ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 4ο Παράγωγος Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής.

Συνέχεια Συναρτήσεων

Εστω μια συνάρτηση $f(x): A \to R, A \subseteq R$ Η συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο p του A εάν: $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση στο σημείο p του πεδίου ορισμού της θα πρέπει να ισχύουν:

1. Να υπάρχει το όριο της f(x) στο p,
2. Το όριο να ισούται με την τιμή της παράστασης
3. Προφανώς να υπάρχει το f(p).

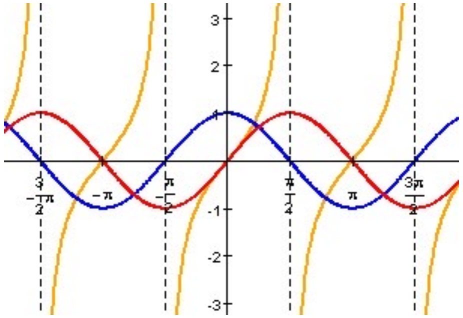
Μια συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του π.ο A θα λέμε ότι είναι συνεχής σε όλο το A.

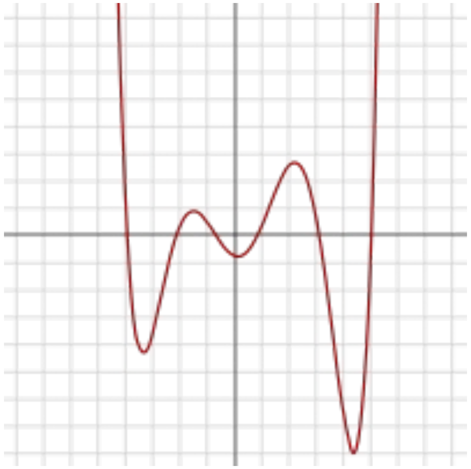
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

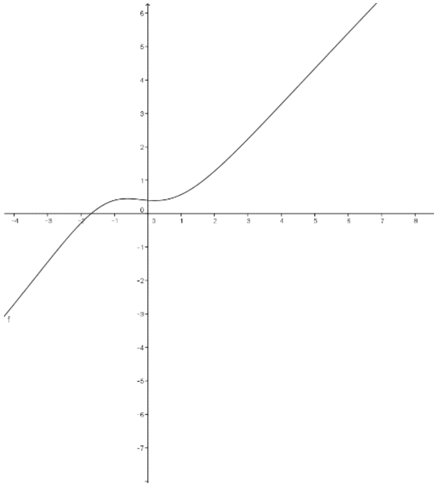
1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) < 0$ (αντίστοιχα $f(x_0) < 0$) τότε η συνάρτηση f είναι θετική (αντίστοιχα αρνητική) κοντά στο x_0.
2. Αν έχουμε συναρτήσεις (δύο ή περισσότερες) με κοινό πεδίο ορισμού οι οποίες είναι συνεχείς σε σημείο x_0, τότε το άθροισμα και το γινόμενό τους ορίζει συνεχή συνάρτηση στο x_0.
3. Αν έχουμε δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού οι οποίες είναι συνεχείς σε σημείο x_0, τότε το πηλίκο τους είναι συνεχή συνάρτηση στο x_0 (αρκεί η συνάρτηση του παρονομαστή να μην μηδενίζεται στο x_0)
4. Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στο x_0 είναι συνεχής στο x_0.

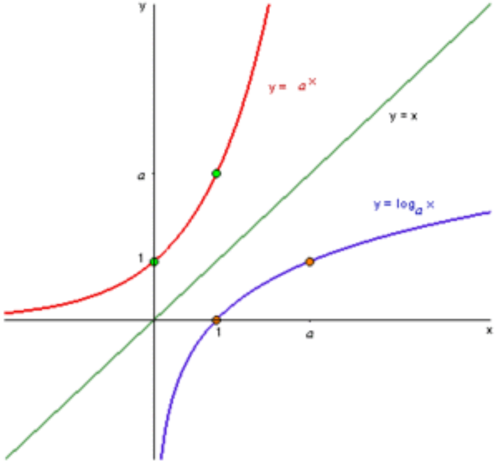
ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥΣ

- Πολυωνυμικές
- Ρητές
- Τριγωνομετρικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές









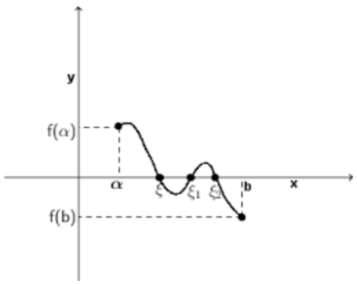
ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

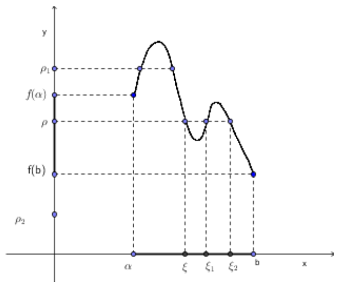
- **Θεώρημα BOLZANO**: Έστω $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ξ∈ (α, b) τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$
- **Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής**: Έστω $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) \neq f(b)$

