ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 3ο Όριο-Συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε R σύνολο διάφορου του κενού. Μια πράξη Π του RxR στο R καλείται εσωτερική πράξη στο R. Η τιμή της σε (x,y) στοιχείο συμβολίζεται με xΠy και λέγεται αποτέλεσμα (π.χ πρόσθεση ακέραιων). Θεωρούμε πάλι το σύνολο R εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις +,*. Η τριάδα (R,+,*) θα καλείται σώμα εάν οι πράξεις

1. Είναι αντιμεταθετικές
2. Είναι προσεταιριστικές
3. Έχουν ουδέτερα στοιχεία.
4. Υπάρχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την πρόσθεση και τον πολλ/μο.
5. Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

ΣΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Ένα σώμα (R,+,*) θα καλείται διατεταγμένο εάν περιέχει υποσύνολο θ με τις εξής ιδιότητες:

1.Για όλα τα x,y $\in \Theta \Rightarrow x+y \in \Theta, xy \in \Theta$ (κλειστό)

2. $\forall$ x $\neq 0 \Rightarrow x \in \Theta, -x \in \Theta$

3.$0 \notin \Theta$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο Α σημείων x,y,z,… τα οποία ονομάζονται διανύσματα για τα οποία δεχόμαστε τα ακόλουθα βασικά αξιώματα:

Οποιαδήποτε δύο στοιχεία x,y $\in$ A προσδιορίζουν ένα τρίτο x+z $\in$ A (άθροισμα)

$1. x+z=z+x$

$2. (x+z)+y=x+(z+y)$

$3. \exists 0 \in A : 0+x \in \mathrm{A}$

$4. \forall x \in \mathrm{A} \exists -x : x+(-x)=0$

Κάθε πραγματικό αριθμός a και κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$ προσδιορίζουν ένα μοναδικό $\alpha x \in$

$1. \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

$2. 1x=x$

$3. (\alpha+\beta)x=ax+\beta x, a(x+z)=ax+az$

Έννοια Μετρικού Χώρου

Ας θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο A={x,y,w,z}.
Ποια είναι η απόσταση ανάμεσα στα x,y ή στα w,z;
Έννοια απόστασης (π.χ ευκλείδεια) στην οποία στηριζόμαστε για να αναπτύξουμε την έννοια χώρος.
Η απόσταση (distance) χαρακτηρίζεται ως ένα πραγματικός αριθμός και συμβολίζεται d=(x,y).
Π.χ Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η απόσταση που ορίζεται ως $d(x,y)=|x-y|$

Ευκλείδια απόσταση

Για τα σημεία $a = (a_1, a_2, .., a_n)$ και $b = (b_1, b_2, .., b_n)$ στο R^n η ευκλείδια απόσταση μεταξύ τους ορίζεται ως εξής:

$$d(\alpha, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

- Να υπολογιστούν οι ευκλείδιες αποστάσεις ανάμεσα στα ακόλουθα σημεία το 2και το 3 στο σύνολο R.
- Το (2,3) και το (4,1) στο RXR.

Έννοια Μετρικού Χώρου (Συνέχεια..)

- Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$d(x,x)=0$$

$$d(x,y)>0,\ \text{εάν x} \neq \text{y}$$

$$d(x,y)=d(y,x)\ (\text{συμμετρία})$$

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)\ (\text{τριγωνική ανισότητα})$$

- Το σύνολο (A,d) καλείται μετρικός χώρος

Βασικές Έννοιες Τοπολογίας

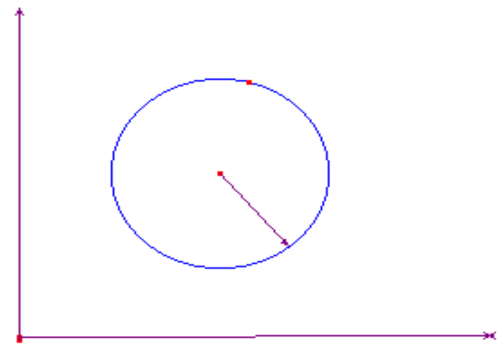
Ανοιχτά Σύνολα

Έστω $a \in R^N, r \in R_+$

Το σύνολο των σημείων x όπου

$\|x - a\| < r$

ονομάζεται ν διάστατη σφαίρα.



