

**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ**  
**ΑΚ. ΕΤΟΣ 2024-2025**

Μαθηματικά για Οικονομολόγους I-Μάθημα 1 Εισαγωγή &  
Βασικές Έννοιες.

Διδάσκων: Κουνετάς Η. Κωνσταντίνος Αναπληρωτής Καθηγητής ΤΟΕ

# ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ Ι

- Οδηγός Σπουδών

[https://www.econ.upatras.gr/wp-content/uploads/sites/94/2024/09/ΤΟΕ-ΟΔΗΓΟΣ-ΣΠΟΥΔΩΝ-ΕΛΛΗΝΙΚΟΣ-2024-2025\\_v4.pdf](https://www.econ.upatras.gr/wp-content/uploads/sites/94/2024/09/ΤΟΕ-ΟΔΗΓΟΣ-ΣΠΟΥΔΩΝ-ΕΛΛΗΝΙΚΟΣ-2024-2025_v4.pdf)

- Ιστοσελίδα Μαθήματατος

<https://eclass.upatras.gr/courses/ECON1240/>  
(ΕΓΓΡΑΦΗ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ)

- Συγράμματα ΕΥΔΟΞΟΣ

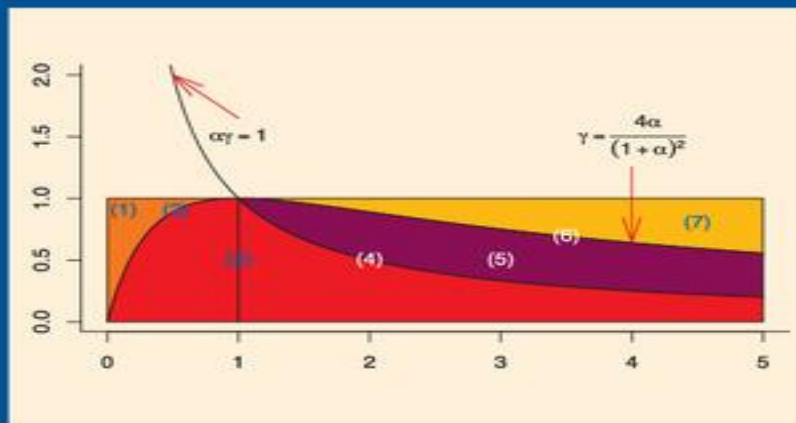
<https://service.eudoxus.gr/public/departments/courses/1316/2022>

# ΒΑΣΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Γ. Σ. Ανδρουλάκης, Μ. Καίσαρη, Κ. Κουνετάς,  
Γ. Μανουσάκης, Ι. Α. Νίκας, Δ. Παπαδόπουλος

## Μαθηματικά για Οικονομικές Επιστήμες και Διοίκηση Επιχειρήσεων

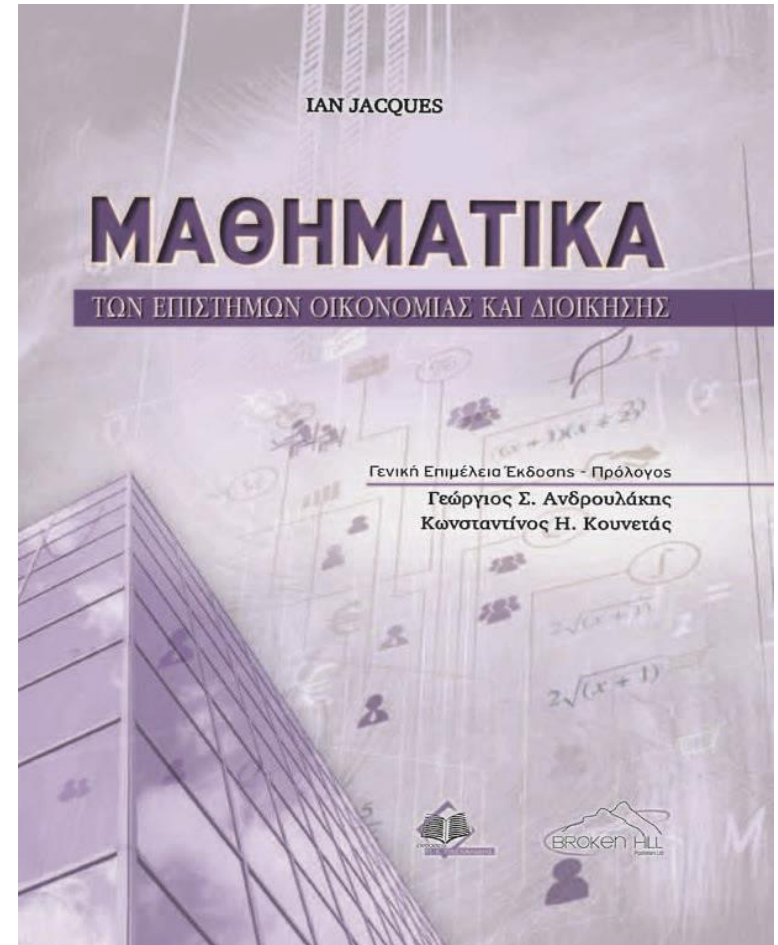
Εφαρμογές και παραδείγματα με το R



ΕΛΛΗΝΙΚΗ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ  
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



Επιστήμη  
Παραγωγή  
Ανάπτυξη  
2021-2028



<https://repository.kallipos.gr/handle/11419/11487>



# ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ II

- Εξετάσεις (Τελική Εξέταση καθώς και μια ενδιάμεση)
- Εργασίες ( σε συνεννόηση με τον διδάσκοντα)
- Λογισμικό που θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω:
  - Mathematica,
  - Matlab,
  - R (<https://www.r-project.org/>)

# ΥΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

- Θεωρία συνόλων, προτάσεις, καρτεσιανό γινόμενο, διμελείς σχέσεις, έννοια συνάρτησης.
- Ορια συναρτήσεων.
- Συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (συνέχεια, παράγωγοι, ακρότατα, θεωρήματα μέσης τιμής).
- Ολοκληρωτικός λογισμός (αόριστο ολοκλήρωμα, ορισμένο ολοκλήρωμα, γενικευμένο ολοκλήρωμα).
- Ακολουθίες και σειρές αριθμών, δυναμοσειρές.
- Εφαρμογές στην Οικονομική Επιστήμη.



=



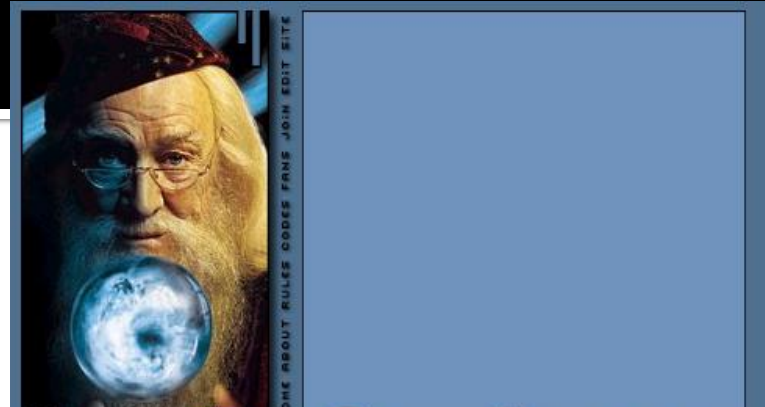
muggle

SPSS and SAS users are like muggles. They are limited in their ability to change their environment. They have to rely on algorithms that have been developed for them. The way they approach a problem is constrained by how SAS/SPSS employed programmers thought to approach them. And they have to pay money to use these constraining algorithms.





=



wizard

R users are like wizards. They can rely on functions (spells) that have been developed for them by statistical researchers, but they can also create their own. They don't have to pay for the use of them, and once experienced enough (like Dumbledore), they are almost unlimited in their ability to change their environment.