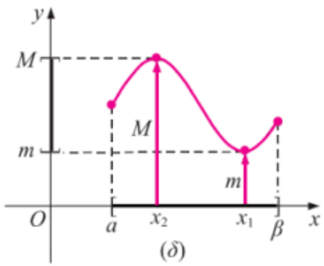
τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(a)\ και\ \ f(b)$ υπάρχει ξ∈ (α, b) τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \kappa$$

- **Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής :** Αν μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] είναι συνεχής σε αυτό, τότε υπάρχουν στοιχεία m και M στο [α,β] ώστε
  f (m) = min(f) και f (M) = max(f).







ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Η f θα ονομάζεται **ομοιόμορφα συνεχής στο Α**, αν για κάθε ε>0 και για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ να έχουμε
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$
- Στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μιλάμε για συνέχεια σε διάστημα και όχι σε σημείο και ο αριθμός δ εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από τα x_1, x_2.

Πρόταση: Αν **η συνάρτηση** $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι και συνεχής.

Μια εισαγωγή…

“… Αμέσως μετά ο Χαμπάς-αλ-Χασίμπ δημιούργησε την εφαπτομένη. Η εφαπτομένη είναι το ιδανικό εργαλείο για την μέτρηση του ύψους”.

(Το θεώρημα του παπαγάλου, Ντ. Γκειτζ)

Ιστορική Αναδρομή

- Descartes (1596-1650). Ενοποίηση γεωμετρίας-άλγεβρας- La Geometrie (1637)
- Newton (1642-1727)
- Leibniz (1646-1716)
- Ανεξάρτητα και απο τους δύο η έννοια του λογισμού.

Έννοια Παραγώγου (1)

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση y=f(x) ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) υποσύνολο του R. Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβληθεί κατά Δx δηλαδή από x0 μέσα στο (α,β) σε x0 +Δx τότε η εξαρτημένη μεταβλητή θα μεταβληθεί κατά Δy= f(x0 +Δx)-f(x0).
Η μέση μεταβολή του y ανά μονάδα μεταβολής του x στο διάστημα x0 +Δx, x προσδιορίζεται από το εξής πηλίκο: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
(έννοια ρυθμού μεταβολής) και ισούται με την κλίση της ευθείας που διέρχεται απο (x0 , f(x0), (x0 +Δx,f(x0 +Δx). **Μέσος και οριακό ρυθμός μεταβολής!!!**

Έννοια Παραγώγου (2)

Εάν θεωρήσουμε τώρα το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

και το συγκεκριμένο όριο είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο xο του (α,β). Το συγκεκριμένο όριο καλείται παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο xο.

$$\text{E}\acute{\alpha}\nu\ \text{x}{=}x_0+\Delta x, \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Έννοια Παραγώγου (3)

Εάν Α το σύνολο των σημείων του διαστήματος (α,β) στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται μια καινούργια συνάρτηση στο Α η οποία σε κάθε x αντιστοιχεί τον παράγωγο αριθμό της f στο x. Η συνάρτηση f(x) ονομάζεται πρώτη παράγωγος (first derivative) ή απλά παράγωγος της f (έχει επικρατήσει ο συμβολισμός του Leibnitz)

$$f'(x), {}^{dy}\!/_{dx}, \frac{df(x)}{dx}. \text{ Σε σημείο}$$

$$f'(x_0), {}^{dy}\!/_{dx}\Big|_{x=x_0}, \frac{df(x_0)}{dx}$$

Έννοια Παραγώγου (4)

Προφανώς υπάρχουν και παράγωγοι ανώτερης τάξης εάν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της.

$$f''(x_0), \left. {d^2 y}\middle/{dx^2} \right|_{x=x_0}, \frac{df^2(x_0)}{dx^2},$$

$$f'''(x_0), \left. {d^3 y}\middle/{dx^3} \right|_{x=x_0}, \frac{df^3(x_0)}{dx^3},$$

$$f^n(x_0), \left. {d^n y}\middle/{dx^n} \right|_{x=x_0}, \frac{df^n(x_0)}{dx^n}$$

Τύπος Leibnitz

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\big) = \lambda \frac{d^n}{dx^n}\mathrm{f(x)} + \mu \frac{d^\kappa}{dx^\kappa}\mathrm{g(x)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(\big(f(x) \cdot g(x)\big)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}\,\mathrm{f(x)}}{dx^{n-k}} \frac{d^\kappa\,\mathrm{g(x)}}{dx^\kappa}$$

Εφαρμογή

Το εθνικό εισόδημα μιας χώρασαυξάνεται με βάση την συνάρτηση g(x) ενώ ο πληθυσμός με βάση την h(x). Ποιος ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του κατα κεφαλήν εισοδήματος την χρονική στιγμή t_1;

Παράγωγος και Οικονομικά (Υπάρχει Σχέση;)