Μια ανοιχτή σφαίρα με ακτίνα ε και κέντρο x καλείται περιοχή.

$$\mathrm{X},\ \text{ανοικτο οταν}\ \forall x \in \mathrm{X}\ \exists\ \varepsilon{:}\mathrm{N}_{\varepsilon} \subset \mathrm{X}$$

Βασικές Έννοιες Τοπολογίας

Κλειστό Σύνολο

Ένα σύνολο A στον R^N θα καλείται κλειστό εάν το συμπλήρωμα του $R^N - A$ είναι ανοιχτό

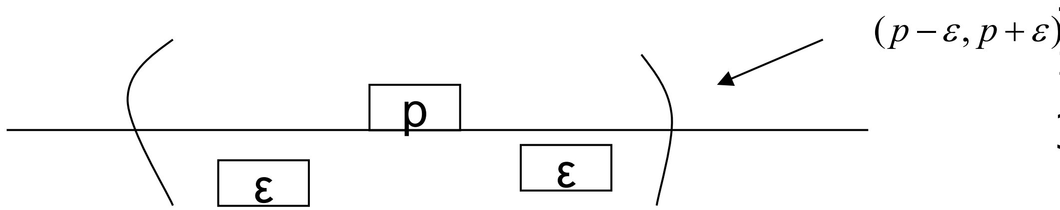
Συνοριακό;; Πως θα το ορίζατε

Ένα σύνολο A στον R^N θα καλείται φραγμένο εάν υπάρχουν r>o και α τέτοια ώστε το A θα βρίσκεται μέσα στην σφαίρα B(a,r)

Ένα σύνολο A στον R^N θα καλείται συμπαγές εάν είναι κλειστό και φραγμένο.

Εννοια Περιοχής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μη κενό σύνολο σημείων Α στον Ευκλείδειο μετρικό χώρο και θεωρούμε ένα σημείο p που ανήκει στον χώρο αυτόν.
Το σύνολο όλων των σημείων x που ανήκουν στον Α όπου ισχύει $d(p,x) < \varepsilon, \varepsilon > 0$ ονομάζεται περιοχή του σημείου p.

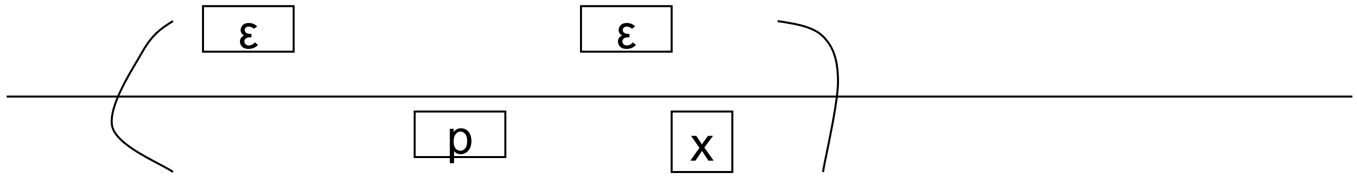


Περιγράψτε την περιοχή ε στις ακόλουθες περιπτώσεις.
1.N(2)
2.N[(2,3)]
3.N{(2,3,1)]

(Παραδείγματα;)

Σημείο Συσσώρευσης

Ας θεωρήσουμε ένα υποσύνολο B του προηγούμενου συνόλου A και το σημείο p που ανήκει στο σύνολο A. Το σημείο p μπορεί να ανήκει ή όχι στο σύνολο B. Κατασκευάζουμε μια περιοχή N(p,ε) και παίρνουμε σημείο x που ανήκει στο N και στο σύνολο B. Μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο αριθμό σημείων ανάμεσα στο x και p.



