ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους I-Μάθημα 11ΣΕΙΡΕΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ).

ΕΝΝΟΙΑ ΣΕΙΡΑΣ

Ας θεωρήσουμε ως $a_n \,/\, n = 1, 2, \ldots.$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα έχουμε ότι

$$\sigma_1 = a_1$$

$$\sigma_2 = a_1 + a_2 = \sigma_1 + a_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots.$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + a_{n+1}$$

Δημιουργείται η ακολουθία αθροισμάτων $\sigma_{n+1} = \sigma_n + a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου το κάθε αυτό άθροισμα καλείται μερικό άθροισμα ή τμήμα της σεις και οι a_n καλούνται όροι αυτής.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ας θεωρήσουμε ως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι η συγκεκριμένη σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό σ εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sigma_n = a_1 + \ldots + a_n$ συγκλίνει στο αριθμό σ. Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sigma$$

Επίσης θα συγκλίνει κατ' εκδοχήν ή θα απειρίζεται θετικά ή αρνητικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$$

Εάν δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή στο άπειρο θα αποκλίνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για κάθε σειρά θα ισχύει ένα από τα παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να υπολογίσετε το άθροισμα των παρακάτω σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a+\left(n-1\right)w\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a\lambda^{n-1} \text{ γεωμετρική σειρά}$$

ΕΝΑΛΛΑΣΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Εναλλάσουσες σειρές καλούνται αυτές που το πρόσημο των όρων τους είναι εναλλάξ. Για παράδειγμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Έστω f μια θετική και φθίνουσα ακολουθία και ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει

ΕΝΝΟΙΑ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ

Μια σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$ όπου $a_0, a_1, a_2, \ldots..$ σταθερές καλείται δυναμοσειρά. Ομοίως μια σειρά με την μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots..$ καλείται δυναμοσειρά του $(x - x_0)$ με κέντρο προφανώς το x_0

Κάθε δυναμοσειρά θα συγκλίνει όταν το χ πάρει την τιμή μηδέν.

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑ

- ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ μια αναλυτική συνάρτηση στο $(-\infty,+\infty)$
Η f είναι διαφορίσιμη στο (-r,r) και $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

- ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ μια αναλυτική συνάρτηση και r μια ακολουθία συγκλίνουσα τότε $a_k=\frac{f^k(0)}{k!}$. Ετσι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ

Σχετικά με την σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ έχουμε ότι

1. Συγκλίνει $\forall\ x \in R$
2. Συγκλίνει για x ίσον με το μηδέν
3. Συγκλίνει σε διάστημα $(-r, r)$ με $r \in R$
4. Κριτήριο Leibniz:Εάν η ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και μηδενική τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (-1)^{n+1}}{n+1}$

- Να δείξετε ότι η παρακάτω δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n!$ συγκλίνει για x=0

ΔΥΟ ΓΝΩΣΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

- Κριτήριο D'Alembert

Ας θεωρήσουμε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ όπου γνωρίζουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Εάν ισχύει ότι λ>1 τότε η σειρά θα αποκλίνει ενώ εάν λ<1 θα Συγκλίνει.

ΔΥΟ ΓΝΩΣΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

- Κριτήριο Cauchy

Ας θεωρήσουμε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ όπου γνωρίζουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Εάν ισχύει ότι λ>1 τότε η σειρά θα αποκλίνει ενώ εάν λ<1 θα Συγκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να εξετάσετε τις παρακάτω σειρές ως προς την σύγκλιση τους.

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

$$2.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$3.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$4.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{3n+1}\right)$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Σημειώσεις από το e-class
- Προφανώς το κεφάλαιο 15 από το βιβλίο του Chiang ή το αντίστοιχο κεφάλαιο από το βιβλίο του Ξεπαπαδέα.