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση παραγωγής για την παραγωγή ενός αγροτικού προϊόντος (π.χ τόνοι ντομάτας) όπου χρησιμοποιούνται διάφοροι παραγωγικοί συντελεστές. Αν ο μόνος συντελεστής που μπορεί να μεταβληθεί είναι η εργασία (οι άλλοι θεωρούμε ότι δεν μεταβάλλονται) η συνάρτηση παραγωγής περιγράφει τις μέγιστες ποσότητες ντομάτας που μπορεί να παραχθεί και αντιστοιχούνται σε εναλλακτικές εισροές εργασίας. *Πόσο θα μεταβληθεί η παραγόμενη ποσότητα ντομάτας όταν μεταβληθεί (μικρές απειροστικές μεταβολές) η ποσότητα εισροής εργασίας;)*

Παράγωγος και Οικονομικά (Υπάρχει Σχέση;)-Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω συνάρτηση κατανάλωσης: $C = a + bI$ Έστω μια μικρή αύξηση στο εισόδημα τότε:

$$C + \Delta C = a + b(I + \Delta I) \Leftrightarrow \Delta C = -C + a + bI + b\Delta I \Leftrightarrow$$

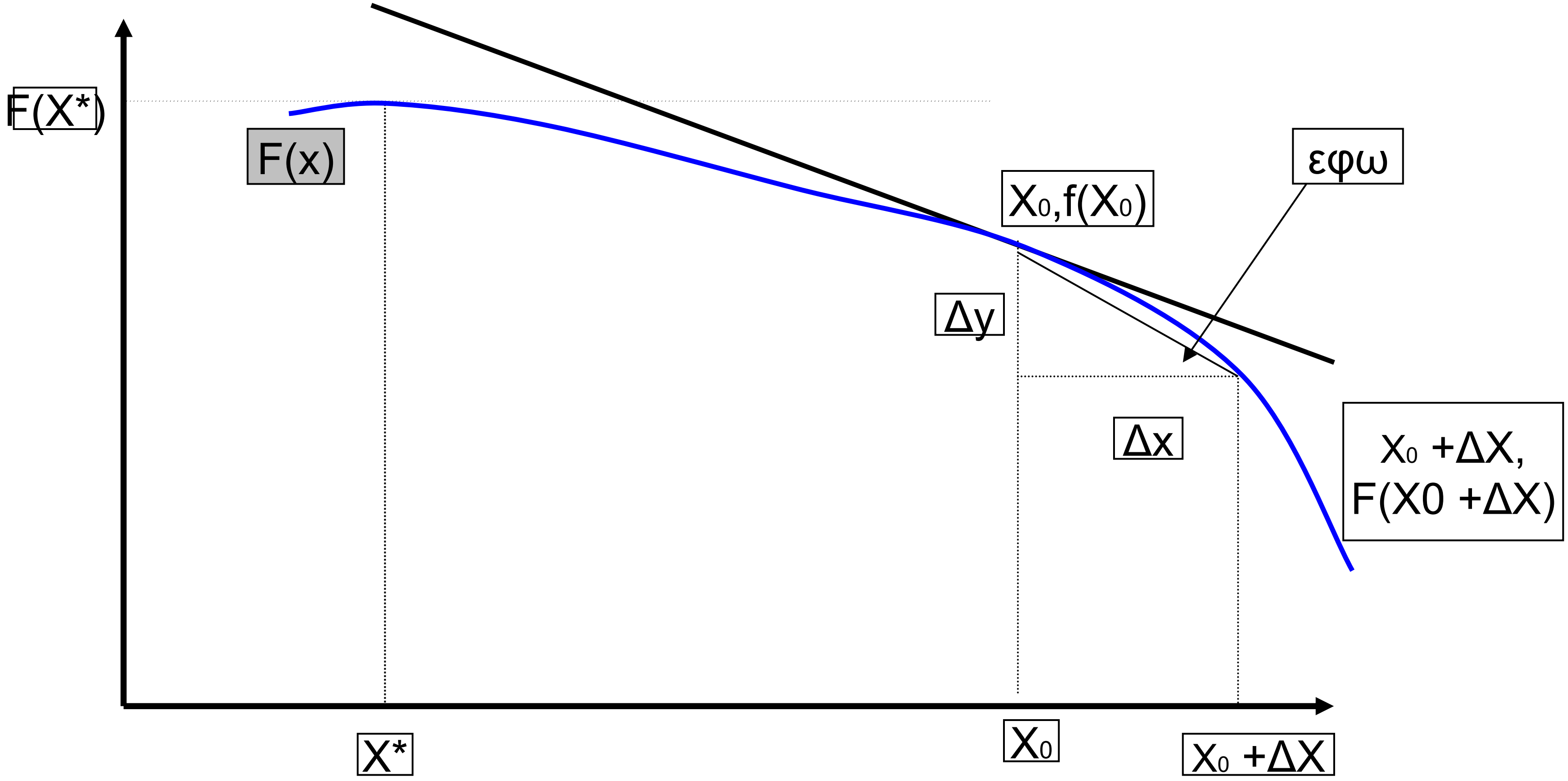
$$\Leftrightarrow \Delta C = b\Delta I \Leftrightarrow \frac{\Delta C}{\Delta I} = b$$

Ορίζεται η οριακή ροπή προς κατανάλωση

Παραγωγισιμότητα & Συνέχεια

Ισχύει το παρακάτω Θεώρημα:
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει!!!!!!!!