R was created in the 1990s by **R**oss Ihaka and **R**obert Gentleman

R was based on S, with code written in C

S largely was used to make good graphs – not an easy thing in 1975. R, like S, is quite good for graphing. For lots of examples, see <http://rgraphgallery.blogspot.com/>

or <http://www.r-graph-gallery.com>

See [ggplot2-cheatsheet-2.0.pdf](#)

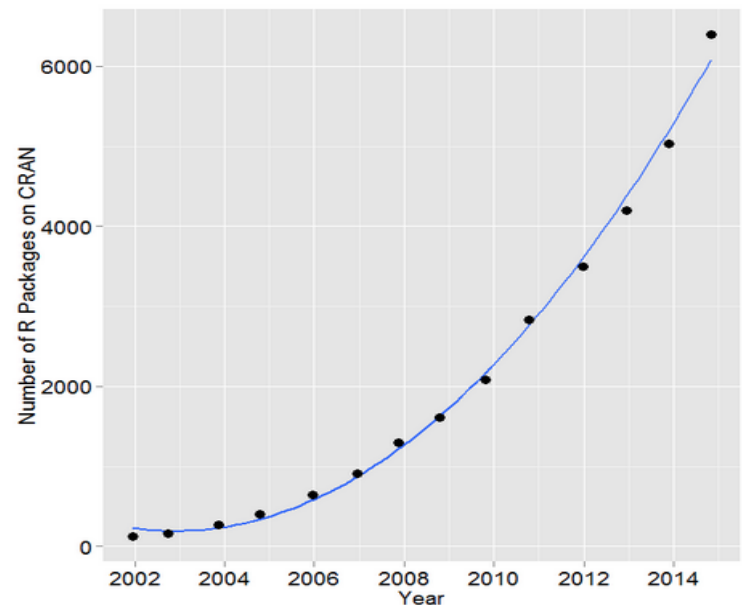


Figure 9. Number of R packages available on its main distribution site for the last version released in each year.

# Getting Started-Installing R

- To install R on your MAC or PC you first need to go to <http://www.r-project.org/>.



About R  
[What is R?](#)  
[Contributors](#)  
[Screenshots](#)  
[What's new?](#)

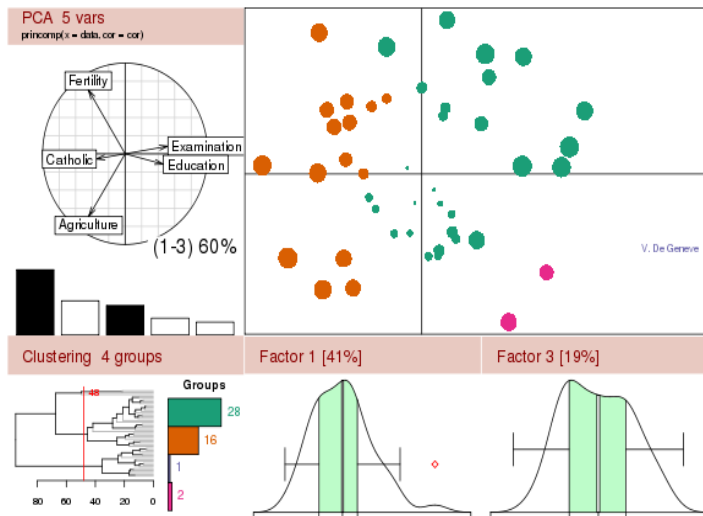
Download, Packages  
[CRAN](#)

R Project  
[Foundation](#)  
[Members & Donors](#)  
[Mailing Lists](#)  
[Bug Tracking](#)  
[Developer Page](#)  
[Conferences](#)  
[Search](#)

Documentation  
[Manuals](#)  
[FAQs](#)  
[The R Journal](#)  
[Wiki](#)  
[Books](#)  
[Certification](#)  
[Other](#)

Misc  
[Bioconductor](#)  
[Related Projects](#)  
[User Groups](#)  
[Links](#)

## The R Project for Statistical Computing



### Getting Started:

- R is a free software environment for statistical computing and graphics. It compiles and runs on a wide variety of UNIX platforms, Windows and MacOS. To [download R](#), please choose your preferred [CRAN mirror](#).
- If you have questions about R like how to download and install the software, or what the license terms are, please read our [answers to frequently asked questions](#) before you send an email.

### News:

- R version 2.15.1** (Roasted Marshmallows) has been released on 2012-06-22.
- [The R Journal Vol.4/1](#) is available.
- [useR! 2012](#), took place at Vanderbilt University, Nashville Tennessee, USA, June 12-15, 2012.
- [useR! 2013](#), will take place at the University of Castilla-La Mancha, Albacete, Spain, July 10-12 2013. .



## The Comprehensive R Archive Network

- CRAN
- [Mirrors](#)
- [What's new?](#)
- [Task Views](#)
- [Search](#)
- About R
- [R Homepage](#)
- [The R Journal](#)
- Software
- [R Sources](#)
- [R Binaries](#)
- [Packages](#)
- [Other](#)
- Documentation
- [Manuals](#)
- [FAQs](#)
- [Contributed](#)

**Download and Install R**

Precompiled binary distributions of the base system and contributed packages, **Windows and Mac** users most likely want one of these versions of R:

- [Download R for Linux](#)
- [Download R for MacOS X](#)
- [Download R for Windows](#)

R is part of many Linux distributions, you should check with your Linux package management system in addition to the link above.

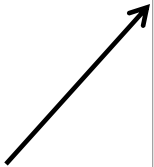
**Source Code for all Platforms**

Windows and Mac users most likely want to download the precompiled binaries listed in the upper box, not the source code. The sources have to be compiled before you can use them. If you do not know what this means, you probably do not want to do it!

- The latest release (2012-06-22, Roasted Marshmallows): [R-2.15.1.tar.gz](#), read [what's new](#) in the latest version.
- Sources of [R alpha and beta releases](#) (daily snapshots, created only in time periods before a planned release).
- Daily snapshots of current patched and development versions are [available here](#). Please read about [new features and bug fixes](#) before filing corresponding feature requests or bug reports.
- Source code of older versions of R is [available here](#).
- Contributed extension [packages](#)

**Questions About R**

- If you have questions about R like how to download and install the software, or what the license terms are, please read our [answers to frequently asked questions](#) before you send an email.



### R-2.15.1 for Windows (32/64 bit)

[Download R 2.15.1 for Windows](#) (47 megabytes, 32/64 bit)

[Installation and other instructions](#)

[New features in this version](#)



- CRAN
- [Mirrors](#)
- [What's new?](#)
- [Task Views](#)
- [Search](#)
- About R
- [R Homepage](#)
- [The R Journal](#)
- Software
- [R Sources](#)
- [R Binaries](#)
- [Packages](#)
- [Other](#)
- Documentation
- [Manuals](#)
- [FAQs](#)
- [Contributed](#)

If you want to double-check that the package you have downloaded exactly matches the package distributed by R, you can compare the [md5sum](#) of the .exe to the [true fingerprint](#). You will need a version of md5sum for windows: both [graphical](#) and [command line versions](#) are available.

#### Frequently asked questions

- [How do I install R when using Windows Vista?](#)
- [How do I update packages in my previous version of R?](#)
- [Should I run 32-bit or 64-bit R?](#)

Please see the [R FAQ](#) for general information about R and the [R Windows FAQ](#) for Windows-specific information.

#### Other builds

- Patches to this release are incorporated in the [r-patched snapshot build](#).
- A build of the development version (which will eventually become the next major release of R) is available in the [r-devel snapshot build](#).
- [Previous releases](#)

Note to webmasters: A stable link which will redirect to the current Windows binary release is [<CRAN MIRROR>/bin/windows/base/release.htm](#).

Setup - R for Windows 2.15.1

**Information**

Please read the following important information before continuing.

When you are ready to continue with Setup, click Next.

GNU GENERAL PUBLIC LICENSE  
Version 2, June 1991

Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc.  
51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA  
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies  
of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The licenses for most software are designed to take away your freedom to share and change it. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change free software--to make sure the software is free for all its users. This General Public License applies to most of the Free Software

< Back   Next >

Setup - R for Windows 2.15.1

**Select Destination Location**

Where should R for Windows 2.15.1 be installed?

