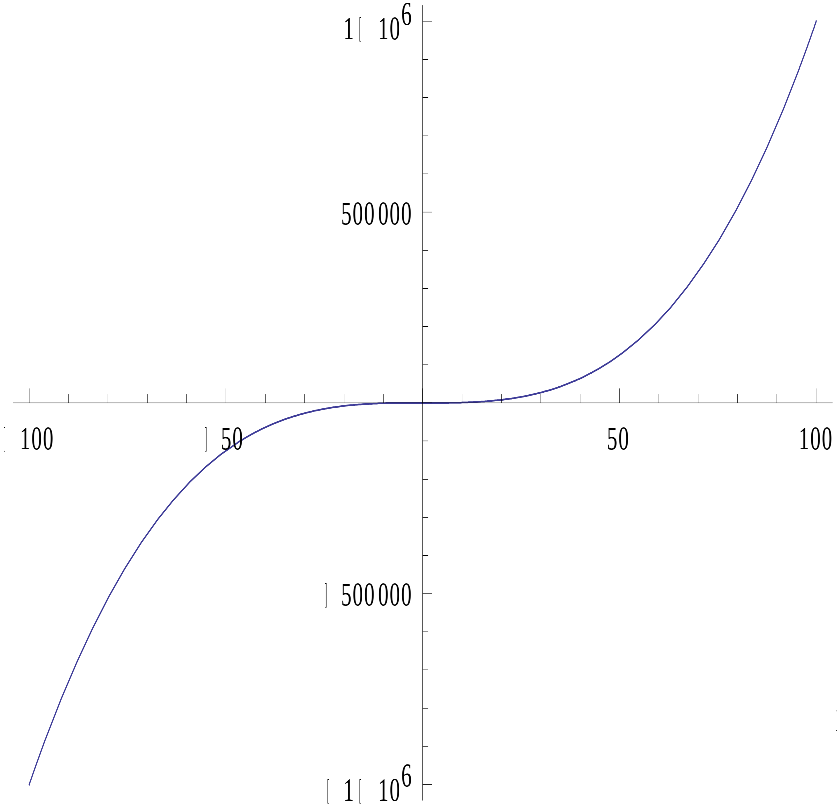
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (2)

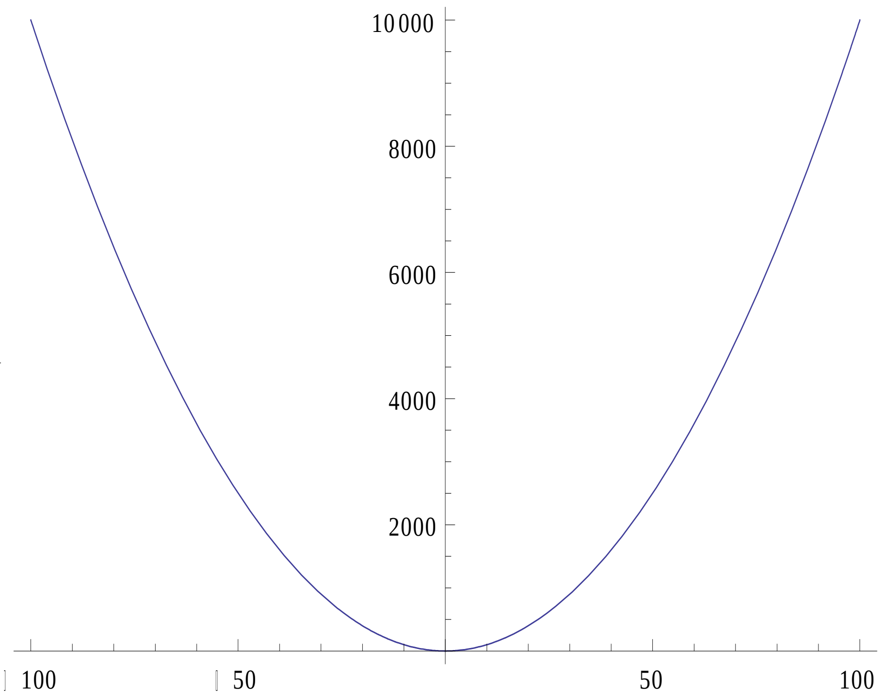
Πολυωνυμικές (Polynomial). Πρόκειται για συναρτήσεις που ορίζονται στον χώρο R. Η γενική τους μορφή:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Όταν έχουμε n=0 μιλάμε για πολυώνυμο μηδενικού βαθμού, όταν n=1 μιλάμε για πολυώνυμο πρώτου και συνεπώς για την γραμμική συνάρτηση όταν n=2 Μιλάμε για τετραγωνικό πολυώνυμο κ.λ.π

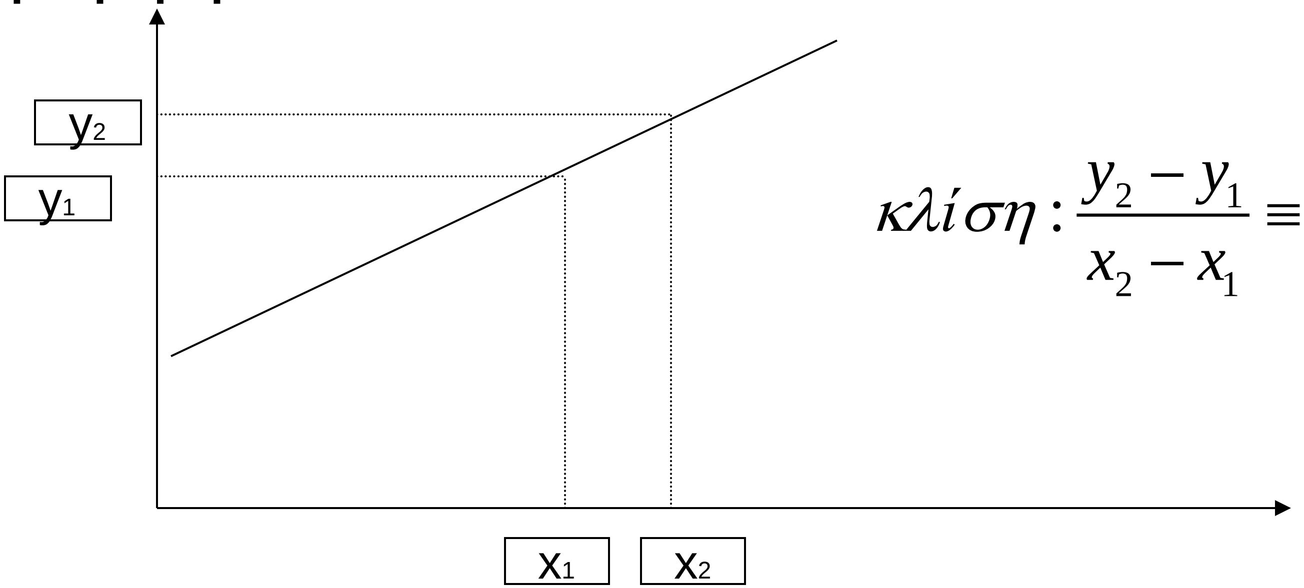
Παραδείγματα Πολυωνυμικών





ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (3)

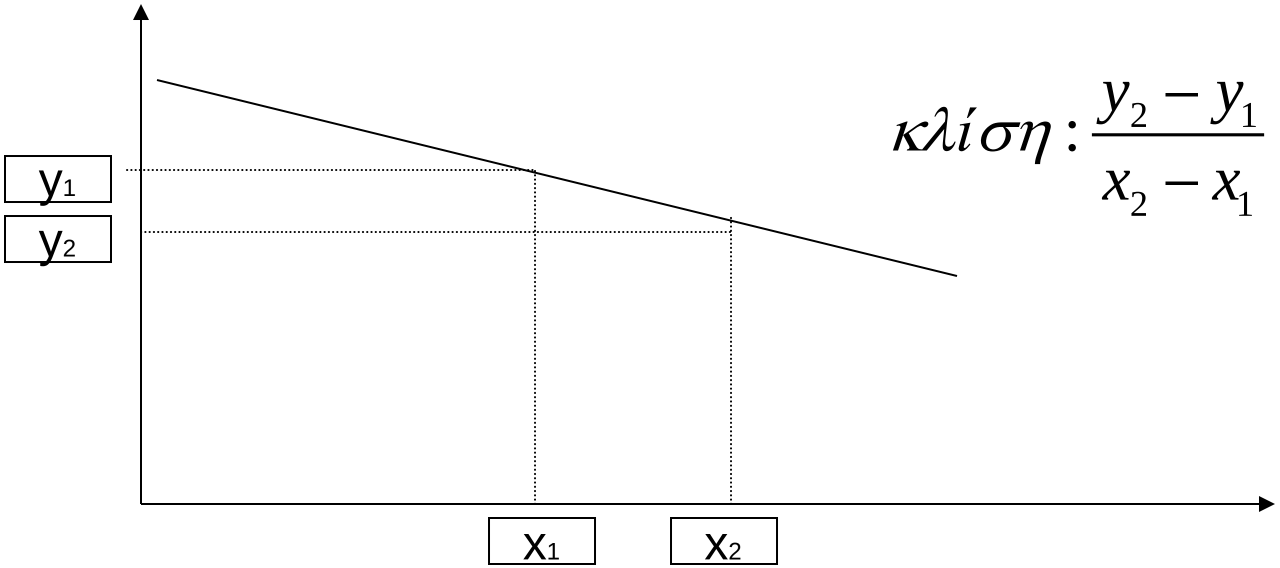
Γραμμική Συνάρτηση. Πρόκειται για συναρτήσεις που ορίζονται στον χώρο R. Η γενική μορφή: $y = a_0 + a_1 x$



$$κλίση : \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv εφω$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (4)