Γεωμετρική Εννοια Παραγώγου



Παραδείγματα

1. Μια βιοτεχνία υποδημάτων, για να παράγει x ζευγάρια υποδημάτων τον μήνα έχει κόστος παραγωγής $C(x) = 1500 + 6x + 0.1x^2$. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολή της συνάρτησης κόστους ως προς x. Να συγκριθούν οι ρυθμοί όταν x=1000 και x=2000.
2. Έστω η εξίσωση $f(x) = x^3 - 3$. Να βρεθεί η κλίση και η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία [2,1] και [-3,6].

Πλευρικές Παράγωγοι

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] και έστω ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο του x_o που ανήκει στο διάστημα αυτό. Θα λέμε ότι η f έχει παράγωγο από τα δεξιά όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ομοίως από αριστερά εάν $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Εάν οι δύο πλευρικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι ίσες τότε η συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη (*Θεώρημα*).
Να εξετάσετε την παραγωγισιμότητα της $y = \left|\sqrt[3]{x}\right|$

Πλευρικές Παράγωγοι-Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + |2x^2 - 3x - 2|$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει η παράγωγος στα σημεία 2 και 1.
2. Να εξετάσετε εάν η παρακάτω συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $f(x) = \begin{cases} \ln(1+3x), -\frac{1}{3} \le x \le 0 \\ 3x, x > 0 \end{cases}$

Παράγωγος Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Παράγωγος Σταθερής Συνάρτησης

$f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$

Παράγωγος Ταυτοτικής Συνάρτησης

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

Παράγωγος Δύναμης

$f(x)=ax^{n} \Rightarrow f'(x)=nax^{n-1}$

Παράγωγος Ημιτόνου

$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

Παράγωγος Συνημιτόνου

$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

Παράγωγος α^{x}

$f(x)=\alpha^{x} \Rightarrow f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$

Οι αποδείξεις καλό θα ήταν να γίνουν από εσάς

Παράγωγος Στοιχειωδών Συναρτήσεων (σύνθεση)

Αλυσωτός Κανόνας (chain rule)

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

Παράγωγος Δύναμης

$$f(x) = ag(x^n) \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}g'(x)$$

Παράγωγος Ημιτόνου

$$f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f'(x) = \cos x g'(x)$$

Παράγωγος Συνημιτόνου

$$f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin x g'(x)$$

Παράγωγος Εκθετικής

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$$

Παράγωγος Λογαριθμικής

$$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = {}^{1}\!/_{g(x)}\, g'(x)$$

Στα Οικονομικά!!

- Μέσο και οριακό κόστος
- Συνολικά και οριακά έσοδα.
- Συναρτήσεις παραγωγής και κόστους
- Ελαστικότητα και ερμηνεία αυτής.

Παράγωγος Συναρτήσεων & Κανόνες Παραγώγισης (Αποδείξεις)

$$\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma \text{ Αθροίσματος-Διαφοράς}$$

$$[\mathrm{f(x)} \pm g\mathrm{(x)}]' = \mathrm{f}'\mathrm{(x)} \pm g'\mathrm{(x)}$$

$$\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma \text{ Γινομένου}$$

$$[\mathrm{f(x)}g\mathrm{(x)}]' = \mathrm{f}'\mathrm{(x)}g\mathrm{(x)} \pm g'\mathrm{(x)}\mathrm{f(x)}$$

$$\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma \text{ Πηλίκου}$$

$$\left[\mathrm{f(x)}\big/g\mathrm{(x)}\right]' = \frac{g\mathrm{(x)}\mathrm{f}'\mathrm{(x)}-\mathrm{f(x)}g'\mathrm{(x)}}{(g\mathrm{(x)})^2}$$

$$\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma \text{ Γινόμενου με Πραγματικό αριθμό}$$

$$[\mathrm{a}g\mathrm{(x)}]' = ag'\mathrm{(x)}$$

$$\Pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\varsigma \text{ Αντίστροφης Συνάρτησης}$$

$$[\mathrm{f}^{-1}\mathrm{(x)}]' = \frac{1}{\mathrm{f}'\mathrm{(x)}}$$

Εφαρμογές

- Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραγώγους πρώτης και δεύτερη τάξης (Leibnitz)

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^3, g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}, g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin(x)}, g(x) = \left(1+ {}^{1}\!/_{x}\right)^x$$

$$f(x) = \cos^n x \sin(nx), g(x) = \frac{x^2 e^{x+1}\cos x}{x+q}$$

Εφαρμογή 1

Η συνάρτηση κερδών μιας επιχείρησης όταν η παραγωγή κυμαίνεται μεταξύ 40 και 70 μονάδων, έχει υπολογιστεί ότι είναι $\Pi(q) = \frac{q^2}{10} + 5q - .3$

Να υπολογιστεί το μέσο και το οριακό κέρδος της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ των 40 και 70 μονάδων.