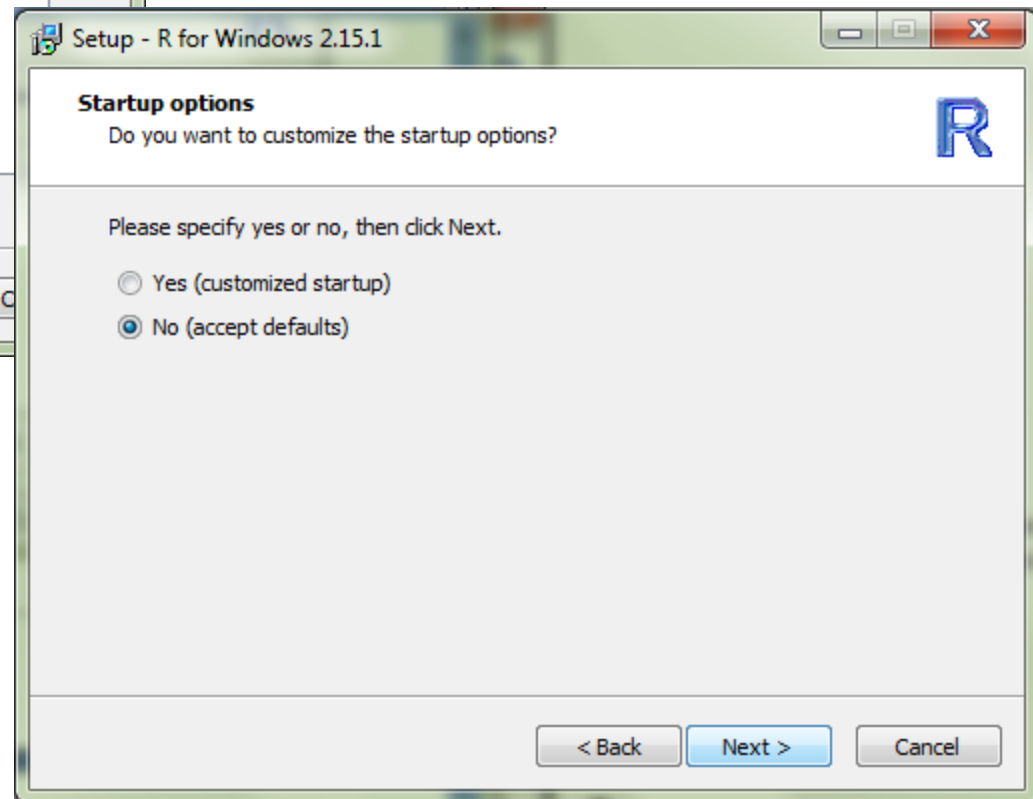
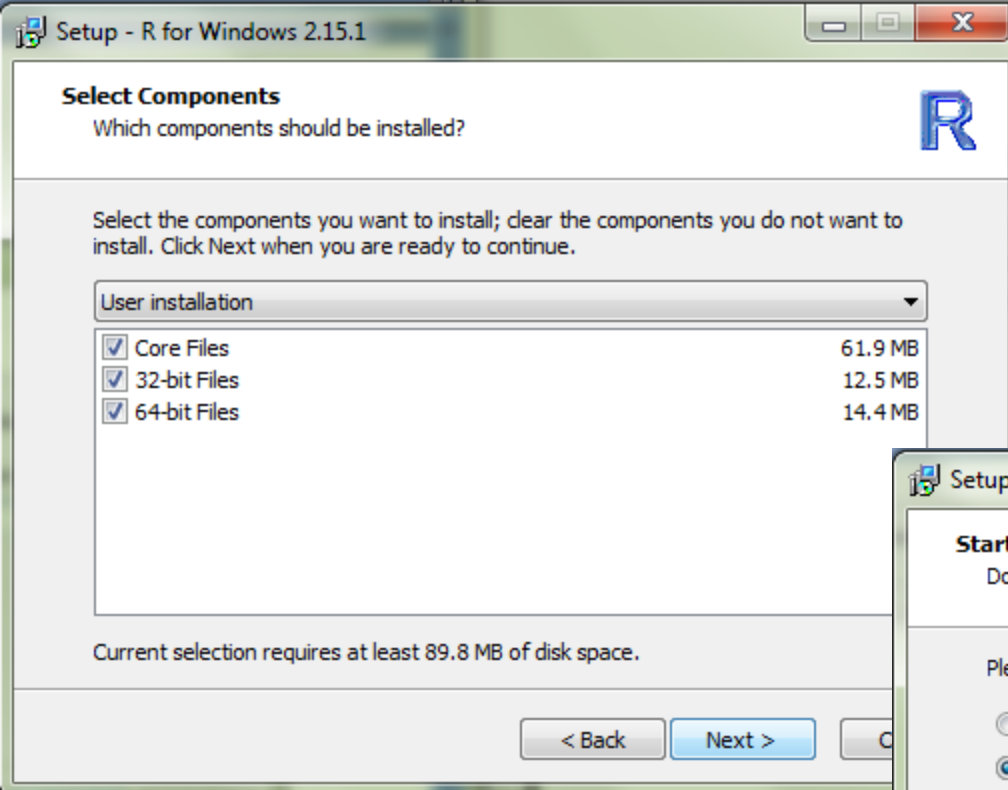
Setup will install R for Windows 2.15.1 into the following folder.

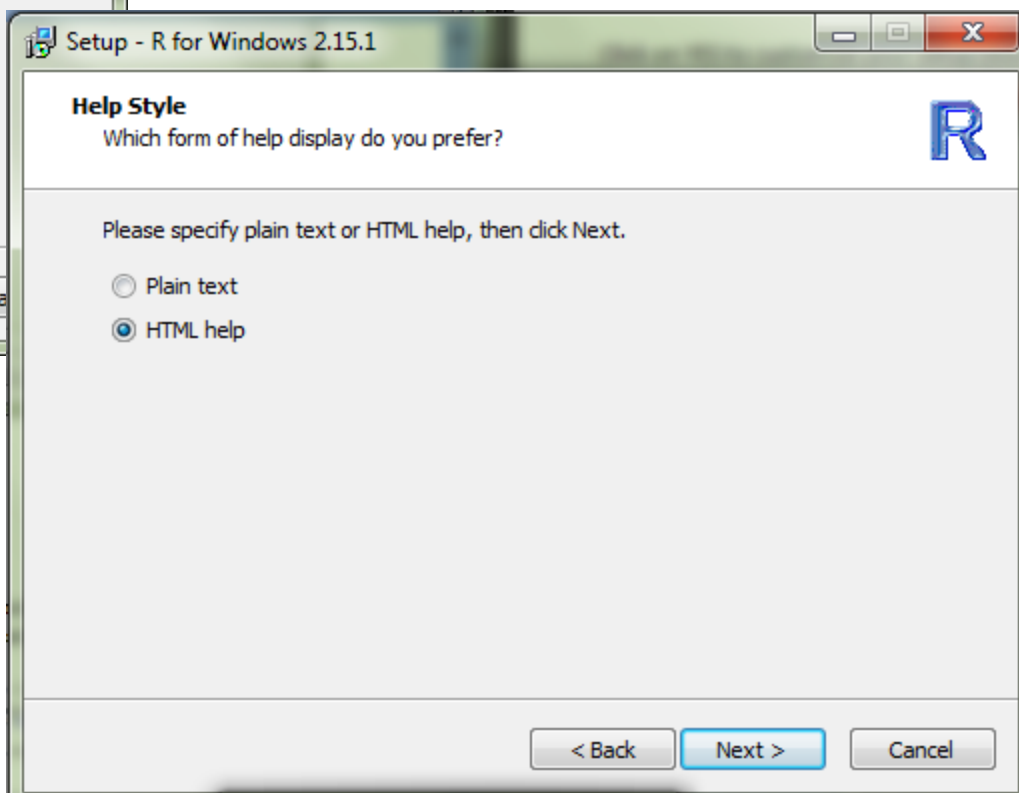
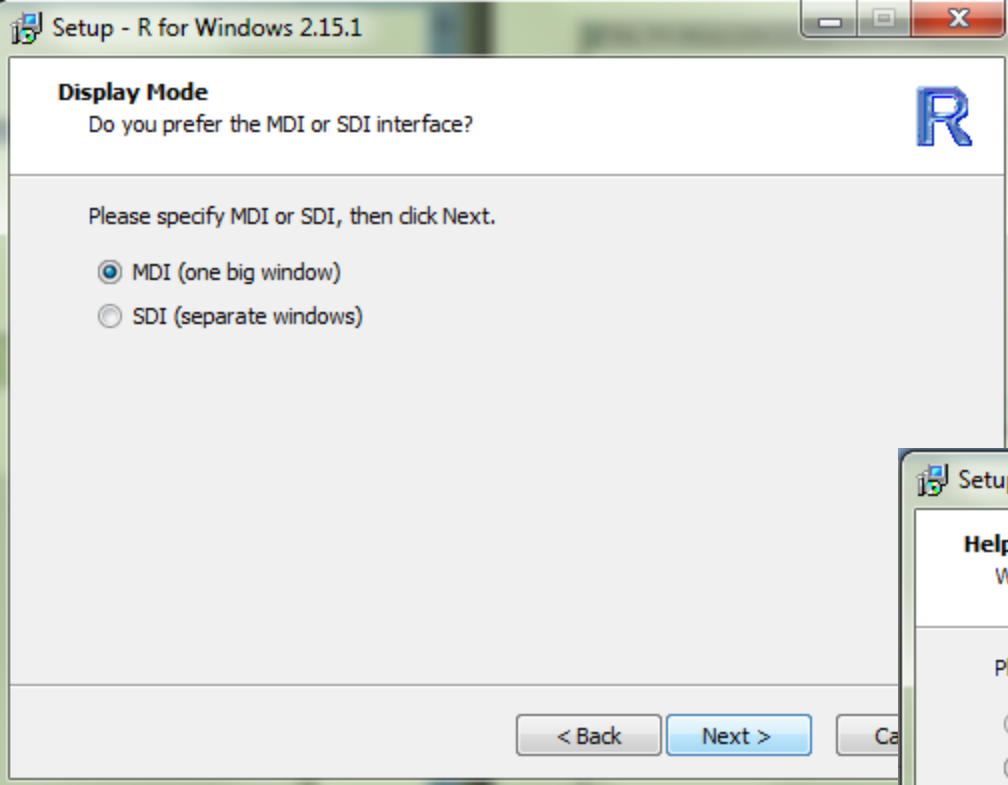
To continue, click Next. If you would like to select a different folder, click Browse.