Τα έσοδα από άμεσους φόρους εξαρτώνται από το επίπεδο ανεργίας που υπάρχει σε μία οικονομία. Ας υποθέσουμε ότι η σχέση είναι γραμμική $y=10-0.9x$ όπου y τα ετήσια έσοδα και x η ανεργία ως ποσοστό του εργατικού δυναμικού. Ποια η οικονομική εξήγηση της σχέσης αυτής;



$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta : \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \varepsilon\phi\omega$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (5)

Οι Ρητές Συναρτήσεις με την σειρά τους θα μπορούσαν να αποδοθούν ως εξής:

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού

Άρρητες Συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{3-89x}$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (6α)

Οι υπερβατικές Συναρτήσεις με την σειρά τους περιλαμβάνουν:

- Εκθετική Συνάρτηση

$\Gamma\iota\alpha$ α f 0 ∃ συνάρτηση μοναδική $\mathrm{e}_\alpha(x)$ με $\mathrm{D_f} = R$:

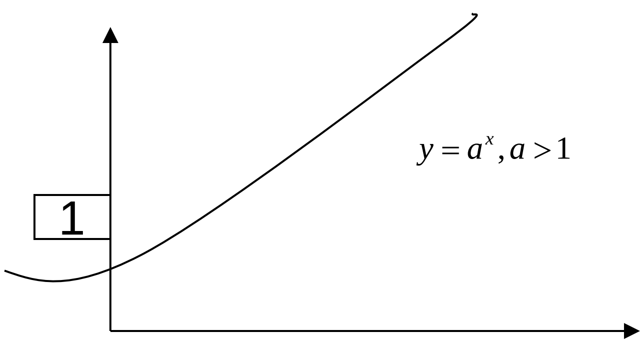
$\mathrm{e}_\alpha 1 = a, \mathrm{e}_\alpha(x+y) = \mathrm{e}_\alpha(x)\mathrm{e}_\alpha(y)$

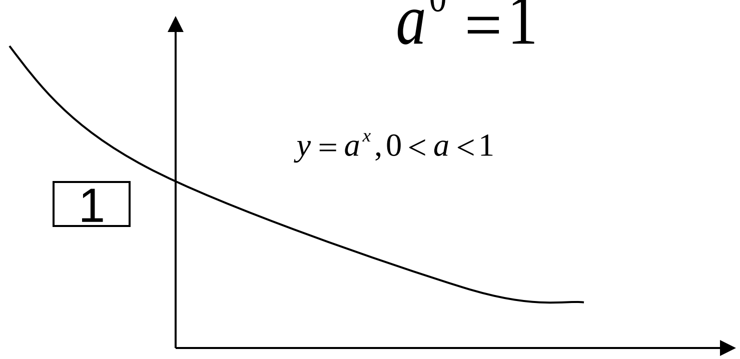
$\mathrm{e}_\alpha(x) \equiv a^x, \forall x \in Q$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad a^{x-y} = a^x / a^y$$

$$a^0 = 1$$





ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (6β)

- Λογαριθμική Συνάρτηση

Η αντίστροφη συνάρτηση της $a^x : R \to (0,+\infty)$

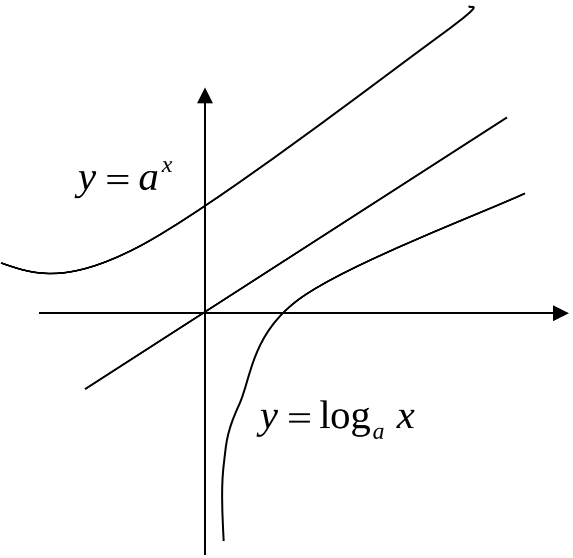
ορίζεται ως λογαριθμική.

$$\log_a x = x \ (\ln e^{x} = x)$$

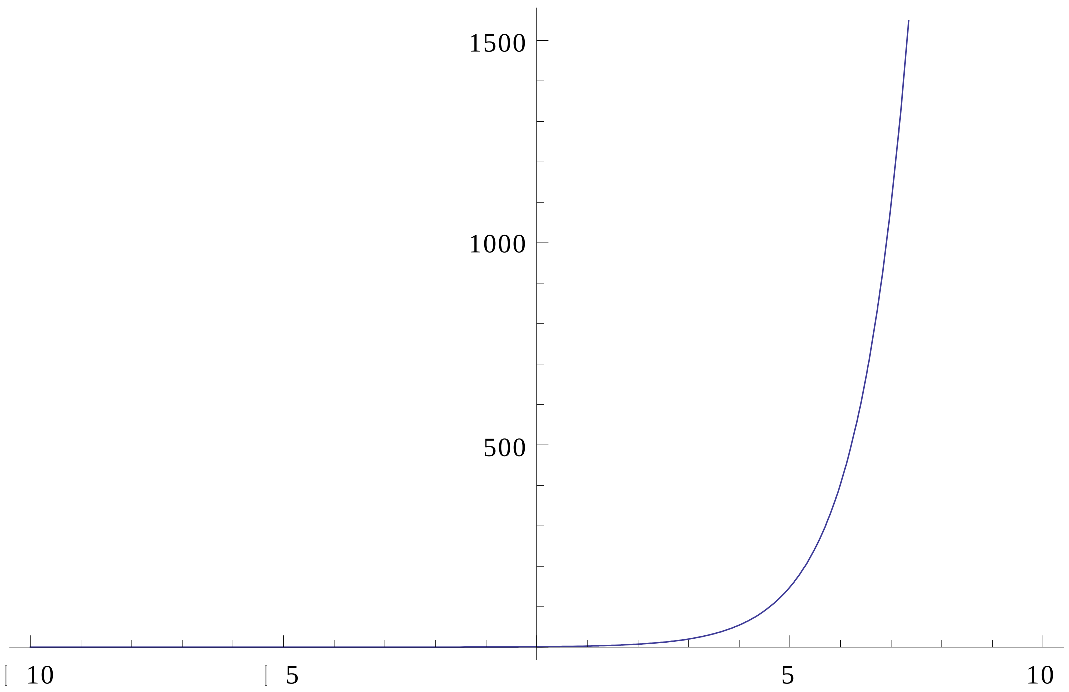
$$a^{\log_a x} = x \ (e^{\ln x} = x)$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

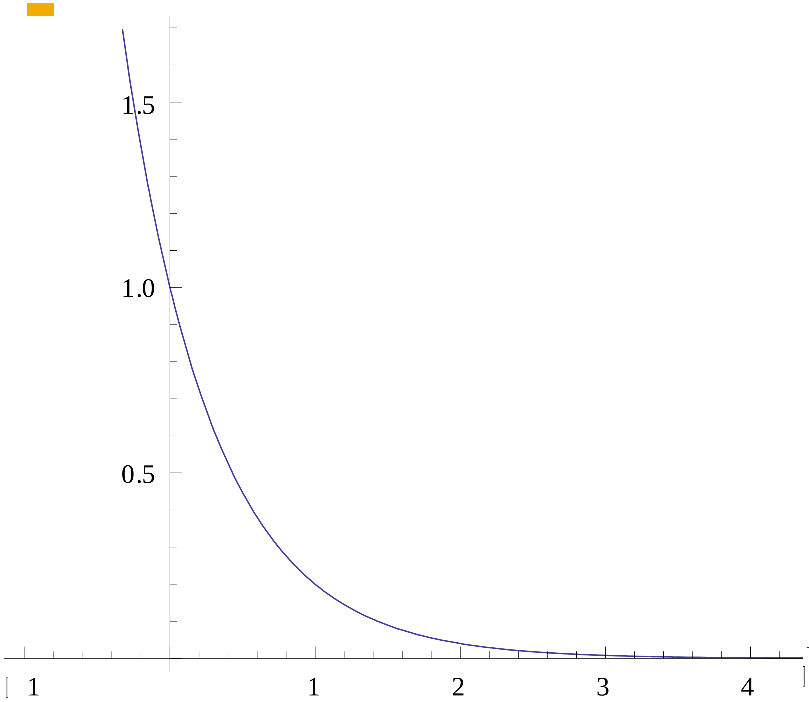
$$\log_a x^b = b\log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\ln x}{\ln b} (\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma)$$