Εφαρμογή 2-Εννοια Ελαστικότητας

Για την παρακάτω συνάρτηση ζήτησης να βρείτε τις τιμές όπου η ζήτηση είναι ελαστική, ανελαστική ή έχει μοναδιαία ελαστικότητα.

$$Q = 64 - P^2$$

Εφαρμογή 3

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q = \frac{1000}{\sqrt{P}}$. Να βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης όταν η τιμή είναι **P=3** και όταν είναι **P=5** και να εκτιμήσετε τη μεταβολή στα συνολικά έσοδα καθώς η τιμή μεταβάλλεται μεταξύ αυτών των δύο ορίων.

Εφαρμογή 4

Μια επιχείρηση έχει σταθερό κόστος ίσο με 150.000- χιλιάδες ευρώ ενώ το μεταβλητό της κόστος δίνεται από την εξής συνάρτηση:

$$VC(Q) = 200 + \frac{1000}{Q^2}$$

Να υπολογίσετε τις συναρτήσεις συνολικού και οριακού κόστους.

Εφαρμογή 5

Το συνολικό κόστος μιας επιχείρησης περιγράφεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$TC(Q) = 5000000 + 250Q + 0.002Q^2$$

Πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν για να ελαχιστοποιηθεί το μέσο κόστος;
Ποιο το ελάχιστο μέσο κόστος;
Ποιο το συνολικό κόστος στο συγκεκριμένο επίπεδο παραγωγής;

Εφαρμογή 6

Για την παρακάτω συνάρτηση κόστους να υπολογίσετε το μέσο κόστος, το μέσο σταθερό και το μέσο μεταβλητό. Επίσης το οριακό κόστος και να γίνουν οι γαφικές τους παραστάσεις.

$$TC(Q) = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma, \alpha, \beta > 0$$

Παραγώγιση ως προς τον χρόνο (1)-Κανόνας Αλυσίδας

Πολλές οικονομικές έννοιες που εξετάζονται μεταβάλλονται κατά την διάρκεια του χρόνου ή και εξαρτώνται από αυτόν. Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός μιας μεταβλητής y σε σχέση με τον χρόνο βρίσκεται με την χρήση του αλυσωτού κανόνα

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Παραγώγιση ως προς τον χρόνο (2)-Παράδειγμα

Οι μηνιαίες συναρτήσεις εσόδων (R) και κόστους (C) ενός προϊόντος μιας επιχείρησης είναι $R(x) = 1200x + 13x^2, C(x) = x^3 + 10x^2 + 100x + 250$ όπου x οι μονάδες που παράγονται. Να υπολογιστούν οι μηνιαίοι ρυθμοί αύξησης των εσόδων, του κόστους και των κερδών όταν η παραγωγή είναι ίση με 10 μονάδες και πραγματοποιείται 4 φορές το μήνα.

Εφαρμογή σε παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων

Μια οικολογική οργάνωση εκτιμά ότι ο πληθυσμός μιας πόλης είναι x χιλιάδες άνθρωποι, το μέσο επίπεδο L του διοξειδίου του άνθρακα θα είναι L ppm όπου $L(x) = 10 + 0.4x + 0.0001x^2$. Ο πληθυσμός της πόλης εκτιμάται ότι θα είναι $x = 752 + 23t + 0.5t^2$ Πόσο γρήγορα αυξάνει το επίπεδο του διοξειδίου του άνθρακα της χρονική στιγμή t=2.

Ποσοστιαία Μεταβολή (1)

Στα οικονομικά αρκετές φορές υπολογίζεται και η έννοια της ποσοστιαίας μεταβολής. Η ποσοστιαία μεταβολή υπολογίζεται από το επί τις εκατό πηλίκο της μεταβολής στην ποσότητα προς την συνολική ποσότητα. Σε ορούς ωστόσο παραγώγων η σχέση από την εκφράζει δίνεται.

$$\Pi\textit{οσοστιαία}\ \text{Μεταβολή}=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)100$$

Ποσοστιαία Μεταβολή (2)-Παράδειγμα

Το ΑΕΠ της ελληνικής βιομηχανίας για την περίοδο 1955-1989 αναπτυσσόταν σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση (σταθερές τιμές του 1970):

$$Y(t) = 16.907 + 2.024t + 372t^2 - 7.4t^3$$

1. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του Υ ως προς τον χρόνο το 1989;
2. Ποια η ποσοστιαία μεταβολή για το ίδιο έτος;

Απροσδιόριστες Μορφές- L’Hospital (1)

Κατά τον υπολογισμό των ορίων αρκετές φορές εμφανίζονται απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{0}{0}, \frac{a}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0\cdot(\pm\infty), \infty\cdot(-\infty), 0^{0}, \infty^{0}, 1^{\pm\infty}$$

$$+\infty \pm (+\infty), -\infty \pm (+\infty)$$

Ο προσδιορισμός του ορίου γίνεται με βάση τον κανόνα του L’Hospital.