Σημείο Συσσώρευσης (συνέχεια...)

Ας θεωρήσουμε καινούργιο ε το ε' και κατασκευάζουμε μια περιοχή N(p,ε').
Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία βρίσκοντας καινούργιο άπειρο αριθμό σημείων ανάμεσα στο χ' και στο p. Αλλάζοντας ε παίρνουμε άπειρο αριθμό σημείων γύρω από το p.
Το σημείο p καλείται σημείο συσσώρευσης εάν κάθε περιοχή του p περιέχει τουλάχιστον ένα διαφορετικό σημείο του B διαφορετικό από το p.
Παράδειγμα: $Z=\{x:a\leq x\leq b\}, L=\{x:a<x<b\},$

Κυρτότητα και κυρτό σύνολο

Για τα σημεία x,y ο κυρτός τους συνδυασμός είναι το σύνολο των σημείων x* που για κάθε λ με τιμές στο [0,1] ισχύει ότι:

$$x^* = \lambda x + (1-\lambda) y =$$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 + \ldots + \lambda x_n + (1-\lambda) y_n$$

Ενας χώρος θα καλείται κυρτός όταν για κάθε ζεύγος σημείων x,y και λ με τιμές στο [0,1] ισχύει η παραπάνω σχέση.

Εσωτερικό σημείο ενός συνόλου X υποσύνολο του R είναι το σημείο x_0 για το οποιο ισχύει ότι $\exists\, \varepsilon : \mathrm{N}_{\varepsilon}(x_0) \subset X$

Ενα σύνολο X θα καλείται αυστηρά κυρτό ένα για κάθε ζεύγος σημείων x,y και λ ισχύει ότι το x* είναι εσωτερικο σημείο του X.

Παράδειγμα

Το σύνολο κατανάλωσης ενός καταναλωτή δίνεται παρακάτω. Είναι κλειστό;φραγμένο; Κυρτό; Ποια ερμηνεία δίνεται στα x,y;

$$C=\left\{\left(x,y\right)\in R_{+}^{2}, x\geq x^{'}>0, y\geq y^{'}>0\right\}$$

Το παρακάτω σύνολο είναι κυρτό;

$$C=\left[1,2\right]\cup\left[3,4\right]\subset \mathrm{P}$$

Οι προτιμήσεις ενός καταναλωτή σχετικάμε τον συνδυασμό 2 αγαθών δινεται ως

$$C\left(x^{'},y^{'}\right)=\left\{\left(x,y\right)\in R_{+}^{2},\left(x,y\right)\geq\left(x^{'},y^{'}\right)\right\}$$

Ομοίως!

Ακολουθία Ι

- Κάθε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού των σύνολο των φυσικών αριθμών και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών καλείται ακολουθία.
- Μια ακολουθία μπορεί να παρασταθεί είτε με αναγραφή των όρων της είτε με την χρήση ένός γενικού τύπου.

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$$
$$\alpha_n = f(n), \alpha_n = f(a_{n-1})$$
$$\alpha_{n+1} \geq \alpha_n, \forall n \in N - \alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha$$
$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \forall n \in N - \phi\theta\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha$$

Ακολουθία II

- Μια ακολουθία θα λέγεται συγκλίνουσα σε ένα αριθμό εάν τον προσεγγίζει συνεχώς.

$$\lim \alpha_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N : |\alpha_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

- Μια ακολουθία συγκλίνει κατ'εκδοχήν στο άπειρο όταν

$$\lim \alpha_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists n_0 \in N : \alpha_n > M \ \ \forall n \geq n_0$$
$$\lim \alpha_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists n_0 \in N : \alpha_n < M \ \ \forall n \geq n_0$$

- Αποκλίνουσα όταν αυτή δεν σγκλίνει.