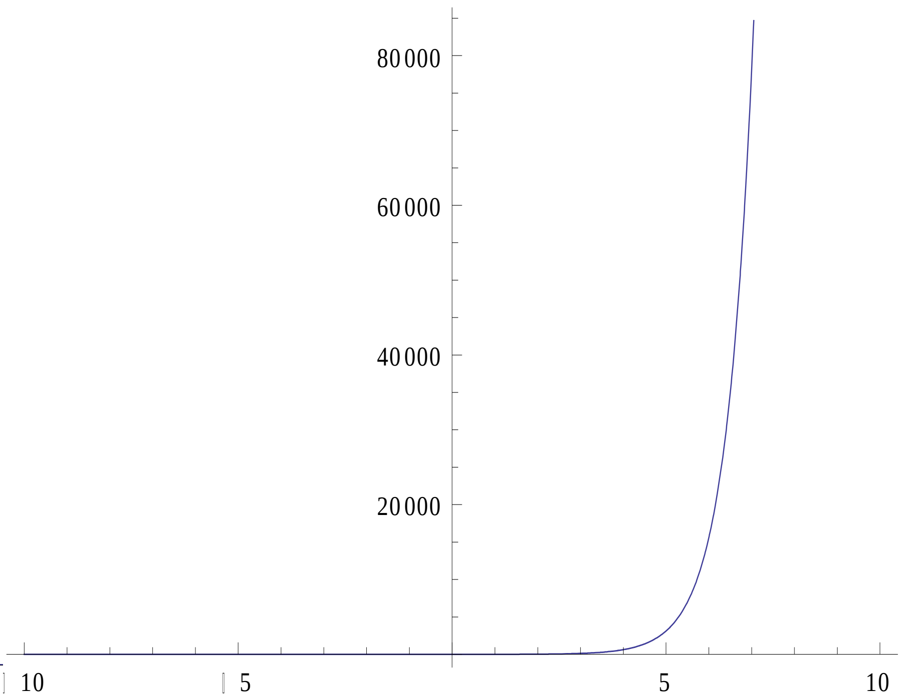


Λογαριθμική Συνάρτηση



Λογαριθμική Συνάρτηση





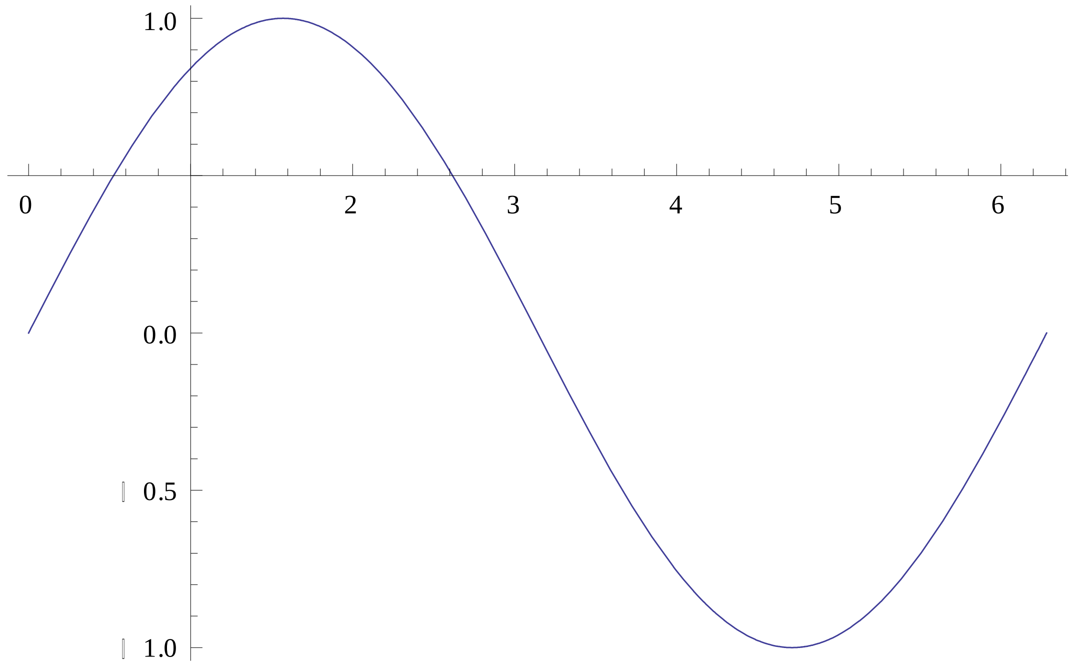
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (6γ)

- Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις.

Σε σπάνιες περιπτώσεις οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται σε οικονομετρικές εφαρμογές.

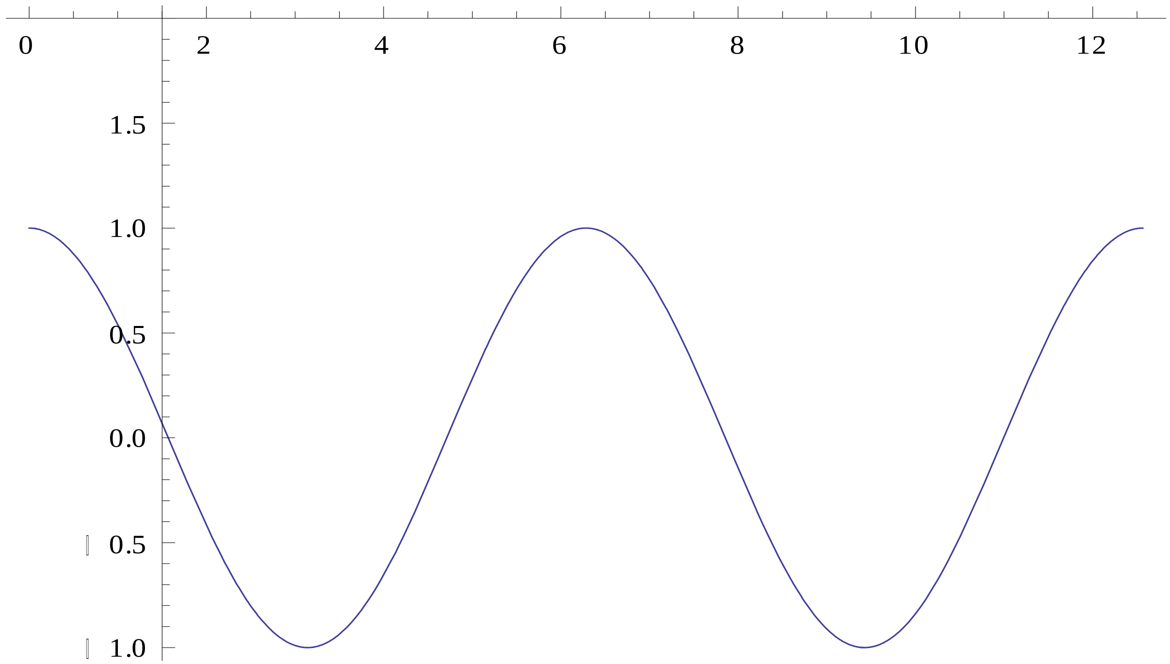
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

- Συνάρτηση Ημιτόνου



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

- Συνάρτηση Συνημίτονου



Συναρτήσεις στα Οικονομικά

- Γραμμική συνάρτηση ζήτησης-προσφοράς
- Ισορροπία της αγοράς $Q_d = a + bP, Q_s = g + dP$
- Συνάρτηση κατανάλωσης $C = a + bI, a, b > 0$
- Τετραγωνικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς $Q_d^2 = a + bP, Q_s^2 = g + dP$
- Τετραγωνική συνάρτηση κόστους $TC = Q^3 0.02Q^2 + 3Q + 200$
- Κυβική συνάρτηση κόστους $TC = 0.02Q^2 + 3Q + 200$
- Υπόδειγμα εθνικού εισοδήματος

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G, \\ C &= a + bY \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} Y &= \frac{a + I + G}{1 - b}, \\ C &= \frac{a - bI + bG}{1 - b} \end{aligned}$$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ Ι

Ως ακολουθία ορίζεται κάθε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $a_n : \mathrm{N} \to R$. Μια ακολουθία μπορεί να παρασταθεί, γενικά, με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος αφορά την χρήση της αναγραφής των όρων της ως εξής: $a_1, a_2, a_{3,} \ldots, a_N$ ενώ ο δεύτερος την χρήση ενός γενικού τύπου όπως για παράδειγμα $a_n = f(n)$. Τέλος, ο τρίτος τρόπος αφορά την χρήση ενός αναδρομικού τύπου ως εξής $a_n = f(a_{n-1})$.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΙΙ

Υπακολουθία μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ καλούμε μια ακολουθία της μορφής $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3,} \ldots, a_{nk}, \ldots$ όπου ισχύει ότι $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Κοντινή στην έννοια της υπακολουθίας είναι και οι έννοιες lim sup και lim inf. Έστω μια ακολουθία ΤΥΠΟΣ και το σύνολο ΤΥΠΟΣ ορίζουμε $\lim\sup a_n = \sup A, \lim\ \inf a_n = \inf A$

Ορισμός Ακολουθίας 1/3

- Μια ακολουθία ορίζεται όταν:

1. Δίνεται ο γενικός της όρος

Παράδειγμα:

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = \frac{n+1}{n+2}$. Να βρεθεί ο 51ος όρος της.

Λύση

$$\alpha_{51} = \frac{51+1}{51+2} = \frac{52}{53}$$

Ορισμός Ακολουθίας 2/3

2. **Όταν δίνεται μια αναδρομική σχέση.**

Παράδειγμα:

Να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας για την οποία $\alpha_1 = 5$ και $\frac{\alpha_{n+1}+2\alpha_n}{3\alpha_n+4} = 1$

Λύση

$$\frac{\alpha_{n+1} + 2\alpha_n}{3\alpha_n + 4} = 1$$

$$\alpha_{n+1} + 2\alpha_n = 3\alpha_n + 4$$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 4$$

Ορισμός Ακολουθίας 3/3

- $$\alpha_2 - \alpha_1 = 4$$
  $$\alpha_3 - \alpha_2 = 4$$
  $$\alpha_4 - \alpha_3 = 4$$
  $$\vdots$$
  $$\alpha_n - \alpha_{n-1} = 4$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις αυτές κατά μέλη:

$$\alpha_n - \alpha_1 = 4(n-1)$$

$$\alpha_n - 5 = 4n - 4$$

$$\alpha_n = 4n+1$$

Από τον γενικό όρο στον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας

- **Παράδειγμα:** Να ορισθεί αναδρομικά η ακολουθία

$$\alpha_n = n+5$$

Λύση

Για n=1 έχουμε:

$$\alpha_1 = 6$$

Γράφουμε τον όρο α_{n+1}

$$\alpha_{n+1} = (n+1)+5$$

$$\alpha_{n+1} = n+5+1$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1$$

Άρα για τον αναδρομικό ορισμό έχουμε:

$$\alpha_1 = 6 \text{ και } \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1$$

Η έννοια της αριθμητικής προόδου

- Τι παρατηρείτε στις ακολουθίες:

5, 8, 11, 14,…
-2, -4, -6, -8,…

Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας μια σταθερά.

Μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται **αριθμητική πρόοδος**
Η σταθερή διαφορά δύο διαδοχικών όρων ονομάζεται

Διαφορά της αριθμητικής προόδου:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$$

Εύρεση n-οστού όρου αριθμητικής προόδου

- Σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} + \omega$$
$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \omega$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει ο n-οστός όρος:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$$

Παράδειγμα 1

- Να βρεθεί ο α_{120} της ακολουθίας -1, 4, 9, 14,…

Λύση

Γράφουμε πρώτα τον πρώτο όρο και τη διαφορά της αριθμητικής προόδου:

$$\alpha_1 = -1 \text{ και } \omega = 5$$

Αφού

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$$

Θα έχουμε

$$\alpha_n = -1 + 5(n-1) = -1 + 5n - 5 = -6 + 5n$$

Άρα

$$\alpha_{120} = -6 + 5 \cdot 120 = -6 + 600 = 594$$

Αριθμητικός μέσος

- Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Πράγματι

$$\beta - \alpha = \omega \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \omega$$

Επομένως

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta$$

$$2\beta = \alpha + \gamma$$

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Αριθμητική Πρόοδος

- **Διαφορά**: $\alpha_{n+1} - \alpha_{\nu} = \omega$
- **n-οστός όρος**: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$
- Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Άθροισμα ν-πρώτων όρων αριθμητικής προόδου

$$S_n = \frac{n}{2}(\alpha_n + \alpha_1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega]$$

Παράδειγμα 2

- Να βρεθεί το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 48, 44, 40, 36,…

Λύση

Έχουμε ότι

$$\alpha_1=48 \text{ και } \omega=-4$$

Επομένως με

$$S_n=\frac{n}{2}[2\alpha_1+(n-1)\omega]$$

Θα είναι

$$S_{15}=\frac{15}{2}[2\cdot 48+(15-1\cdot)(-4)]$$

$$15(48-28)$$

$$=15\cdot 20$$

$$=300$$

Εφαρμογή στα οικονομικά 1/2

Ένας κατασκευαστής παράγει 1200 υπολογιστές την εβδομάδα. Μετά την πρώτη εβδομάδα αυξάνει την παραγωγή κατά 80 υπολογιστές κάθε εβδομάδα.

1. *Να βρεθεί η παραγωγή την 20η εβδομάδα.*
2. *Να βρεθεί η συνολική παραγωγή των πρώτων 20 εβδομάδων.*
3. *Να προσδιοριστεί η εβδομάδα κατά την οποία η παραγωγή ξεπερνά για πρώτη φορά τους 8000.*

Λύση

Είναι φανερό ότι έχουμε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1=1200 και ω=80.

1. Η παραγωγή την 20η εβδομάδα θα είναι:

$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$ για n=20, α_1=1200 και ω=80 έχουμε

$$\alpha_{20} = 1200 + (20-1)80 = 2720$$

2. Για την συνολική παραγωγή και των 20 εβδομάδων θα έχουμε

$$S_n = \frac{n}{2}(\alpha_n + \alpha_1)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2720 + 1200) = 39200$$

Εφαρμογή στα οικονομικά 2/2

3. Θέλοντας να βρούμε την εβδομάδα κατά την οποία η παραγωγή ξεπερνά για πρώτη φορά τους 8000, παρατηρούμε ότι στον τύπο

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$$

δεν γνωρίζουμε το n:

$$8000 = 1200 + (n-1)80$$

$$8000 - 1200 = (n-1)80$$

$$n - 1 = 6800/80$$

$$n = 86$$

Έτσι 8000 υπολογιστές παράγονται την $86^{η}$ εβδομάδα.

Την $87^{η}$ εβδομάδα ο κατασκευαστής έχει ξεπεράσει τους 8000 υπολογιστές.

Η έννοια της γεωμετρικής προόδου

- Τι παρατηρείτε στις ακολουθίες:

$$3, 6, 12, 24, \ldots$$

$$4, 2, 1, 1/2, \ldots$$

Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με μια σταθερά.
Μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος**
Ο σταθερός λόγος δύο διαδοχικών όρων ονομάζεται **Λόγος** της γεωμετρικής προόδου:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lambda$$

Εύρεση n-οστού όρου γεωμετρικής προόδου

- Σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lambda$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} \cdot \lambda$$
$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει ο n-οστός όρος:

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο n-οστός όρος της της γεωμετρικής προόδου 1, -2, 4, -8,…Στην συνέχεια να βρεθεί ο α_{11}.

Λύση

Γράφουμε πρώτα τον πρώτο όρο και το λόγο της γεωμετρικής προόδου:

$$\alpha_1 = 1 \text{ και } \lambda = -2$$

Αφού

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Θα έχουμε

$$\alpha_n = 1 \cdot (-2)^{n-1}$$
$$\alpha_n = (-2)^{n-1}$$

Άρα

$$\alpha_{11} = (-2)^{11-1} = (-2)^{10} = 1024$$

Γεωμετρικός μέσος

- Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Πράγματι

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\beta} = \lambda$$

Επομένως

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Άθροισμα η-πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

- Θεωρούμε το άθροισμα η πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$$

$$S_n = \alpha_1 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \cdots + \lambda^{n-1}\alpha_1 \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) κατά μέλη με λ και έχουμε

$$\lambda S_n = \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \lambda^3\alpha_1 + \cdots + \lambda^n\alpha_1 \qquad (2)$$

Από την σχέση (1) αφαιρούμε την σχέση (2)

$$S_n - \lambda S_n = (\alpha_1 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \cdots + \lambda^{n-1}\alpha_1) - (\lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \lambda^3\alpha_1 + \cdots + \lambda^n\alpha_1)$$

$$S_n - \lambda S_n = \alpha_1 - \lambda^n\alpha_1$$

$$S_n(1-\lambda) = \alpha_1(1-\lambda^n)$$

$$S_n = \frac{\alpha_1(1-\lambda^n)}{1-\lambda}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- **Λόγος**: $\lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}, \lambda \neq 1$
- **ν-οστός όρος**: $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1}$
- Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

- Άθροισμα ν-πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

$$S_n = \alpha_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

Παράδειγμα 2

- Να υπολογιστεί το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου: 4+2+1+...+1/512

Λύση

Γράφουμε τον πρώτο όρο και τον λόγο της γεωμετρικής προόδου:

$$\alpha_1 = 4, \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

Από τον τύπο

$$\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1}$$

Με $\alpha_n = \frac{1}{512}$, έχουμε:

$$\frac{1}{512} = 4(\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\frac{1}{2^9} = 2^2 2^{-n+1}$$

$$2^{-9} = 2^{-n+3}$$

$$-9 = -n + 3$$

$$n = 12$$

Παράδειγμα 2 συνέχεια

Από τον τύπο

$$S_n = \alpha_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

Για n=12 έχουμε

$$S_{12} = 4\frac{(\frac{1}{2})^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{12} = -8(\frac{1}{4096} - \frac{4096}{4096})$$

$$S_{12} \cong 8$$

Στην βιβλιογραφία συναντάμε

- P_t: μελλοντική αξία
- P_0: παρούσα αξία
- i: τόκος
- t: χρόνος
- Ανατοκισμός: $P_t = P_0(1+i)^t$
- Ίσες καταθέσεις: $P_t = P_0(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{i}$

Απλός τόκος (simple interest)

Ο **απλός τόκος** είναι ένα σταθερό ποσοστό του αρχικού κεφαλαίου P_0 που καταβάλλεται στον επενδυτή κάθε έτος.

Αν i: επιτόκιο, τότε ο τόκος μετά από t έτη θα είναι

$$I = P_0 \cdot i \cdot t$$

Επομένως η μελλοντική αξία P_t θα βρεθεί αν στο P_0 (παρούσα αξία) προσθέσουμε τον τόκο:

$$P_t = P_0 + I$$

$$P_t = P_0 + P_0 \cdot i \cdot t$$

$$P_t = P_0(1 + i \cdot t)$$

Έτσι η παρούσα αξία θα είναι:

$$P_0 = \frac{P_t}{1 + i \cdot t}$$

Σύνθετος τόκος (compound interest) 1/2

Με τον σύνθετο τόκο το επιτόκιο καταβάλλεται στο αρχικό κεφάλαιο αλλά και στο τοκισμένο κεφάλαιο κάθε έτος.

Πρώτο έτος: Έστω ότι στην αρχή του έτους το κεφάλαιο είναι P_0.

Ο τόκος που καταβάλλεται είναι $\mathrm{P}_0 \cdot i$.

Στο τέλος του έτους θα έχουμε κεφάλαιο

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0(1+i)$$

Δεύτερο έτος: Το κεφάλαιο είναι $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0(1+i)$

Ο τόκος που καταβάλλεται είναι $\mathrm{P}_1 \cdot i$.

Στο τέλος του έτους θα έχουμε κεφάλαιο

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1(1+i)$$

Δηλαδή: $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_0(1+i)(1+i) = \mathrm{P}_0(1+i)^2$

Σύνθετος τόκος (compound interest)2/2

Τρίτο έτος: Το κεφάλαιο είναι $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_0(1+i)^2$

Ο τόκος που καταβάλλεται είναι $\mathrm{P}_2 \cdot i$.

Στο τέλος του έτους θα έχουμε κεφάλαιο $\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_2(1+i)$

Δηλαδή: $\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_0(1+i)^2(1+i) = \mathrm{P}_0(1+i)^3$

$$\vdots$$

t- έτος: Το κεφάλαιο είναι $\mathrm{P}_{t-1} = \mathrm{P}_0(1+i)^{t-1}$

Ο τόκος που καταβάλλεται είναι $\mathrm{P}_{t-1} \cdot i$.