Απροσδιόριστες Μορφές- L'Hospital (1)

Έστω οι συναρτήσεις f(x),g(x) οι οποίες έχουν παραγώγους σε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος (α,β) με εξαίρεση το x_0,x_0 σημείο συσσώρευσης. Εάν

$$f(x_0)=g(x_0)=0, \acute{\eta}\ f(x_0)=g(x_0)=\infty \text{ και}$$

$$\text{υπάρχει το } \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ τότε}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},\ \ g'(x)\neq \forall x\in(a,\beta)$$

Γνωστά όρια που δεν χρειάζονται τον κανόνα

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$3.\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}=e$$

$$4.\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$5.\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$6.\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a, a\in R^{*}, -1<x\neq 0$$

Απροσδιόριστες Μορφές-L'Hospital (2)

1. Μορφές $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty},$

Ο προσδιορισμός του ορίου γίνεται με βάση τον κανόνα του L'Hospital.

2. Μορφές $0\cdot\infty, \infty\cdot(-\infty)$

Μπορούν να προσδιορισθούν αφού μετατραπούν στις μορφές 1.

3. Μορφές $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Οι μορφές αυτές προσδιορίζονται αφού πρώτα μετατραπούν σε μορφή 0^∞ με λογαρίθμηση της υπό εξέτασης παράστασης

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια με την βοήθεια του κανόνα de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x},\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\log x}{x},\ \lim_{x\to 0}x^2\log\left(x^2\right),\ \lim_{x\to 0}\left(\sin x\right)^x$$

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)},\ \lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{\log(1+x)}$$