Ακολουθία III

- Καθε ακολουθία περιέχει μια υπακολουθία που είναι αύξοσα ή φθίνουσα.
- Μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
- Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια τουλάχιστον συγκλίνουσα υπακολουθία.
- Εάν μια ακολουθία συγκλίνει στο ρ τότε και κάθε υπακολουθία θα συγκλίνει σε αυτό.
- Το όριο μιας ακολουθίας, εάν υπάρχει, είναι μοναδικό

$$\lim \frac{1}{n} = 0, \lim \frac{1}{n^P} = 0, p \in Q$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1, \lim \sqrt[n]{a} = 1, a \in R^+$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim x^n = \begin{cases} 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \\ +\infty, x > 1 \\ \delta\varepsilon\nu \ \text{υπαρχει}, x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim(\alpha_n + b_n) = \lim \alpha_n + \lim b_n = 0,$$

$$\lim(\alpha_n \cdot b_n) = \lim \alpha_n \cdot \lim b_n = 0,$$

$$\lim\left(\frac{\alpha_n}{b_n}\right) = \frac{\lim \alpha_n}{\lim b_n}$$

$$\lim\{\alpha_n\}^p = (\lim \alpha_n)^p, \lim p^{\alpha_n} = p^{\lim \alpha_n}$$

Όριο Συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε δύο μετρικούς χώρους (S,d_S) και (T,d_T). Έστω επίσης μια συνάρτηση f από το A στο T με A υποσύνολο του T, p σημείο συσσώρευσης και β να ανήκει στο σύνολο T. Θα λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο p είναι β (ή ότι η f προσεγγίζει το β καθώς το x προσεγγίζει το p) όταν:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : d_T(f(x),b) < \varepsilon \text{ για x} \in \text{A με } d_s(x,p) < \delta$$