Στο τέλος του έτους θα έχουμε κεφάλαιο $\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_{t-1}(1+i)$

Δηλαδή: $\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_0(1+i)^{t-1}(1+i) = \mathrm{P}_0(1+i)^t$

Τα ποσά που έχουμε για κάθε έτος είναι:

$$\boldsymbol{P_0},\ \boldsymbol{P_0(1+i)},\ \boldsymbol{P_0(1+i)^2},\ \boldsymbol{P_0(1+i)^3}, \ldots \boldsymbol{P_0(1+i)^t}$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο

$$\boldsymbol{\alpha = P_0} \textbf{ και λόγο } \mathbf{r} = \boldsymbol{(1+i)}$$

Παράδειγμα 1

Έστω ότι επενδύουμε 8000 ευρώ με 10% σύνθετο τόκο για τρία έτη.

1. Να υπολογιστεί η τιμή της επένδυσης μετά τα τρία έτη

2. Να υπολογιστεί η παρούσα αξία αν το κεφάλαιο που παίρνουμε μετά από 3 έτη είναι 14641.

Λύση

1. Έχουμε $P_0 = 8000$, i=10/100=0.1 και t=3

Έτσι από τον τύπο $P_t = P_0(1+i)^t$

Έχουμε

$$P_3 = 8000(1+0.1)^3 = 8000(1.1)^3 = = 8000 \cdot 1.331 = 10.648$$

2. Για την παρούσα αξία έχουμε

$$P_0 = \frac{P_t}{(1+i)^t}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$P_0 = \frac{14641}{(1.1)^3} = 11000$$

Παράδειγμα 2

- Να βρεθεί το επιτόκιο ανατοκισμού που απαιτείται προκειμένου 10000 ευρώ να αυξηθούν σε 30000 σε 8 έτη.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{P}_0 = 10000, \mathrm{P}_t = 30000, \quad t = 8$, και θέλουμε να βρούμε το i.

Έτσι αντικαθιστώντας στον τύπο $\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_0(1+i)^t$

Έχουμε

$$30000 = 10000(1+i)^8$$

$$\frac{30000}{10000} = (1+i)^8$$

$$3 = (1+i)^8$$

$$3^{1/8} = (1+i)$$

$$1.15 = 1+i$$

$$i = 0.15$$

Το επιτόκιο ανατοκισμού πρέπει να είναι 15% έτσι ώστε η επένδυση αυτή να τριπλασιάσει την αξία της σε 8 χρόνια.

Παράδειγμα 3

Αν μια τράπεζα πληρώνει 7% με ετήσιο ανατοκισμό, να βρεθεί το χρονικό διάστημα που απαιτείται προκειμένου το αρχικό κεφάλαιο των 10000 ευρώ να δώσει ολική αξία 20000.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{P}_0 = 10000$, $\mathrm{P}_t = 20000$, $i = 0.07$, και θέλουμε να βρούμε το t.
Έτσι αντικαθιστώντας στον τύπο $\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_0(1+i)^t$
Έχουμε

$$20000 = 10000(1+0.07)^t$$

$$\frac{20000}{10000} = (1+0.07)^t$$

$$2 = (1.07)^t$$

$$ln2 = ln(1.07)^t$$

$$ln2 = tln1.07$$

$$t = \frac{ln2}{ln1.07} \cong \frac{0.69}{0.067} \cong 10.3$$

Ανατοκισμός που γίνεται πολλές φορές ετησίως

Κάθε χρονική περίοδος κατά την οποία γίνεται ανατοκισμός ονομάζεται ***περίοδος μετατροπής (conversion period) ή τοκοφόρα περίοδος (interest period)***

Αν το **πλήθος των περιόδων μετατροπής ετησίως** το συμβολίσουμε με **m,**

το **επιτόκιο που αντιστοιχεί σε κάθε περίοδο** θα είναι **i/m.**

Με **n** συμβολίζουμε τον συνολικό αριθμό των περιόδων μετατροπής

Με **t** συμβολίζουμε τον αριθμό των ετών

Τότε η αξία της επένδυσης στο τέλος της n περιόδου θα είναι

$$P_t = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^n = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$$

Παράδειγμα 4

Επενδύονται 10000 ευρώ για τρία έτη με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Στο τέλος τριών ετών:

1. Να υπολογιστεί η συνολική αξία της επένδυσης
2. Να συγκριθεί η απόδοση (return) της επένδυσης στις περιπτώσεις του ετήσιου ανατοκισμού και του εξαμηνιαίου.

Λύση

1. Έχουμε $P_0 = 10000$, i=8/100=0.08, t=3, m=2 και n= $m \cdot t = 6$.

Έτσι από τον τύπο $P_t = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$ έχουμε:

$$P_3 = 10000\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^6$$

$$P_3 = 10000(1+0.04)^6$$

$$P_3 = 12653.19$$

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

- 2 Έχουμε $P_0 = 10000$, i=8/100=0.08 και t=3

Έτσι από τον τύπο $P_t = P_0(1+i)^t$

Έχουμε

$$P_3 = 10000(1+0.08)^3 = 10000(1.08)^3 = \\ = 10000 \cdot 1.259712 \\ = 12597.12$$

Το κέρδος που προκύπτει από τον εξαμηνιαίο ανατοκισμό είναι:

$$12653.19 - 12597.12 = 56.07$$

Παράδειγμα 5

Επενδύονται 10000 ευρώ για τρία έτη με ετήσιο επιτόκιο 8%. Στο τέλος τριών ετών Να υπολογιστεί η αξία της επένδυσης :

1. Όταν ανατοκίζεται μηνιαίως.
2. Όταν ανατοκίζεται ημερισίως.

Λύση

1. Έχουμε $P_0 = 10000$, i=8/100=0.08, t=3, m=12 και n= $m \cdot t = 36.$

Έτσι από τον τύπο $P_t = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$ έχουμε:

$$P_3 = 10000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{36} = 12702$$

2. Έχουμε $P_0 = 10000$, i=8/100=0.08, t=3, m=365 και n= $m \cdot t = 1095.$

$$P_3 = 10000\left(1+\frac{0.08}{}\right)^{1095} = 12712.37$$

Ράντες 1/2

- Μια **ράντα** είναι μια σειρά από ισόποσες καταθέσεις ή αναλήψεις που γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.
Αν η κατάθεση γίνεται τη χρονική στιγμή του ανατοκισμού τότε η ράντα λέγεται **συνήθης ράντα**.

Έστω A_0 είναι το αρχικό ποσό και i το επιτόκιο τότε στο τέλος κάθε χρόνου για t έτη οι τιμές της ράντας είναι:

1ο έτος τιμή ράντας: A_0

2ο έτος τιμή ράντας: $\mathrm{A}_0(1+i)+\mathrm{A}_0$

3ο έτος τιμή ράντας: $\mathrm{A}_0(1+i)^2+\mathrm{A}_0(1+i)+\mathrm{A}_0$

$$\vdots$$

tο έτος τιμή ράντας: $\mathrm{A}_0(1+i)^{\mathrm{t}-1}+\mathrm{A}_0(1+i)^{t-2}+\mathrm{A}_0(1+i)^{t-3}+\cdots$

$$+\mathrm{A}_0(1+i)+\mathrm{A}_0$$

Ράντες 2/2

- Το συνολικό ποσό της ράντας δίνεται από το άθροισμα t πρώτων όρων της γεωμετρικής σειράς με

$$\alpha_1 = A_0 \text{ και } \lambda = (1+i)$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$S_n = \alpha_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

Επομένως

$$V_t = A_0 \frac{(1+i)^t - 1}{1 + i - 1}$$

$$V_t = A_0 \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Παράδειγμα 6

Έστω ότι αποφασίζετε να αποταμιεύετε ένα σταθερό ποσό ετησίως. Αν η αποταμίευση συνεχιστεί για 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 7%:

1. Να υπολογιστεί η αξία του αποθέματος στο τέλος των 10 ετών αν η κατάθεση είναι 500 ευρώ ετησίως.
2. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να αποταμιεύετε κάθε χρόνο προκειμένου μετά από 10 έτη να έχετε αποθεματικό αξίας 50000;
3. Τι ποσό πρέπει να αποταμιεύετε μάθε μήνα κάθε χρόνο προκειμένου μετά από 10 έτη να έχετε αποθεματικό αξίας 50000;

1. $A_0 = 500,\ i = 0.07$ και t=10

$$V_t = A_0 \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$V_{10} = 500 \frac{(1+0.07)^{10} - 1}{0.07} = 6908.22$$

2. V_{10}=50000,, $i = 0.07,$ t=10

$$50000 = A_0 \frac{(1+0.07)^{10} - 1}{0.07}$$

$$3500 = A_0 \cdot 0.967$$

$$A_0 = 3619.44$$

Παράδειγμα 6 συνέχεια

Τι ποσό πρέπει να αποταμιεύετε κάθε μήνα προκειμένου μετά από 10 έτη να έχετε αποθεματικό αξίας 50000;

V_{10}=50000, $\frac{i}{12} = \frac{0.07}{12}$, t=10, n=10 ·12=120

Από τον τύπο

$$V_t = A_0 \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Έχουμε

$$50000 = A_0 \frac{(1+\frac{0.07}{12})^{120} - 1}{\frac{0.07}{12}}$$

$$291.66 = A_0 \cdot 1.01$$

$$A_0 \cong 288.77$$

Χρήσιμα Θεωρήματα Ι

- **Θεώρημα 1** Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
- **Θεώρημα 2** Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
- **Θεώρημα 3** Κάθε ακολουθία περιέχει μια υπακολουθία η οποία είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Μάλιστα, εάν η ακολουθία συγκλίνει στο a τότε κάθε υπακολουθία της θα συγκλίνει στο a.
- **Θεώρημα 4** Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια τουλάχιστον συγκλίνουσα υπακολουθία.
- **Θεώρημα 5** Το όριο μιας ακολουθίας, εάν αυτό υπάρχει βέβαια, είναι μοναδικό.
- **Θεώρηματα Cauchy-Cauchy-Swartz!!!!**