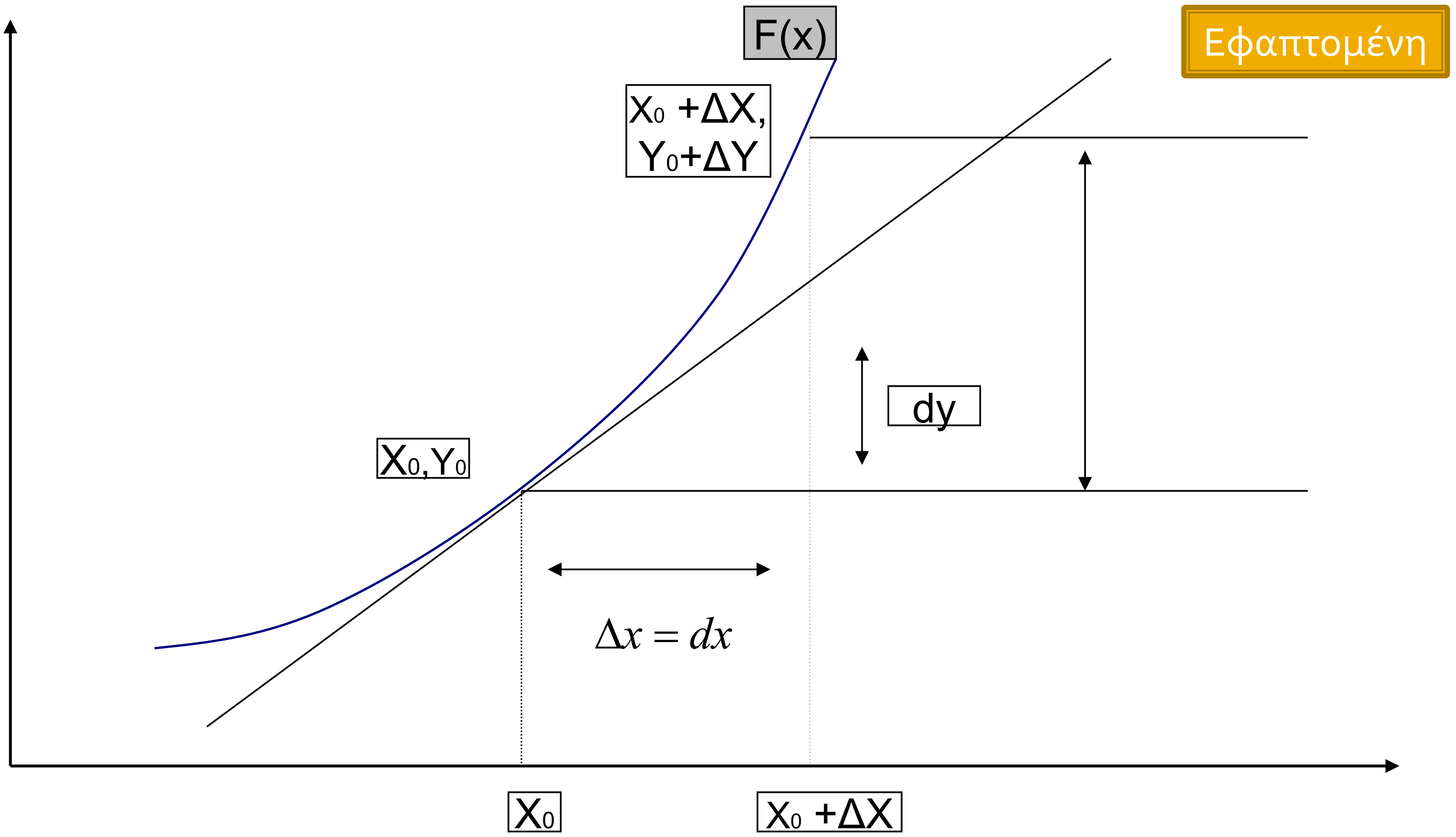
Έννοια Διαφορικού

Έστω y=f(x) μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη σε εάν διάστημα (α,β). Ως διαφορικό πρώτης τάξης ορίζεται η συνάρτηση dy=f′(x)dx

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ εχουμε } \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ΠΟΤΕ ΙΣΧΥΕΙ?

Γεωμετρική Ερμηνεία Διαφορικού



Έννοια Διαφορικού-Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $y = 3x^2$ παραγωγής. Αν η εισροή μεταβληθεί κατά μία μονάδα από μια αρχική τιμή ποιο το διαφορικό πρώτης τάξης;
Επειδή το διαφορικό είναι συνάρτηση μπορεί να οριστεί το διαφορικό του. Δηλαδή:

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(x)dx] = f''(x)dx^2$$

$$d^n y = f^n(x)dx^n$$

Κανόνες Διαφόρισης

Οι κανόνες διαφόρισης προέρχονται από τους κανόνες παραγώγισης απευθείας:

Εστω συναρτήσεις f(x)=y,z=g(x)

$$1.d(y+z)=dy+dz=f'(x)dx+g'(x)dx=[f'(x)+g'(x)]dx$$

$$2.d(cy^m)=(cmy^{m-1})dy=cm[f(x)]^{m-1}f'(x)dx$$

$$3.d(yz)=ydz+zdy=yg'(x)dx+zf'(x)dx=[f(x)g'(x)+g(x)f'(x)]dx$$

$$4.d\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{zdy-ydz}{z^2}=\frac{g(x)f'(x)dx-f(x)g'(x)dx}{[g(x)]^2}$$

$$5.d(f\circ g)=d[f(g(x))]=[f'(g(x))g'(x)]dx=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}dx$$

$$6.d(e^z)=e^z dz=[g'(x)e^{g(x)}]dx$$

$$7.d(\ln y)=\frac{dy}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$8.d(\sin y)=\cos y dy=[\cos f(x)]f'(x)dx$$

Κανόνες Διαφόρισης-Παράδειγμα

Ε$\sigma\tau\omega$ οι παρακάτω συναρτήσεις: Να υπολογιστούν τα διαφορικά τους

$$1.\ y = x^3 + 4x^{1/2} - 5x + 2$$

$$2.\ y = (3x^2 + 2)^{3/2}$$

$$3.\ x^3 y^2 - 2x^2 y + 3xy^2 - 8xy = 0$$

$$4.\ \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x} - 8 = 0$$

Εφαρμογή 1

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής όπου L ο αριθμός εργατοωρών.

$$Q = e^{2L-5}$$

Ποια είναι η μεταβολή για την συνάρτηση παραγωγής όταν το L μεταβάλλεται από την τιμή 5 κατά 0,01;

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗΣ

- Εστω y(t) μια συνάρτηση ως προς τον χρόνο t . Ως στιγμιαίος ρυθμός μεγέθυνσης ορίζεται η ποσότητα

$$r = \frac{dy/dt}{y(t)}$$

- Για τον υπολογισμό του ρυθμού μεγέθυνσης χρησιμοποιούμε συνήθως τον τύπο:

$$r = \frac{d}{dt}\ln(y(t))$$

- Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεγεθυνσης της συνάρτησης $W = ae^{rt}$