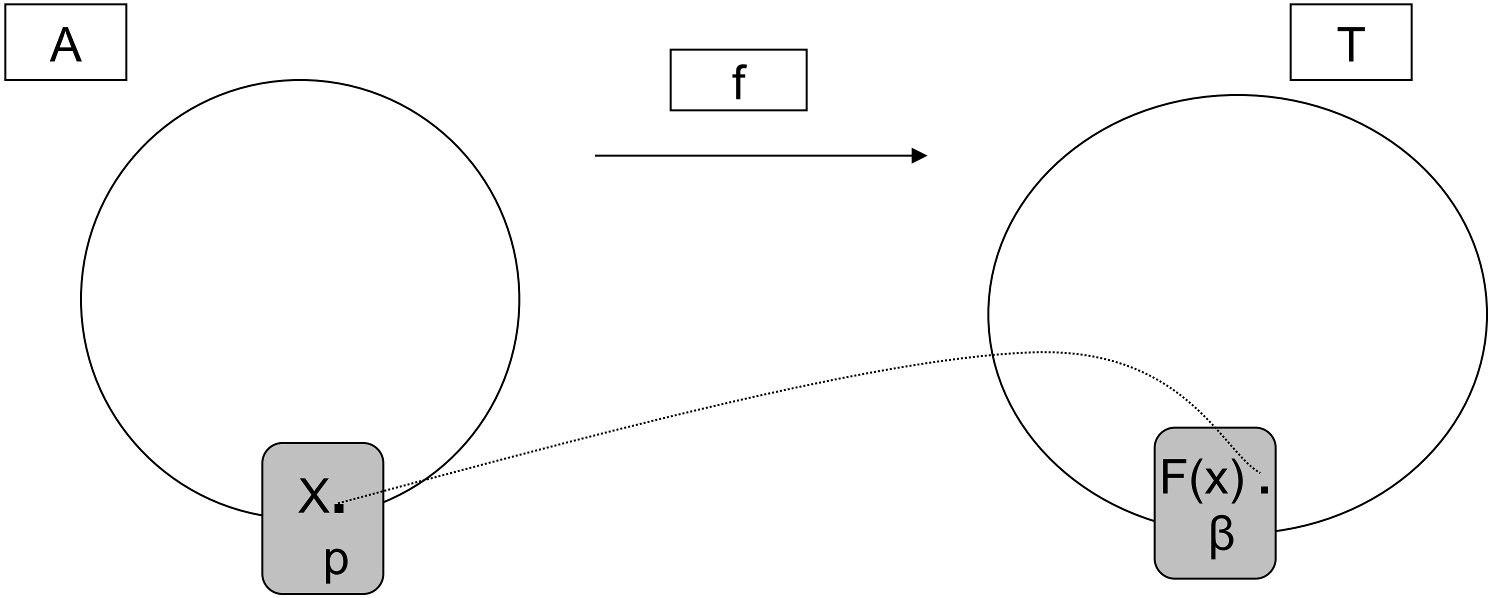
$$\lim_{x \to p} f(x) = \beta$$

$$\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma$$

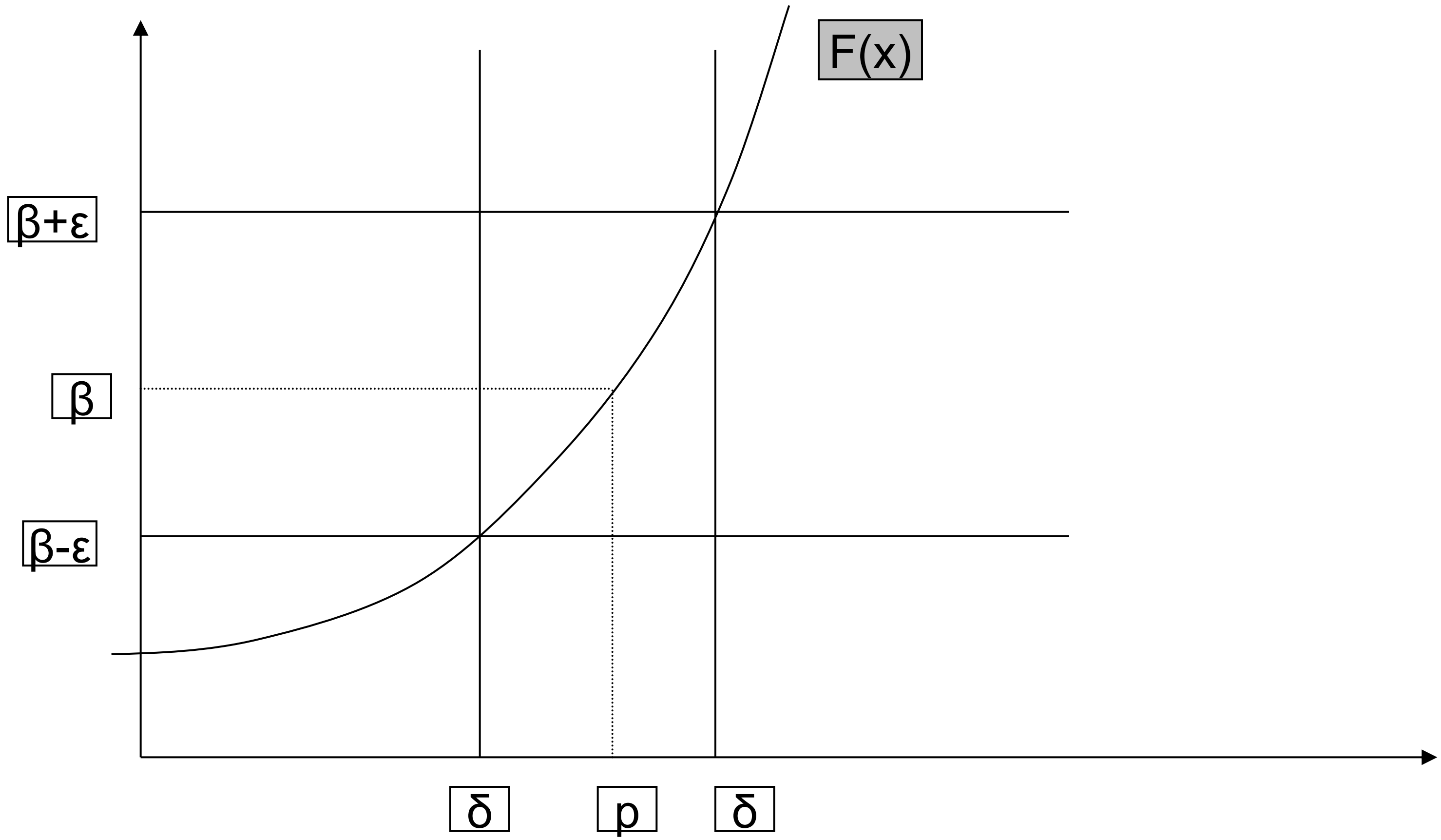
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \left| f(x) - \beta \right| < \varepsilon \text{ για x} \in \text{A με } 0 < \left| \text{x-p} \right| < \delta$$