C:\Program Files\R\R-2.15.1   Browse...

At least 1.2 MB of free disk space is required.

< Back   Next >   Cancel





Setup - R for Windows 2.15.1

### Select Additional Tasks

Which additional tasks should be performed?

Select the additional tasks you would like Setup to perform while installing R for Windows 2.15.1, then click Next.

Additional icons:

- Create a desktop icon
- Create a Quick Launch icon

Registry entries:

- Save version number in registry
- Associate R with .RData files

< Back   Next >

Setup - R for Windows 2.15.1

### Installing

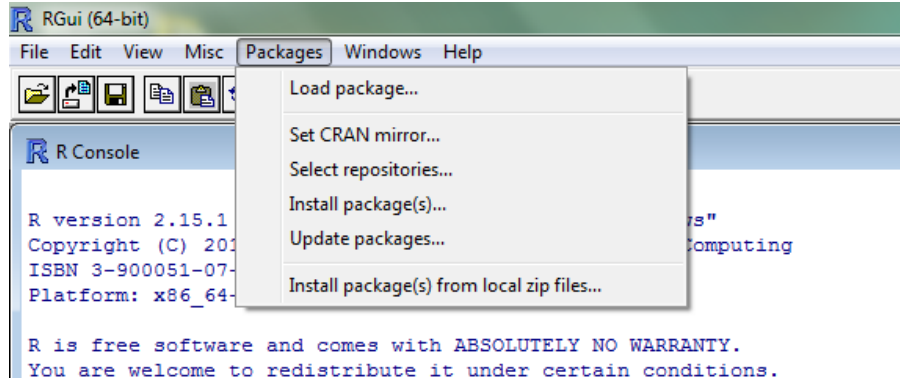
Please wait while Setup installs R for Windows 2.15.1 on your computer.

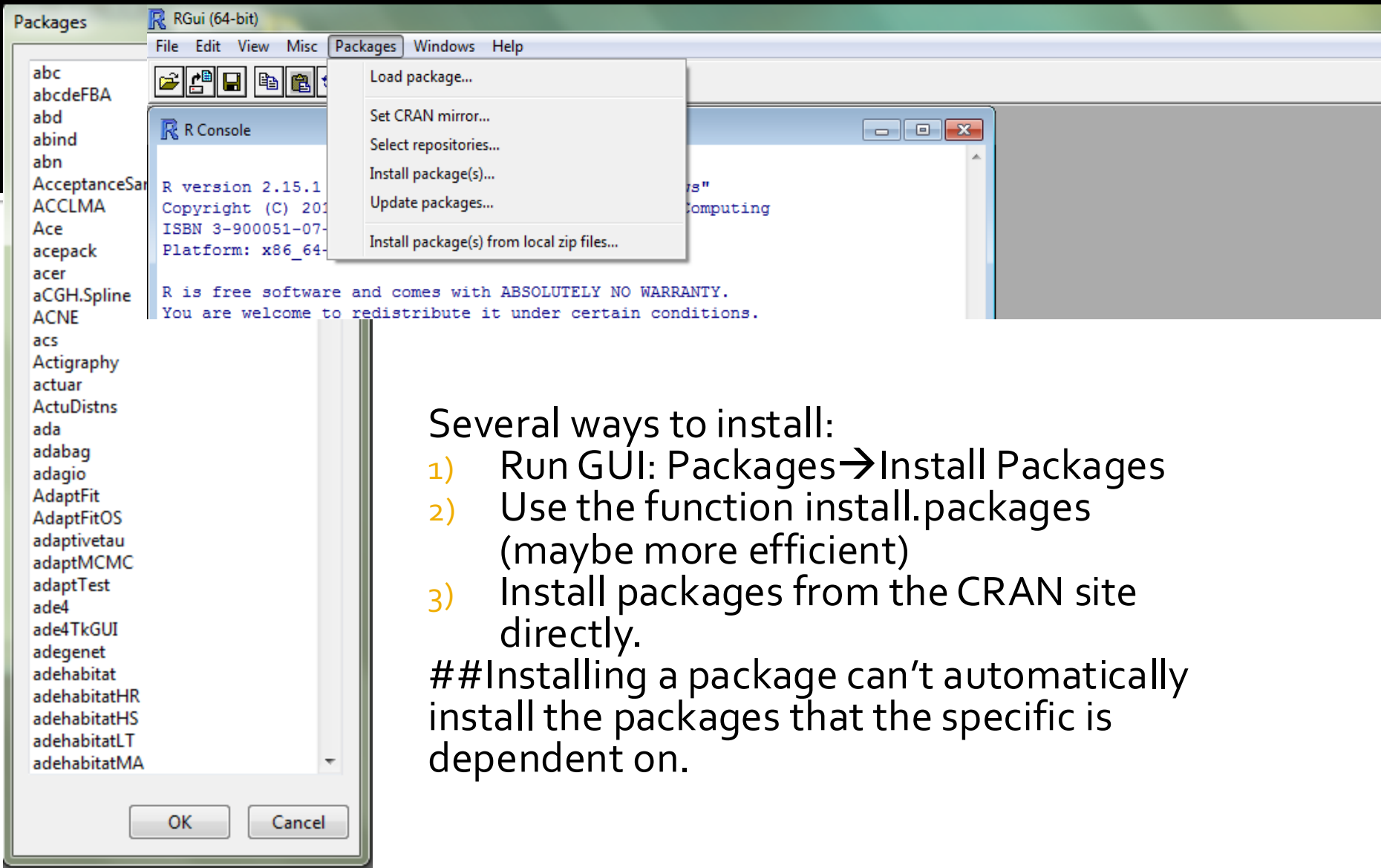
Extracting files...  
C:\Program Files\E\R-2.15.1\bin\x64\Rlapack.dll

Cancel



# Installing Packages I





Several ways to install:

- 1) Run GUI: Packages → Install Packages
- 2) Use the function `install.packages` (maybe more efficient)
- 3) Install packages from the CRAN site directly.

## Installing a package can't automatically install the packages that the specific is dependent on.

# Installing Packages II

# R STUDIO-FRIENDLIER TO STUDENTS

- <https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>
- Online R Studio  
[https://rstudio.cloud/content/yours?sort=name\\_asc](https://rstudio.cloud/content/yours?sort=name_asc)

# Why Mathematics in Economics?

1. Make use of the existing human capital,
2. Attain scientific respectability,
3. Help assure security with respects to claims of truth,
4. To understand Western economic behavior (Katzner, 2003, *Journal of Post Keynesian Economics* 25(4) 561-572.)