Newton-Raphson Method

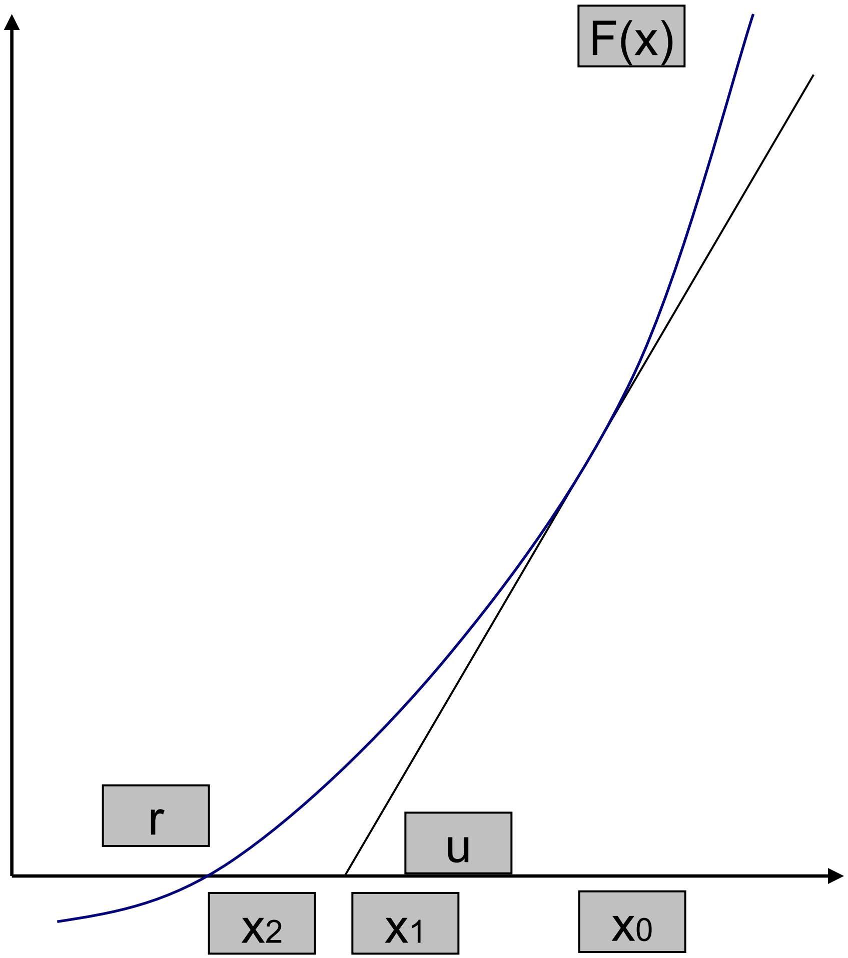
Θεώρημα:Έστω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια ρίζα στο διάστημα [α,b] και ότι ισχύει

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| < 1$$

για κάθε x στο διάστημα [a,b] τότε η μέθοδος NR συγκλίνει στην ρίζα της εξίσωσης , για οποιαδήποτε αρχική τιμή xo στο [a,b].

Να βρεθεί προσεγγιστικά με την μέθοδο NR μια ρίζα της

$$x^2 - x^5 + x = 8$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ Ι

- Το μέσο κόστος AC μιας επιχείρησης και η παραγωγή q συνδέονται με τη σχέση $ACq = a + bq - cq^2, a, b, c, g > 0$ Υπολογίσατε το οριακό κόστος.
- Μία επιχείρηση ειδικεύεται στο να σχεδιάζει T-shirts. Το συνολικό καθημερινό κόστος της επιχείρησεις, για επίπεδο παραγωγής x T-shirts, είναι $TC = 73 + 4x$

(α)Σε ποιο επίπεδο πωλήσεων το κόστος θα είναι 225;

(β)Αν το επίπεδο πωλήσεων είναι στα 40 T-shirts, πόσο θα αυξηθεί το κόστος αν οι πωλήσεις αυξηθούν σε 50 T-shirts;

- Το κόστος παραγωγής x πακέτων δημητριακών είναι $TC = 3 + 4\sqrt{x} + 2$ Η εβδομαδιαία παραγωγή σε t εβδομάδες από σήμερα, εκτιμάται να είναι $t = 6200 + 100t$ πακέτα. Πόσο γρήγορα (σε σχέση με το χρόνο) αυξάνονται τα κόστη, όταν t=2;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ ΙΙ

- Εάν η συναρτηση $p=0,5q + 10$ μας δινει τη σχεση μεταξη q και p, βρειτε την τιμη της ελαστικοτητας προσφορας όταν $p=20$.
- Μια συναρτηση συνολικου κοστους είναι της μορφης $c(x)= ax^2 + bx + c$. Δειξατε ότι εάν χ_o είναι η τιμη στην οποια το οριακο κοστος είναι ισο με το μεσο κοστος, τοτε : $d(AC(x_{0)}) = 0$.
- Μια κομμώτρια χρεώνει το κούρεμα 4 ευρώ και σε αυτή την τιμή διαπιστώνει ότι κάνει κατά μέσο 100 κουρέματα την εβδομάδα. Εάν αυξηθεί η τιμή του κουρέματος σε 5 ευρώ, ο αριθμός των πελατών της μειώνει στους 80. Θεωρώντας ότι η συνάρτηση ζήτησης, η οποία περιγράφει τη σχέση μεταξύ τιμής κουρέματος και αριθμού πελατών, είναι γραμμική, βρείτε τη συνάρτηση των οριακών εσόδων. Επειτα βρείτε τη τιμή που τη μηδενίζει.

Τι να διαβάσω

- Κεφάλαιο Τέταρτο Jacques
- Κεφάλαια 10-11-12 απο Λουκάκη
- Σημειώσεις από το http://eclass.upatras.gr

(Ασκήσεις & Θεωρία)

Να επιλυθουν και οι ασκήσεις πολλαπλής επιλογής!!!