Χρήσιμα Θεωρήματα ΙΙ

- Θεώρημα 6 Εάν $\lim a_n = \alpha, \lim b_n = b$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\lim\left(a_n \pm b_n\right) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$$

$$\lim\left(kb_n\right) = k\lim b_n = kb$$

$$\lim\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$$

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = a/b$$

$$\lim\left(a_n\right)^M = \left(\lim a_n\right)^M$$

$$\lim M^{a_n} = M^{\lim a_n}$$

$$\text{E}\acute{\alpha}\nu\ a_n \le b_n \le c_n, \forall n, \lim a_n = a, \lim c_n = a \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \lim b_n = a$$

Έννοια Διανυσματικού Χώρου

Ενα μη κενό σύνολο Α σημείων x,y,z τα οποία καλούνται και διανύσματα για τα οποία ισχύουν τα κάτωθι αξιώματα καλέιται διανυσματικός χώρος Παραγωγική Διαδικασία με m εισροές και n προϊόντα. Πως θα παριστάνατε τον χώρο;

$x, y \in A$

$1. x + y = y + x$

$2. (x + y) + z = x + (y + z)$

$3. x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in A$

$4. x + (-x) = 0$

$5. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$6. 1x = x$

$7. (a + b)x = ax + bx$

$8. a(x + y) = ax + ay$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση θα καλείται διανυσματική εάν το πεδίο τιμών της Υ είναι υποσύνολο του R^n

Γενικά μια διανυσματική συνάρτηση $f: X \to R^n, X \subseteq R^n$

Αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του Χ ένα μοναδικό σημείο του R^n

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)) \acute{\eta}$$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

.

.

$$y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Μονοτονία Συνάρτησης

- Μια συνάρτηση θα καλείται αύξουσα εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Μια συνάρτηση θα καλείται γνησίως αύξουσα εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Μια συνάρτηση θα καλείται φθίνουσα εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Μια συνάρτηση θα καλείται γνησίως φθίνουσα εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$$f(x) = e^{-x^2+4x-3}, \ \mu o \nu o \tau o \nu \iota \alpha$$

$$g(x) = \begin{cases} x+4, x \in [-2,1] \\ x^2 - 4x + 7, x \in [1,4] \end{cases}$$

Ακρότατα Συνάρτησης

- Ολικό ή απόλυτο μέγιστο εάν και μόνο εάν ισχύει ότι $\forall x \in \mathrm{X} \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$
- Ολικό ή απόλυτο ελάχιστο εάν και μόνο εάν ισχύει ότι $\forall x \in \mathrm{X} \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$
- Τοπικό μέγιστο εάν και μόνο εάν υπάρχει περιοχή $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \mathrm{X}, \varepsilon$ μικρή θετική ποσότητα:
  $\forall \mathrm{x} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ είναι $f(x) \le f(x_o)$
- Τοπικό ελάχιστο εάν και μόνο εάν υπάρχει περιοχή $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \mathrm{X}, \varepsilon$ μικρή θετική ποσότητα:
  $\forall \mathrm{x} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ είναι $f(x) \ge f(x_o)$

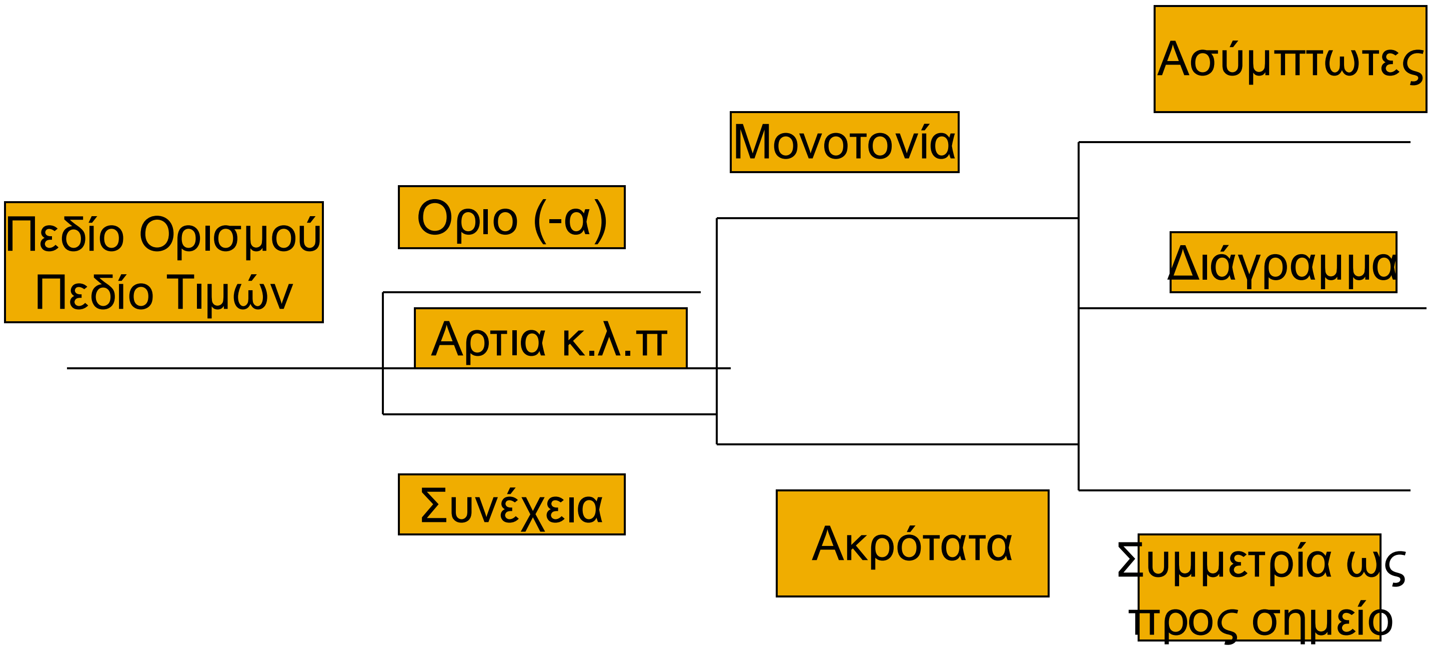
Ορισμοί

- Άρτια Συνάρτηση:Μια συνάρτηση θα καλείται άρτια εάν και μόνο εάν $\forall x \in \mathrm{X},\ f(-x) = f(x)$
- Περιττή Συνάρτηση:Μια συνάρτηση θα καλείται περιττή εάν και μόνο εάν $\forall x \in \mathrm{X},\ f(-x) = -f(x)$
- Περιοδική Συνάρτηση: Μια συνάρτηση θα καλείται περιοδική $\forall x \in \mathrm{X} \Rightarrow x+t \in \mathrm{X},\ f(x+t) = f(x)$

Μπορείτε να δώσετε απλά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων;

$f(x) = x^3 - \sqrt[3]{4-x^2}$, αρτια;

Μελέτη Συνάρτησης



Μελέτη Συνάρτησης

Απαραίτητη θεωρείτε η γνώση βασικών συναρτήσεων όπως:

$$1.\ f(x) = e^{x}$$

$$2.\ f(x) = ab^{cx}$$

$$3.\ f(x) = \log x,\ g(x) = \ln x$$

Εύρεση Πεδίου Ορισμού

- Πολυωνυμικές-Εκθετικές Συναρτήσεις:Το R.
- Ρητές Συναρτήσεις: Ο παρανομαστής της ρητής συνάρτησης θα πρέπει να είναι διαφορετικός του 0.
- Άρρητη: Η υπόριζη ποσότητα θα πρέπει να
- είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0.
- Λογαριθμική: Το πεδίο τιμών αποτελείται από όλες τις τιμές όπου $f(x) = \log_a g(x), a > 0$ με $g(x) > 0$

Έννοια Μετρικού Χώρου

Ας θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο A={x,y,w,z}. Ποια είναι η απόσταση ανάμεσα στα x,y ή στα w,z; Έννοια απόστασης (π.χ ευκλείδεια) στην οποία στηριζόμαστε για να αναπτύξουμε την έννοια χώρος. Η απόσταση (distance) χαρακτηρίζεται ως ένα πραγματικός αριθμός και συμβολίζεται d=(x,y). Π.χ Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η απόσταση που ορίζεται ως $d(x,y)=|x-y|$

$$d(x,y)=\begin{cases}1, x=y\\ 2, x\neq y\end{cases}$$

Έννοια Μετρικού Χώρου (Συνέχεια..)

- Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$d(x,x)=0$$

$$d(x,y)>0,\ \text{εάν x} \neq \text{y}$$

$$d(x,y)=d(y,x)\ (\text{συμμετρία})$$

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)\ (\text{τριγωνική ανισότητα})$$

- Το σύνολο (A,d) καλείται μετρικός χώρος και απαρτίζεται απο ένα μη κενό σύνολο σημείων και μια μετρική.

ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ

$$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)\in R^N$$

1.$x=y$ οταν $x_1=y_1,x_2=y_2,\ldots,x_n=y_n$

2.$(x+y)=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n\right)$

3.$\alpha x=\left(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n\right)$

4.$x-y=x+\left(-1\right)y$

5.$0=\left(0,0,\ldots,0\right)$

6.Εσωτερικο γινομενο

$$x\bullet y=\sum_{i=1}^{n}x_1y_1+x_2y_2++x_ny_n$$

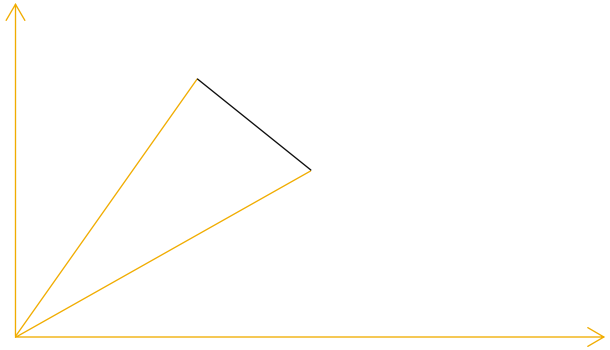
$$\|x\|\geq 0\wedge\|x\|=0\Rightarrow x=0$$

$$\|ax\|=|a|\|x\|$$

$$\|x-y\|=\|y-x\|$$

$$\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$$

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$



$$d(x,y)\equiv\|x\|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

Βασικές Έννοιες Τοπολογίας

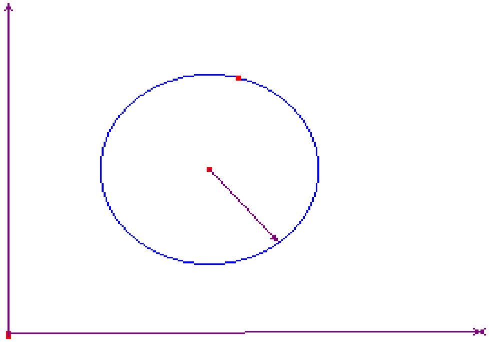
Ανοιχτά Σύνολα

Έστω $a \in R^N, r \in R_+$

Το σύνολο των σημείων x όπου

$$\|x - a\| < r$$

ονομάζεται ν διάστατη σφαίρα



Μια ανοιχτή σφαίρα με ακτίνα ε και κέντρο x καλείται περιοχή.

Παραδείγματα;

Βασικές Έννοιες Τοπολογίας

Κλειστό Σύνολο

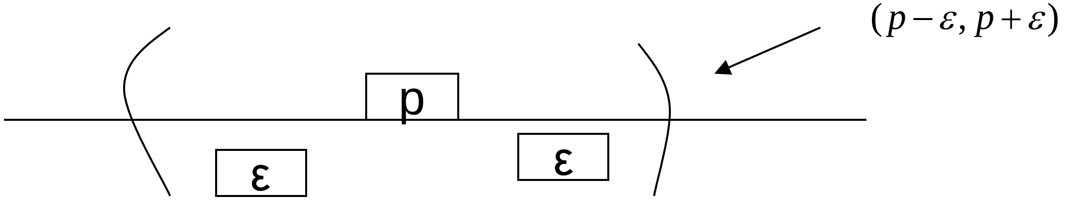
Ένα σύνολο A στον R^N θα καλείται κλειστό εάν το συμπλήρωμα του $R^N - A$ είναι ανοιχτό

Ένα σύνολο A στον R^N θα καλείται φραγμένο εάν υπάρχουν r>ο και α τέτοια ώστε το A θα βρίσκεται μέσα στην σφαίρα B(a,r)

Ένα σύνολο A στον R^N θα καλείται συμπαγές εάν είναι κλειστό και φραγμένο.

Έννοια Περιοχής

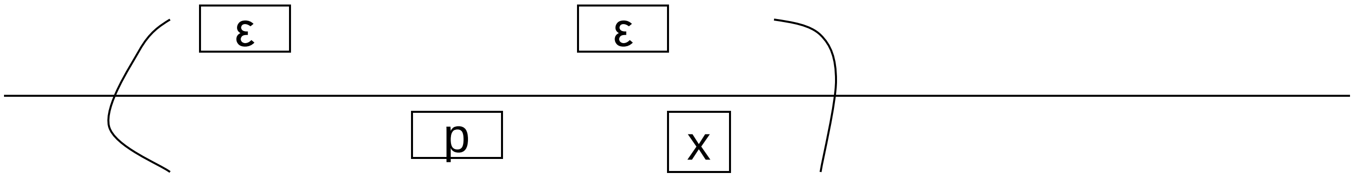
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μη κενό σύνολο σημείων A στον Ευκλείδειο μετρικό χώρο και θεωρούμε ένα σημείο p που ανήκει στον χώρο αυτόν.
Το σύνολο όλων των σημείων x που ανήκουν στον A όπου ισχύει $d(p,x) < \varepsilon, \varepsilon > 0$ ονομάζεται περιοχή του σημείου p.



(Παραδείγματα;)

Σημείο Συσσώρευσης

Ας θεωρήσουμε ένα υποσύνολο Β του προηγούμενου συνόλου Α και το σημείο p που ανήκει στο σύνολο Α. Το σημείο p μπορεί να ανήκει ή όχι στο σύνολο Β. Κατασκευάζουμε μια περιοχή N(p,ε) και παίρνουμε σημείο x που ανήκει στο N και στο σύνολο Β. Μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο αριθμό σημείων ανάμεσα στο x και p.



Σημείο Συσσώρευσης (συνέχεια…)

Ας θεωρήσουμε καινούργιο ε το ε’ και κατασκευάζουμε μια περιοχή N(p,ε’). Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία βρίσκοντας καινούργιο άπειρο αριθμό σημείων ανάμεσα στο χ’ και στο p. Αλλάζοντας ε παίρνουμε άπειρο αριθμό σημείων γύρω από το p.

Το σημείο p καλείται σημείο συσσώρευσης εάν κάθε περιοχή του p περιέχει τουλάχιστον ένα διαφορετικό σημείο του B διαφορετικό από το p.

Παράδειγμα: $Z = \{x : a \leq x \leq b\}, L = \{x : a < x < b\},$

Όριο Συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε δύο μετρικούς χώρους (S,ds) και (T,d_T). Έστω επίσης μια συνάρτηση f από το A στο T με A υποσύνολο του T, p σημείο συσσώρευσης και β να ανήκει στο σύνολο T. Θα λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο p είναι β (ή ότι η f προσεγγίζει το β καθώς το x προσεγγίζει το p) όταν:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : d_T(f(x), b) < \varepsilon \text{ για x} \in \text{A με } d_s(x,p) < \delta$$