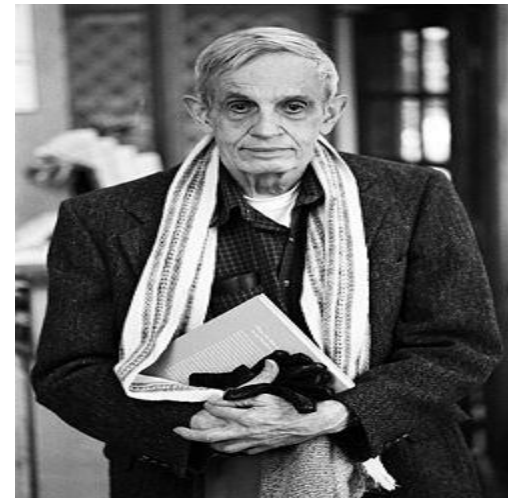
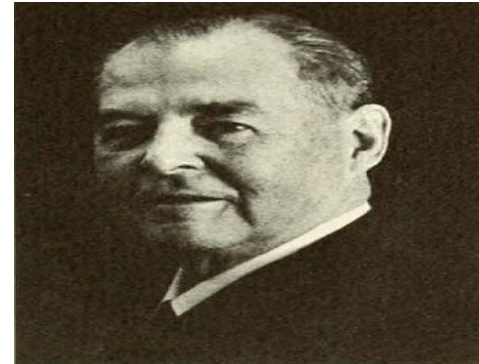
# Famous mathematicians in Economics I

- [Augustin Cournot](#) ([Cournot duopoly](#))
- [Léon Walras](#) ([general competitive equilibrium.](#) )
- Francis Ysidro Edgeworth ([Edgeworth Box](#))
- [John von Neumann](#), [John Forbes Nash, Jr.](#)  
(game theory)

# Famous mathematicians in Economics I

- **Harold Hotelling**
- [John Forbes Nash](#) (non-zero sum game equilibrium)  
Ωστόσο υπάρχει και ο αντίλογος

([Karl Popper](#) discussed the scientific standing of economics in the 1940s and 1950s. He argued that mathematical economics suffered from being tautological or economic theory itself has been continuously more abstract and mathematical (Stigler, 1996) )  
(Gruber and Boland 1986 vs Greenaway, 1990)



# Famous mathematicians in Economics II

## Kenneth Arrow

- In what he named the General Impossibility Theorem, he theorized that it was impossible to formulate a social preference ordering that satisfies all of the following conditions:
- **Nondictatorship:** The preferences of an individual should not become the group ranking without considering the preferences of others.
- **Individual Sovereignty:** each individual should be able to order the choices in any way and indicate ties
- **Unanimity:** If every individual prefers one choice to another, then the group ranking should do the same
- **Freedom From Irrelevant Alternatives:** If a choice is removed, then the others' order should not change
- **Uniqueness of Group Rank:** The method should yield the same result whenever applied to a set of preferences. The group ranking should be transitive

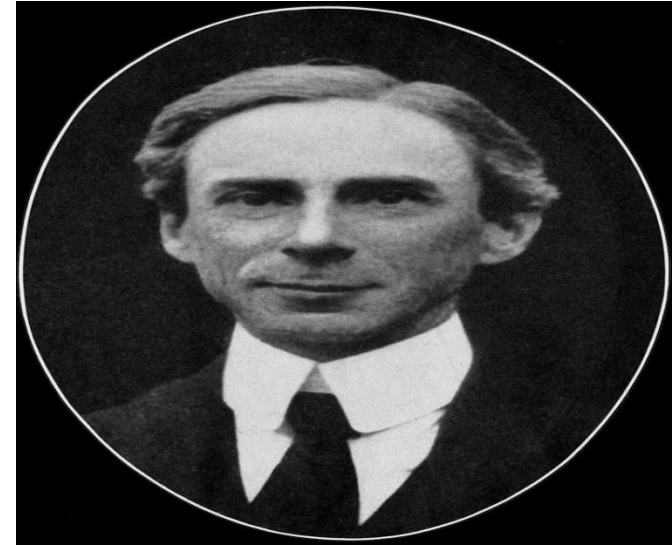




# Famous mathematicians in Economics

## III

- Bertrand Russell
- "Principia Mathematica" (1903), "Τα προβλήματα της φιλοσοφίας" (1912), "Οι γνώσεις μας για τον εξωτερικό κόσμο και οι επιστημονικές μέθοδοι" (1914), "Ο δρόμος προς την ελευθερία: Σοσιαλισμός, αναρχία και συνδικαλισμός" (1918), "Μυστικισμός και λογική" (1918),



# Nobel Prizes in Economics!!

- 1950: Bertrand Rusell (literature)
- 1972: Kenneth Arrow (economics)
- 1994: John Forbes Nash (economics)
- 2003: Clive W. J. Granger (economics)
- 2005: Robert J. Autmann, Thomas C. Schelling (economics)

# Στόχοι του Μαθήματος

- Μελέτη της Θεωρίας και κατανόηση της (π.χ διαφορικός & ολοκληρωτικός λογισμός).
- Εφαρμογές σε οικονομικά προβλήματα και συσχέτιση των μαθηματικών με την οικονομική θεωρία.

# Μαθηματικό Υπόδειγμα

- Μια ή και περισσότερες εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν μια οικονομική θεωρία συνιστούν ένα μαθηματικό υπόδειγμα το οποίο αποτελείται από μεταβλητές.
- Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές προκύπτουν από τις εξισώσεις της υποδείγματος καλούνται **ενδογενείς**.
- Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές καθορίζονται από παράγοντες από παράγοντες που δεν ανήκουν στο υπόδειγμα καλούνται **εξωγενείς**.
- Ένα τέτοιο υπόδειγμα αποτελείται από μεταβλητές σταθερές αλλά και μεταβαλλόμενες.
- Γενικά θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για τριών διαφορετικών ειδών εξισώσεις: Ταυτότητες, Συμπεριφοράς και Ισορροπίας.

# Βασική Μαθηματική Λογική

- Μια πρόταση που περιέχει μια ή περισσότερες μεταβλητές και μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής.
- Όταν λέμε ότι από την πρόταση  $p$  συνεπάγεται η πρόταση  $q$  εννούμε ότι εάν η πρόταση  $p$  είναι αληθής τότε και η  $q$  είναι αληθής.
- Η λογική πρόταση όχι ( $\neg p$ ) ορίζεται να είναι αληθής όταν η λογική πρόταση είναι ψευδής και αντίστροφα.
- Εάν για δύο λογικές προτάσεις  $p, q$  έχουμε ότι  $p$  συνεπάγεται  $q$  τότε ισχύει ότι όχι ( $\neg p$ ) συνεπάγεται όχι ( $\neg q$ ).
- Δύο λογικές προτάσεις καλούνται ισοδύναμες εάν αληθεύουν ταυτογχρονα.
- Για δύο λογικές προτάσεις  $p, q$ : Η λογική πρόταση  $p$  και  $q$  είναι αληθής εάν και η  $p$  και η  $q$  είναι αληθής. Επίσης, Η λογική πρόταση  $p$  ή  $q$  είναι αληθής εάν τουλάχιστον μια από τις  $p$  και  $q$  είναι αληθής.
- Θυμηθείτε την **ευθεία απόδειξη** αλλά και την **εις άτοπον απαγωγή**

# Επιχειρήματα

- Η Λογική είναι ένα από τα πρώτα επιστημονικά αντικείμενα με κύριο σκοπό της την ανάλυση και κατανόηση των συλλογισμών ή επιχειρημάτων μας.
- Αυτός ο σκύλος είναι πατέρας
- Αυτός ο σκύλος είναι δικός σου
- Άρα, αυτός ο σκύλος είναι δικός σου πατέρας,
- το οποίο προέρχεται ουσιαστικά από το διάλογο Ευθύδημος του Πλάτωνος.
- Επιχειρήματα όπως το πιο πάνω, που είναι αληθοφανή αλλά λανθασμένα, ο Αριστοτέλης τα αποκάλεσε σοφίσματα.
- Ένα επιχείρημα ονομάζεται **έγκυρο** ή **λογικά ορθό**, αν και μόνο αν το συμπέρασμά του είναι αληθές σε κάθε περίπτωση που όλες οι υποθέσεις του είναι αληθείς.

# Δομή επιχειρήματος

Παραδείγματα προκείμενων φράσεων

- Με δεδομένο ότι...
- Από την στιγμή που...
- Εφόσον...

Παραδείγματα συμπερασματικών φράσεων

- Επομένως...
- Συνεπώς...
- Άρα...
- Κατά συνέπεια...



# ΣΥΜΒΟΛΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\forall$	$\exists$	$\in$	$\underline{\vee}$
Σύζευξη 'και'	Διάζευξη 'ή'	Άρνηση 'όχι'	Συνεπαγωγή Αν...τότε	Ισοδυναμία Αν και μόνο αν	Καθολικός ποσοδείκτης Για κάθε	Υπαρξιακός ποσοδείκτης Υπάρχει	Το σύμβολο του Ανήκει	Αποκλειστική Διάζευξη

# Προτασιακός Λογισμός

- Πρόταση είναι μία **δήλωση** για το νοητό ή τον πραγματικό κόσμο. Μία πρόταση μπορεί να είναι αποκλειστικά αληθής ή ψευδής.
  1. σύζευξη  $\wedge$ : η πρόταση  $p \wedge q$  είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς.
  2. διάζευξη  $\vee$ : η πρόταση  $p \vee q$  είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς.
  3. αποκλειστική διάζευξη  $\oplus$ : η πρόταση  $p \oplus q$  είναι αληθής μόνο στις περιπτώσεις που και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.
  4. άρνηση.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

- Ας θεωρήσουμε δύο προτάσεις  $p$ :  $18 < 25$  και την  $q$ :  $25 < 35$

$p$	$q$	$p$ και $q$	$p$ ή $q$	$q \rightarrow p$
αληθής	αληθής	αληθής	αληθής	αληθής
αληθής	ψευδής	ψευδής	αληθής	ψευδής
ψευδής	αληθής	ψευδής	αληθής	αληθής
ψευδής	ψευδής	ψευδής	ψευδής	αληθής

Σύζευξη  $\wedge$ , Διαζευξη  $\vee$ , Αρνηση  $\neg$ , Συνεπαγωγή  $\Rightarrow$ , Ισοδυναμία  $\Leftrightarrow$

# ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

Εστω  $\Omega$  σύνολο και  $p(x)$  μια φράση που περιέχει το σύνολο καλούμενο μεταβλητή και η οποία μετατρέπεται κάθε φορά που το  $x$  αντικαθίσταται με ένα συγκεκριμένο στοιχείο του  $\Omega$ . Τότε η  $p(x)$  καλείται προτασιακός τύπος μια μεταβλητής με σύνολο αναφορά το  $\Omega$  (είναι σωστά γραμμένο;).

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}, p(x) : x > 2$$

$$\{x \in \Omega : p(x)\} = \{x \in \Omega : x > 2\} = \{2, 3, 4\}$$

# Θεωρία Συνόλων

- Σύνολο (set): Συλλογή σαφώς καθορισμένων και διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων.  
 $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ,  $R = \{x \mid \text{φωνήεν αλφάβητου}\}$ ,  $T = \{x : x > 11\}$
- Στοιχεία (Elements): Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο.
- Πληθικός Αριθμός: Αναφέρεται στον αριθμό των στοιχείων ενός συνόλου.
- Πεπερασμένο (finite) και άπειρο (infinite) σύνολο.
- Κενό Σύνολο  $S = \emptyset$
- ?????? ←  $I = \{x \mid x \text{ ένας ακέραιος αριθμός}\}$

# Θεωρία Συνόλων

- Υποσύνολο (subset): Εάν κάθε στοιχείο ενός συνόλου  $A$  είναι και στοιχείο ενός συνόλου  $B$ .  
 $A \subset B$
- Γνήσιο Υποσύνολο: Εάν το  $A$  είναι υποσύνολο του  $B$  και το  $B$  δεν είναι υποσύνολο του  $A$  τότε το  $A \subsetneq B$  καλείται γνήσιο υποσύνολο (proper set)
- ΙΣΑ: Εάν  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- De Morgan  $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}, \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ (1)

- Ανακλαστική:  $A \subseteq A$
- Μεταβατική:  $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- Αντισυμμετρική:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

*Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου  $X$  είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του  $X$ .*

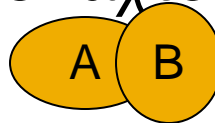
*Υπολογίστε το δυναμοσύνολο του  $X = \{1, 2, 3\}$*



# ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ

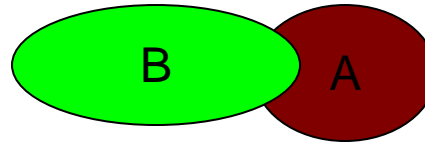
- Ένωση Συνόλων: Τουλάχιστον σε ένα από τα A, B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



- Τομή Συνόλων: Είναι το σύνολο των κοινών τους στοιχείων

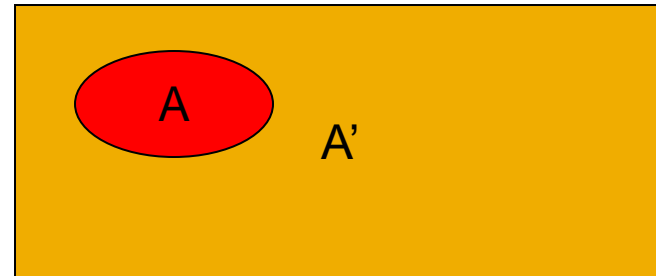
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



- Συμπλήρωμα:

$$A' = \{x : x \notin A \vee x \in \Omega\}$$

- Διαφορά Συνόλων:



$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$$

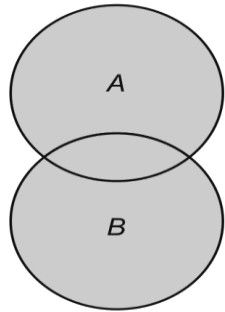
# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ (2)

- Μεταθετική:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- Προσεταιριστική:  
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Επιμεριστική:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

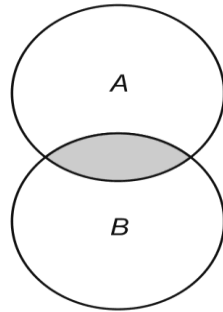
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Ένωση  
 $A \cup B$



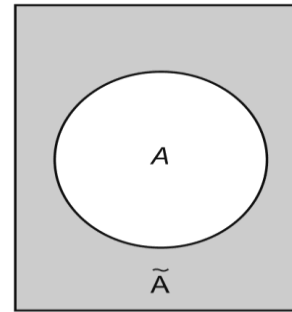
(α)

Τομή  
 $A \cap B$



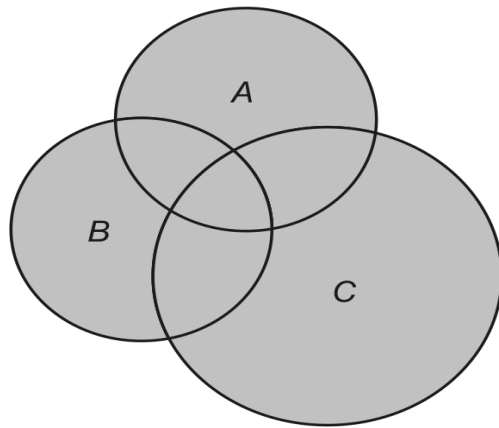
(β)

Συμπλήρωμα  
 $\bar{A}$



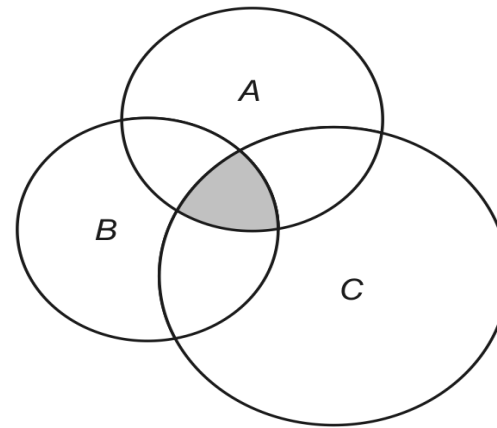
(γ)

$A \cup B \cup C$



(α)

$A \cap B \cap C$



(β)

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

- Αντιμεταθετική:  $A \cap B = B \cap A$   
 $A \cup B = B \cup A$
- Προσεταιριστική:  $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$   
 $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$
- Επιμεριστική της τομής επί της ένωσης και αντίστροφα:  
 $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$   
 $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- Τύποι De Morgan:  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$   
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

# Εφαρμογή 1

Το ΙΚΑ καθορίζει 3 κατηγορίες ατόμων για την παροχή σύνταξης: άτομα άνω των 65 ετών (Α), άτομα με χαμηλό εισόδημα (Β) και άτομα με προβλήματα υγείας (Γ - ΣΟΒΑΡΑ). Από τα αρχεία του γνωρίζει ότι :

1) 300 ανήκουν στο Α σύνολο

2) 200 στο Γ

3) 700 στο Β

4) 50 είναι άνω των 65 με προβλήματα υγείας

5) 250 είναι άνω των 65 με χαμηλό εισόδημα

6) 100 έχουν χαμηλό εισόδημα και προβλήματα υγείας

Να αποδείξετε την ισχύ των ιδιοτήτων των συνόλων.

# Εφαρμογή 2

Μια επιχείρηση έχει 400 πελάτες από τους οποίους 285 αγοράζουν το προϊόν A, 210 αγοράζουν το προϊόν B από τους οποίους 127 αγοράζουν και το A. Ζητούνται α) ο αριθμός των πελατών που αγοράζουν μόνο το A, β) ο αριθμός των πελατών που αγοράζουν μόνο το B, γ) ο αριθμός των πελατών που δεν αγοράζει κανένα από τα δύο προϊόντα, και δ) σε τι συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν με τα ίδια δεδομένα σας έλεγαν ότι ο αριθμός των πελατών είναι 350 αντί του 400.

# Καρτεσιανό Γινόμενο

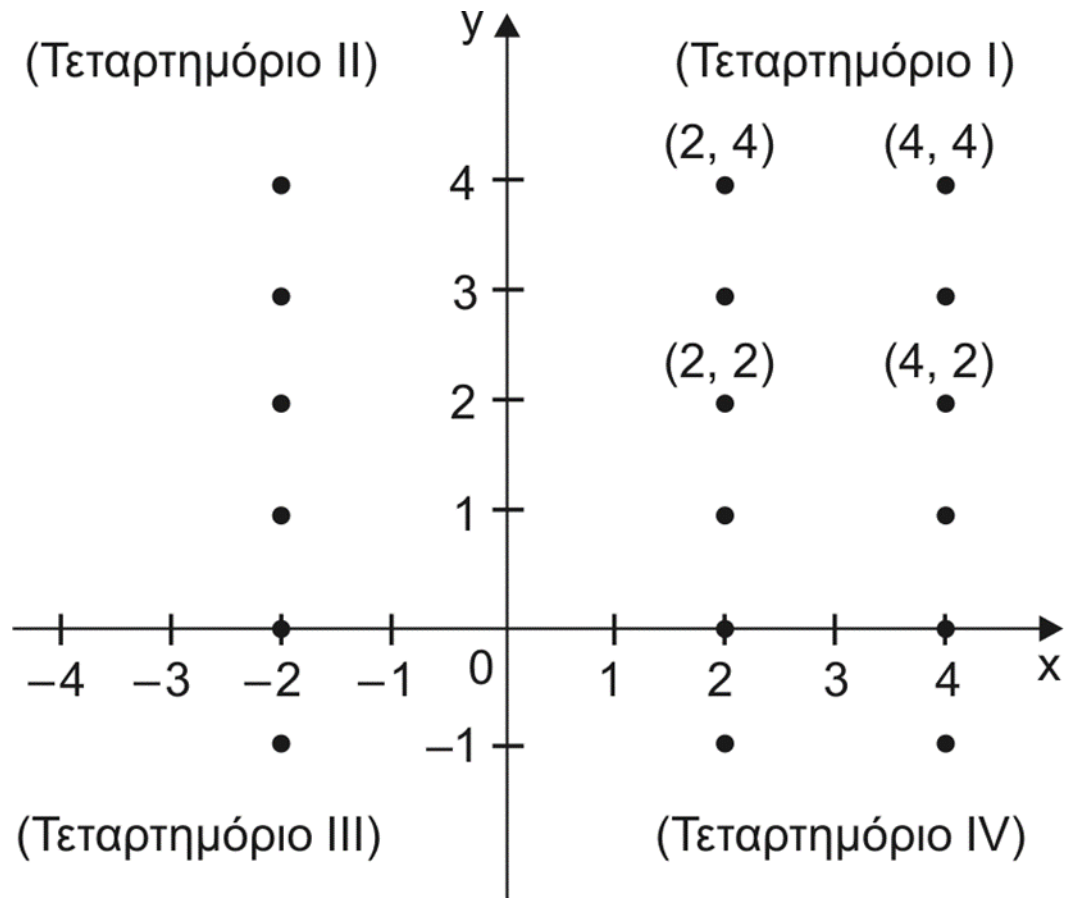
Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών  $(\alpha, \beta)$  με  $a \in A, \beta \in B$  καλείται καρτεσιανό γινόμενο και ισχύει ότι:

$$A \times B = \{(a, \beta) : a \in A, \beta \in B\}$$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τα καρτεσιανά γινόμενα  $A \times B, B \times A$  των  $A = \{1, 2\}, B = \{3, 5\}$

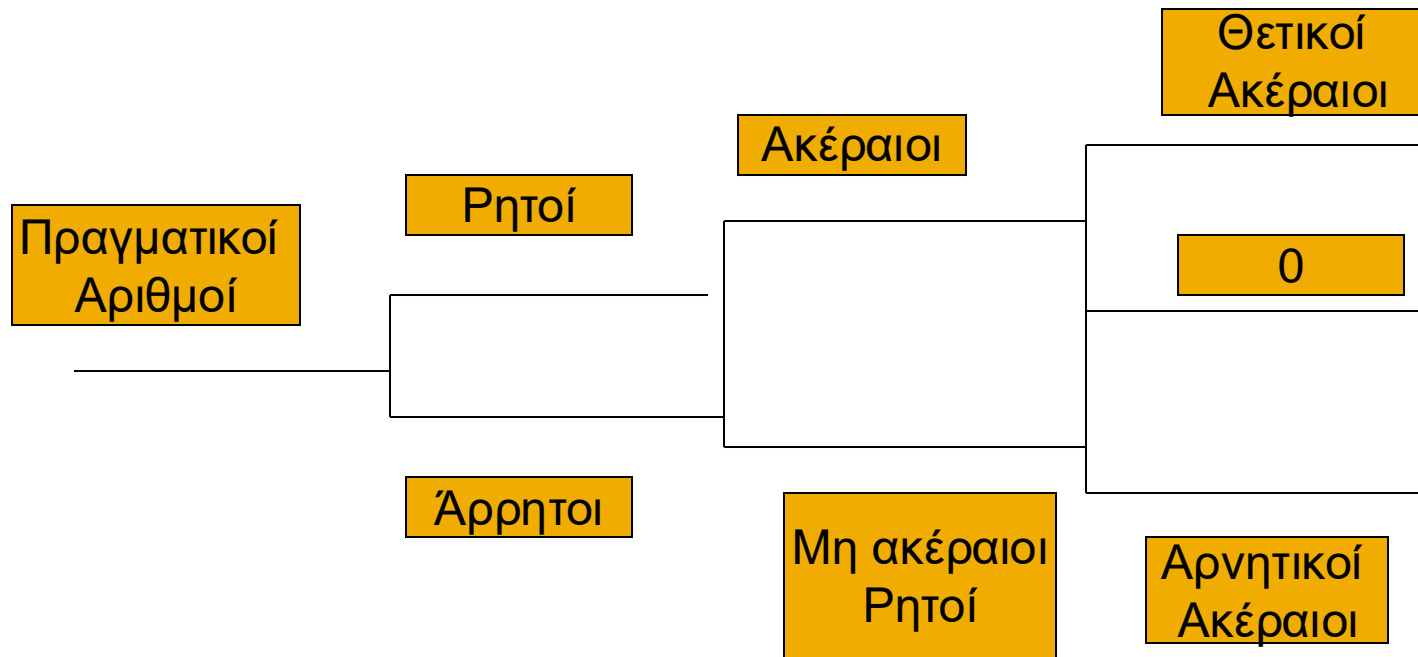
$$A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\} \quad A = \{1, 2\}, B = \{3, 5\}, \Gamma = \{7, 8\} \quad \Gamma \times A \times B$$

# Απεικόνιση στο καρτεσιανό επίπεδο





# Σύστημα Πραγματικών Αριθμών



# Αξιώματα Πεδίου

- Αντιμεταθετικότητα:  $x + y = y + x, xy = yx, x, y \in R$
- Προσεταιριστικότητα:  $x + (y + z) = (x + y) + z, x(yz) = (xy)z, x, y, z \in R$
- Επιμεριστική Ιδιότητα:  $x(z + y) = yx + xz, x, y, z \in R$
- Εάν  $x, y$  πραγματικοί αριθμοί τότε υπάρχει  $z$  πραγματικός ώστε (έννοιες αντίθετου και διαφοράς)  $z = x + y$
- Υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Εάν  $x, y$  πραγματικοί αριθμοί με  $x$  διάφορο του μηδενός τότε υπάρχει  $z$  πραγματικός ώστε (έννοιες πηλίκου και αντίστροφου)
- Ιδιότητα του κλειστού: Εάν  $a, b$  ανήκουν στο  $R$  τότε  $a+b, ab$  θα ανήκουν επίσης. Το  $R$  θα είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

# Αξιώματα Διάταξης

- Εάν  $x, y \in R$  τότε  $\forall z \in R$   $x + z, y + z$
- Αν  $x, y \in R$  με  $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$
- Επίσης εάν  $x, y \in R$  με  $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$  (μεταβατικός)

# Αξιώματα Πληρότητας

Έστω  $S$  υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Θα λέμε ότι το  $S$  είναι άνω φραγμένο εάν:

υπάρχει δηλαδή πραγματικός αριθμός έστω  $a$

τέτοιος ώστε  $a \in \mathbb{R} : x \leq a, \forall x \in S, a = \sup S$

Αντίστοιχα ορίζεται το κάτω φράγμα ως

$$b \in \mathbb{R} : x \geq b, \forall x \in S, b = \inf S$$

Το υποσύνολο  $S$  θα είναι φραγμένο εάν υπάρχει

άνω και κάτω φράγμα. Δίνεται το σύνολο

$A = \{1, 1.1, 1.01, \dots, 0.9, 0.99, 0.999\}$  Είναι φραγμένο; Ποια  
τα supremum-infimum. Είναι κλειστό; Το σύνολο  $A = [0, 1]$ ;

# Αξιώματα Πληρότητας

Κάθε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών  $S$  το οποίο είναι φραγμένο εκ των άνω έχει supremum. Υπάρχει δηλαδή πραγματικός αριθμός έστω  $a$  τέτοιος ώστε  $a \in \mathbb{R} : x \leq a, \forall x \in S, a = \sup S$  αλλά.. Αντίστοιχα ορίζεται το κάτω φράγμα (infimum).