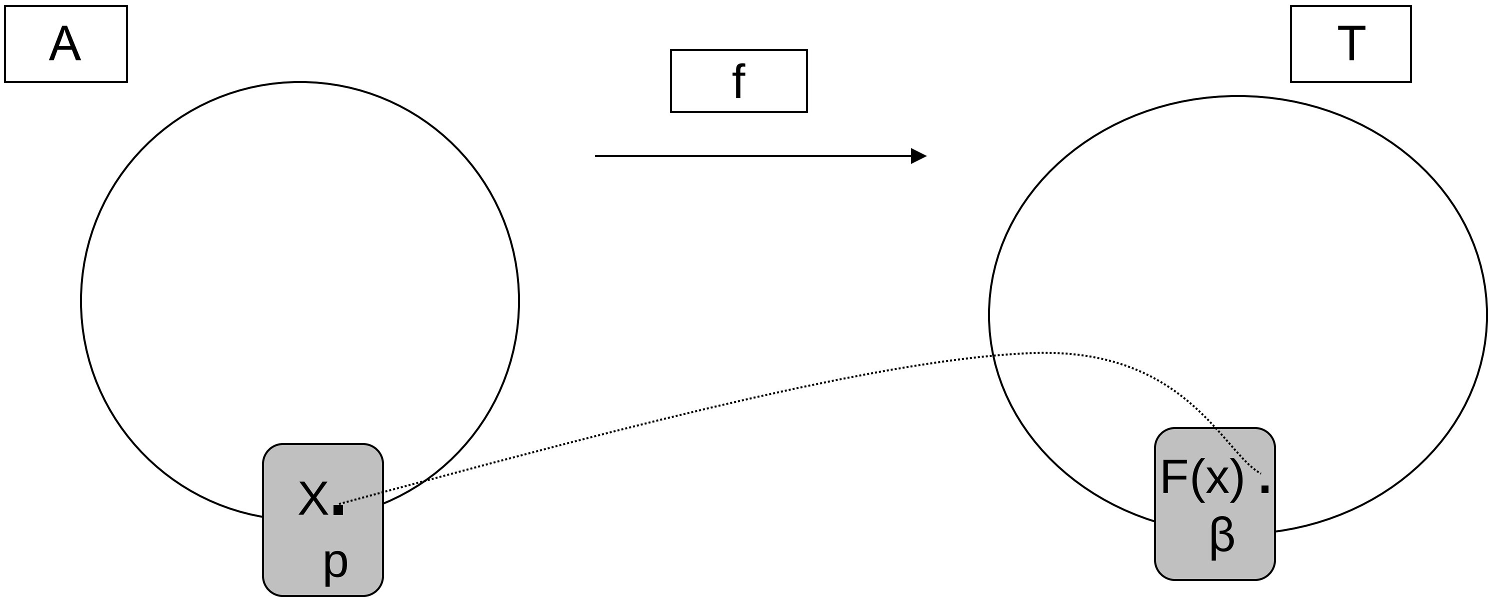
$$\lim_{x\to p} f(x) = \beta$$

$$\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma$$

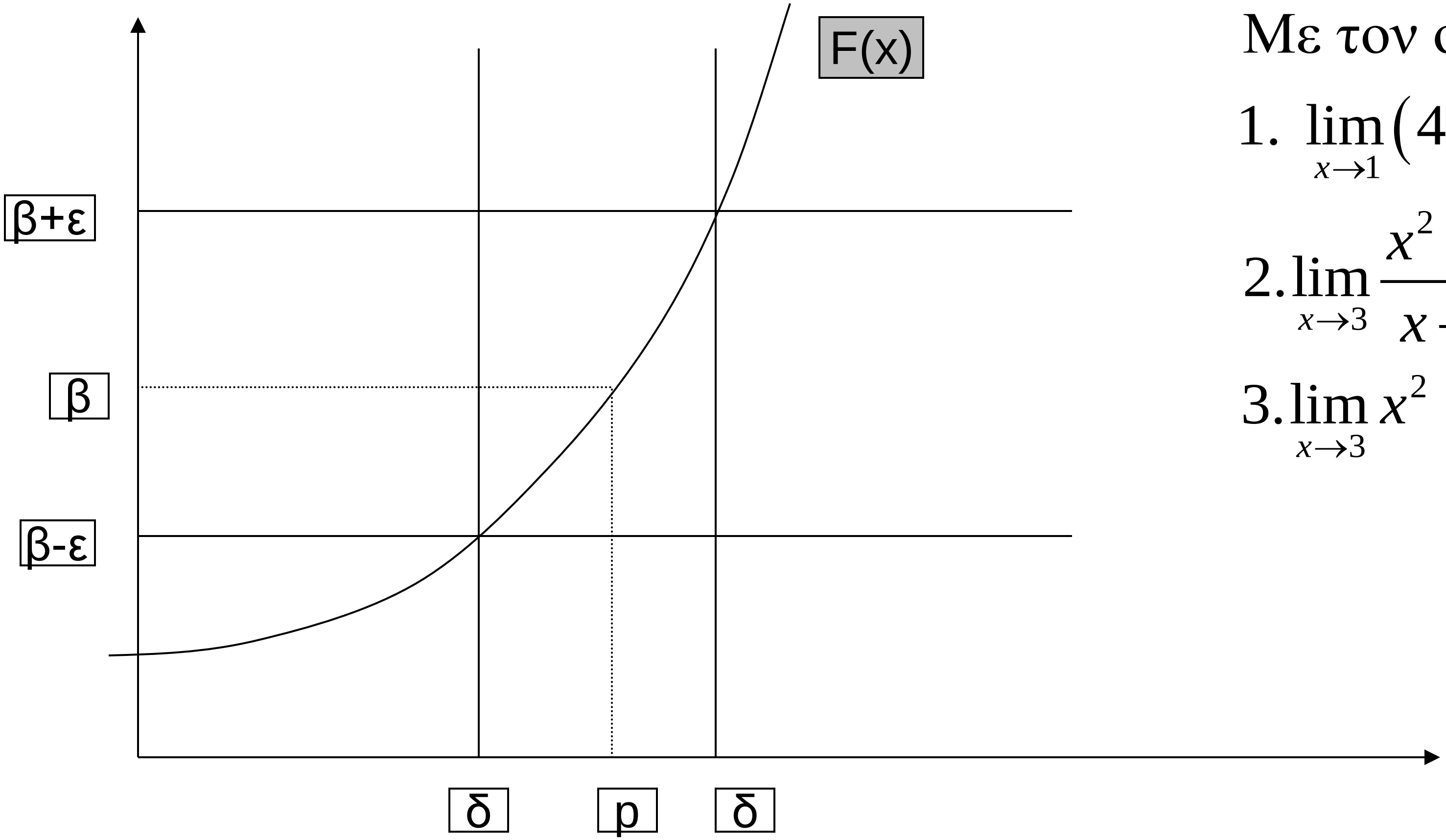
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \left| f(x) - \beta \right| < \varepsilon \text{ για x} \in \text{A με } 0 < \left|\text{x-p}\right| < \delta$$

$$\lim_{x\to p} f(x) = \beta$$

Όριο Συναρτήσεων



Γραφική Παράσταση Ορίου



Με τον ορισμο

1. $\lim_{x \to 1}(4x-1)$

2. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

3. $\lim_{x \to 3} x^2$

Όριο Συναρτήσεων (Συνέχεια..)

Το όριο της συνάρτησης f(x) είναι ο αριθμός Α όταν η x τείνει στο α, εάν η f(x) τείνει στο Α καθώς η η x τείνει προς το p (αλλά δεν ισούται με αυτό), δηλ. $\lim_{x \to p} f(x) = A$

Κανόνες Ορίων (Πραγματικές Συναρτήσεις)

- Αν $\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$ και $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \mathrm{B}$
- i. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) + g(x)] = A + B$
- ii. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) - g(x)] = A - B$
- iii. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) * g(x)] = A * B$
- iv. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) / g(x)] = A / B$ (με $B \neq 0$)
- v. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)]^{\alpha/\beta} = A^{\alpha/\beta}$
- Vi. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)]^n = A^n$
- Vii. $\lim_{x\to\alpha}|f(x)| = |A|$
- Π.Χ

$$\lim_{x\to 5}\left|4x^2 + 2x + 5\right|, \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k, \lim_{x\to\xi} ax^k = a\xi^k, \lim_{x\to\infty} x^k = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k = +\infty, k \text{ αρτιος}, \lim_{x\to-\infty} x^k = -\infty, k \text{ περιτος}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi, \lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi$$

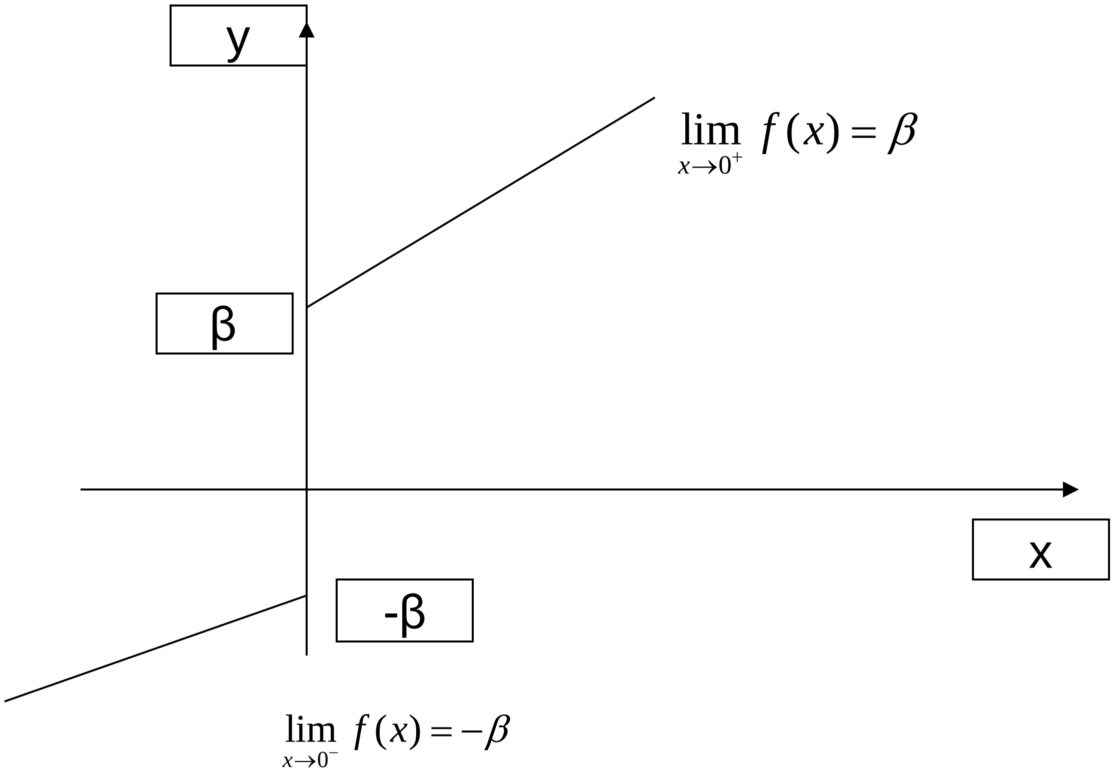
$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi, \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ όταν α>1}$$

$$\text{Εάν } 0<\text{α}<1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\xi} \log x = \log\xi, \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

Πλευρικά Όρια-Όρια στο άπειρο

Στον ορισμό του ορίου δεν θέσαμε περιορισμό για το πως το x θα πλησιάσει το ρ.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{|x+2|(x-2)},\ \lim_{x\to o}\frac{\sin x^2}{x},\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-1}-x\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{|x|+1},$$

$$\text{E}\acute{\alpha}\nu \lim_{x\to 1} f(x)=8 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|}{f(x)^2+1}=?$$

Παράδειγμα στα οικονομικά 1

Μια ασφαλιστική εταιρεία αμείβει του ασφαλιστές εργαζόμενους με 1000 ευρώ το μήνα συν προμήθεια 9% για κάθε συμβόλαιο ζωής που συντάσσουν. Παράλληλα υπάρχει και ένα πριμ αποδοτικότητας της τάξης των 600 ευρώ ανά μήνα εάν ξεπεράσει τις 15000 Ευρώ. Πως θα παριστάνατε την συνάρτηση μισθού; Είνα αυτή συνεχής;

Παράδειγμα στα οικονομικά 2

Έστω ότι η συνάρτηση κέρδους μιας επιχείρησης $\Pi(q)=(500q-200)/q$, q ο αριθμός των μονάδων παραγωγής. Υπάρχει κάποιο ανώτατο όριο στα κέρδη της επιχείρησης; (*χρησιμοποιείστε ασύμπτωτη*).

Τι να διαβάσω

- Κεφάλαιο Τρίτο Jacques
- Κεφάλαιο Πρώτο-Δευτερο Ξεπαπαδέας
- Κεφάλαια 9-10 Λουκάκης
- Σημειώσεις e-class για ακολουθίες
- Κεφάλαια 10-12 από βιβλίο Κάλλιπου https://repository.kallipos.gr/handle/11419/11487
- Σημειώσεις από το http://eclass.upatras.gr

Θεωρία και ασκήσεις

(https://eclass.upatras.gr/courses/ECON1240/)

Επικοινωνία με Διδάσκοντα

- E-mail:Kounetas@upatras.gr
- Ώρες Γραφείου

Τρίτη 11.00-13.00

Τετάρτη 09:00-10:00

(*Η κατόπιν επικοινωνίας με τον διδάσκοντα*)