*Τα supremum, infimum είναι μοναδικοί αριθμοί εφόσον υπάρχουν.*

# Σχέσεις στα μαθηματικά

Εάν θεωρήσουμε δύο υποσύνολα  $A, B$  τότε κάθε υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου των  $A, B$  καλείται σχέση μεταξύ αυτών (συμβ.  $xRy$  )

- Ανακλαστική  $xRx, \forall x \in A$
- Μεταβατική  $xRy, yRz \Rightarrow xRz \forall x \in A, y \in B, z \in F$
- Αντισυμμετρική  $xRy, yRx \Rightarrow x = y$
- Συμμετρική  $xRy, \Rightarrow yRx$
- Ασυμμετρική  $xRy, \Rightarrow y \not R x$

Παραδείγματα στα οικονομικά τέτοιων σχέσεων;;

# Απόλυτη Τιμή

- Εάν  $x$  πραγματικός αριθμός η απόλυτη τιμή ορίζεται ως  $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$
- Ιδιότητες
  1.  $|-x| = |x|$
  2.  $|xy| = |x||y|$
  3.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
  4.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ 
    - 4a.  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
    - 4b.  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geq |x_1| - |x_2| - \dots - |x_n|$
    - 4c.  $|x - y| \leq |x| + |y|$
    - 4d.  $|x - y| \geq |x| - |y|$

# Σύστημα πραγματικών αριθμών

1. Εάν  $x \in \mathbb{R}$  τότε

$$x + (+\infty) = +\infty, x + (-\infty) = -\infty, x - (+\infty) = -\infty, x - (-\infty) = +\infty, \frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0$$

2. Εάν  $x > 0$  τότε

$$x(+\infty) = +\infty, x(-\infty) = -\infty$$

3. Εάν  $x < 0$  τότε

$$x(+\infty) = -\infty, x(-\infty) = +\infty$$

$$4. (+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = (+\infty)$$

$$(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = (-\infty)$$



# ΕΝΝΟΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

- Το ανάπτυγμα  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$  αρκετές φορές είναι πιο εύχρηστο να γραφεί ως εξής  $\sum_1^n x_i$

- Ιδιότητες:

$$\sum_1^n cx_i = cx_1 + cx_2 + cx_3 + \dots + cx_n = c \sum_1^n x_i, c \text{ σταθερα}$$

$$\sum_1^n c = c + c + c + \dots + c = nc, c \text{ σταθερα}$$

$$\sum_1^n (x_i \pm y_i) = \sum_1^n x_i \pm \sum_1^n y_i$$

Ποτε με =!!!!  $\sum_1^n x_i^2 \neq \left(\sum_1^n x_i\right)^2, \sum_1^n x_i y_i \neq \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i, \sum_1^n \frac{x_i}{y_i} \neq \frac{\sum_1^n x_i}{\sum_1^n y_i}$

# Παράδειγμα

Ο ΔΤΚ κατασκευάζεται παίρνοντας ένα καλάθι  $n$  αγαθών ορίζοντας για κάθε αγαθό:

$q^i = \{\text{αριθμός μονάδων του αγαθού } i\}$

$p_0^i = \{\text{τιμή του αγαθού } i \text{ τον χρόνο } 0\}$

$p_t^i = \{\text{τιμή του αγαθού } i \text{ τον χρόνο } t\}$

- Άρα ο ΔΤΚ ,μπορεί να οριστεί ως

$$\Delta\text{TK} = \frac{\sum_{i=1}^n p_t^i q^i}{\sum_{i=1}^n p_0^i q^i} \times 100$$

# Διπλό Άθροισμα

Το διπλό άθροισμα για μια μεταβλητή συμβολίζεται ως  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$  και αναπτύσσεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in})$$

(ανάλυση εισροών-εκροών)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$1. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}$$

$$2. \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n y_j$$

$$3. \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i + y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{ij}$$

# ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ-ΤΡΙΓΩΝΟ PASCAL

Το παραγοντικό ορίζεται ως εξής:

$$n! = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3, n \neq 0 \end{cases}$$

Διωνυμικό ανάπτυγμα: Για κάθε  $x, y$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Τι να διαβάσω

- Μαθηματικά των Επιστημών Οικονομίας και Διοίκησης (Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> - 2<sup>ο</sup>)-Jacques
- Κεφάλαιο πρώτο Ξεπαπαδέα-Γιαννίκου και Λουκάκη.
- Κεφάλαια 1-3 από βιβλίο Κάλλιπου  
<https://repository.kallipos.gr/handle/11419/11487>
- Σημειώσεις από το  
<https://eclass.upatras.gr/courses/ECON1240/index.php>
- <https://www.youtube.com/watch?v=a2oOW3hl1ow>

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ I

- Ένα σύνολο  $A$  έχει 10 στοιχεία. Ένα άλλο σύνολο  $B$  έχει 7 και η τομή τους 4. Πόσα στοιχεία του  $A$  δεν είναι στοιχεία του  $B$ ;
- Να παρασταθεί δια περιγραφής το σύνολο  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
- Βρείτε τα  $\sup, \inf$  του  $A = \{0.3, 0.33, 0.333, \dots\}$
- Δείξτε ότι ένα  $A=B$  τότε και τα συμπληρωματικά τους σύνολα θα είναι ίσα.
- Εάν  $A = \{\alpha, \beta\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  και  $K = \{\phi, \kappa, 12\}$  να βρείτε το σύνολο  $A \times (B \cap K)$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ II

Οι προτιμήσεις 100 καταναλωτών για τα προϊόντα A, B και Γ έχουν ως εξής:

40 προτιμούν το A, 22 το B και 25 το Γ. 8 καταναλωτές τα A και B, 13 τα A και Γ 10 τα B και Γ και 5 τα A, B και Γ. Ζητείται:

- Ο αριθμός των καταναλωτών που προτιμούν τα A και B και δεν προτιμούν το Γ.
- Ο αριθμός των καταναλωτών που προτιμά μόνο το B.
- Ο αριθμός των καταναλωτών που προτιμά μόνο το Γ.
- Ο αριθμός των καταναλωτών που προτιμούν το A ή το B ή το Γ.
- Ο αριθμός των καταναλωτών που δεν προτείνουν κανένα από τα A, B και Γ.

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ III

- Το καρτεσιανό γινόμενο των διαστημάτων  $X=[1,2]$  και  $Y=[1,3]$  είναι το σύνολο;
- Να παραστήσετε γραφικά τα σύνολα  $A=\{1,4,0\}$  και  $\Theta=\{2.5, 1/3\}$ .
- Εάν το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων έχει πέντε στοιχεία πόσα στοιχεία έχει το κάθε σύνολο;
- Δίνεται η σχέση  $R=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(1,4)\}$ . Είναι μεταβατική;



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ IV

- Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται η διμελής σχέση  $\alpha R \beta$  « $\alpha, \beta : \alpha \beta < 0$ ». Να δείξετε ότι η σχέση είναι μόνο συμμετρική.
- Να λυθεί η εξίσωση  $1.1^x = 1.999$
- Να λύσετε την εξίσωση  $5^{x-1} = 3^x$
- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ!!!

# Επικοινωνία με Διδάσκοντα

- E-mail: [Kounetas@upatras.gr](mailto:Kounetas@upatras.gr)
  - Ώρες Γραφείου
- Τρίτη: 11.00-13.00

*(Η κατόπιν επικοινωνία μέσω e-mail με τον διδάσκοντα)*