$$\lim_{x \to p} f(x) = \beta$$

Οριο Συναρτήσεων



Γραφική Παράσταση Ορίου



Όριο Συναρτήσεων (Συνέχεια..)

Το όριο της συνάρτησης f(x) είναι ο αριθμός Α όταν η x τείνει στο α, εάν η f(x) τείνει στο Α καθώς η η x τείνει προς το p (αλλά δεν ισούται με αυτό), δηλ. $\lim_{x \to p} f(x) = A$

Κανόνες Ορίων (Πραγματικές Συναρτήσεις)

- Αν $\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$ και $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \mathrm{B}$
- i. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) + g(x)] = A + B$
- ii. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) - g(x)] = A - B$
- iii. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) * g(x)] = A * B$
- iv. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) / g(x)] = A / B$ (με $B \neq 0$)
- v. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)]^{\alpha/\beta} = A^{\alpha/\beta}$
- Vi. $\lim_{x\to\alpha}[f(x)]^n = A^n$
- Vii. $\lim_{x\to\alpha}|f(x)| = |A|$
- Π.Χ

$$\lim_{x\to 5}\left|4x^2 + 2x + 5\right|, \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k, \lim_{x\to\xi} ax^k = a\xi^k, \lim_{x\to\infty} x^k = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k = +\infty, k \text{ αρτιος}, \lim_{x\to-\infty} x^k = -\infty, k \text{ περιτος}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi, \lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi$$

$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi, \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ όταν α>1}$$

$$\text{Εάν } 0<\text{α}<1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

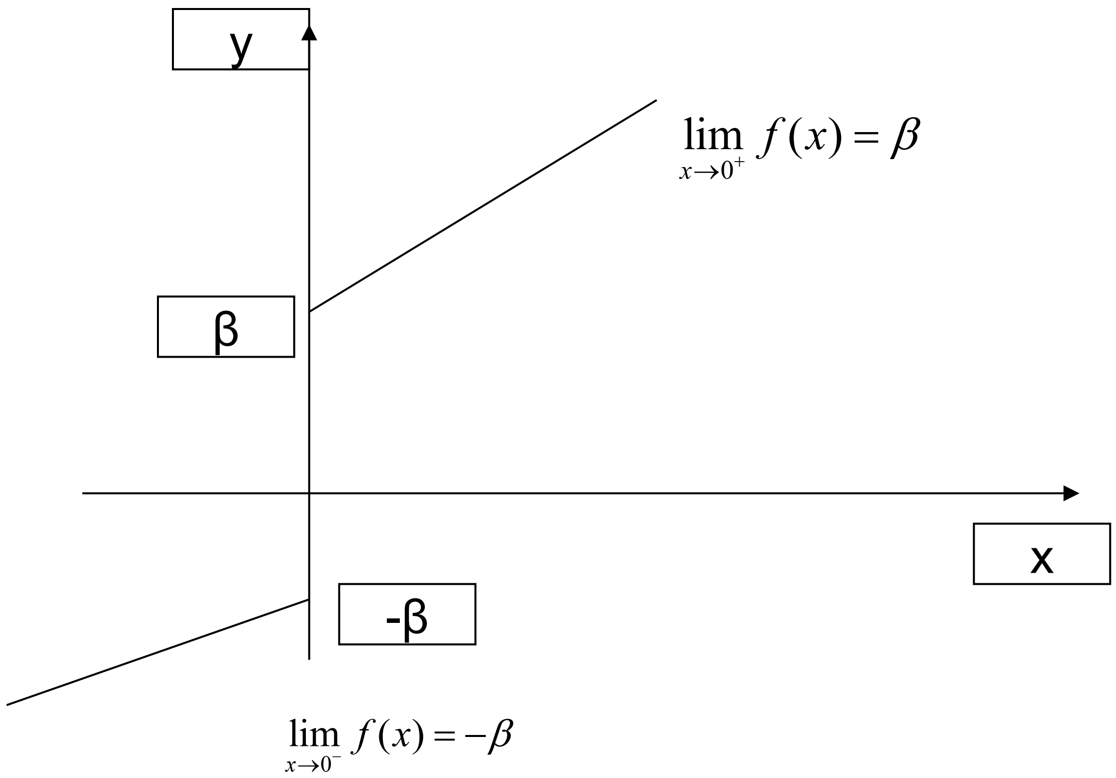
$$\lim_{x\to\xi} \log x = \log\xi, \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty$$

ΟΡΙΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΓΝΩΡΙΖΩ

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tanx}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{1}\right) = e$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{lnx}{x-1}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x} = a$

Πλευρικά Όρια-Όρια στο άπειρο

Στον ορισμό του ορίου δεν θέσαμε περιορισμό για το πως το x θα πλησιάσει το ρ.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{|x+2|(x-2)},\ \lim_{x\to o}\frac{\sin x^2}{x},\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-1}-x\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{|x|+1},$$

$$\text{Εάν}\ \lim_{x\to 1} f(x)=8 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|}{f(x)^2+1}=?$$

Παράδειγμα στα οικονομικά I

Η κυβέρνηση φορολογεί το εισόδημα κάθε φορολογούμενου με συντελεστή **30%** για ετήσιο εισόδημα μεγαλύτερο των **25000** Ευρώ. Για να αυξήσει τα έσοδα από τη φορολογία χωρίς να επιβαρύνει τους οικονομικά ασθενέστερους, η κυβέρνηση σκέπτεται να επιβάλει πρόσθετη φορολογία ίση με **2000** Ευρώ για όσους έχουν ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον **40000** Ευρώ. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση από την οποία προκύπτει το καθαρό εισόδημα κάθε φορολογούμενου, μετά την καταβολή του φόρου. Τι επιπτώσεις αναμένεται να έχει η επιβολή της πρόσθετης φορολογίας σε όσους έχουν υψηλά εισοδήματα;

Παράδειγμα στα οικονομικά ΙΙ

Δίνονται η συνάρτηση ζήτησης **D(p)** και η συνάρτηση προσφοράς **S(p)** ενός προϊόντος:

$$D(P) = \begin{cases} 50 - P, P > 30 \\ 70 - P, P \leq 30 \end{cases}$$

$$S(P) = -12 + P$$

Υπάρχει σημείο ισορροπίας στην αγορά του προιόντος; Τι παρατηρείται;

Παράδειγμα στα οικονομικά III

Εστω μια ροή ισόποσων χρηματικών καταβολών ύψου; 10000 ευρώ ετησίως. Οταν το επιτόκιο είναι 6% να υπολογίσετε

1. Την παρούσα αξία της ροής
2. Την παρούσα αξία των καταβολών όταν ξεκινούν απο το τέλος του 51ου έτους
3. Την παρούσα αξία των καταβολών των 50 πρώτων ετών.

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} P_T = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10000}{(1+0.06)^t}$$

Όρια που τείνουν στο άπειρο

Μια συνάρτηση θα τείνει στο άπειρο $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ εάν για κάθε θετικό αριθμό ε>ο μπορούμε να βρούμε δ>ο που αν εξαρτάται από το ε τέτοιον ώστε

$f(x) > \varepsilon, 0 < |x - \alpha| < \delta$

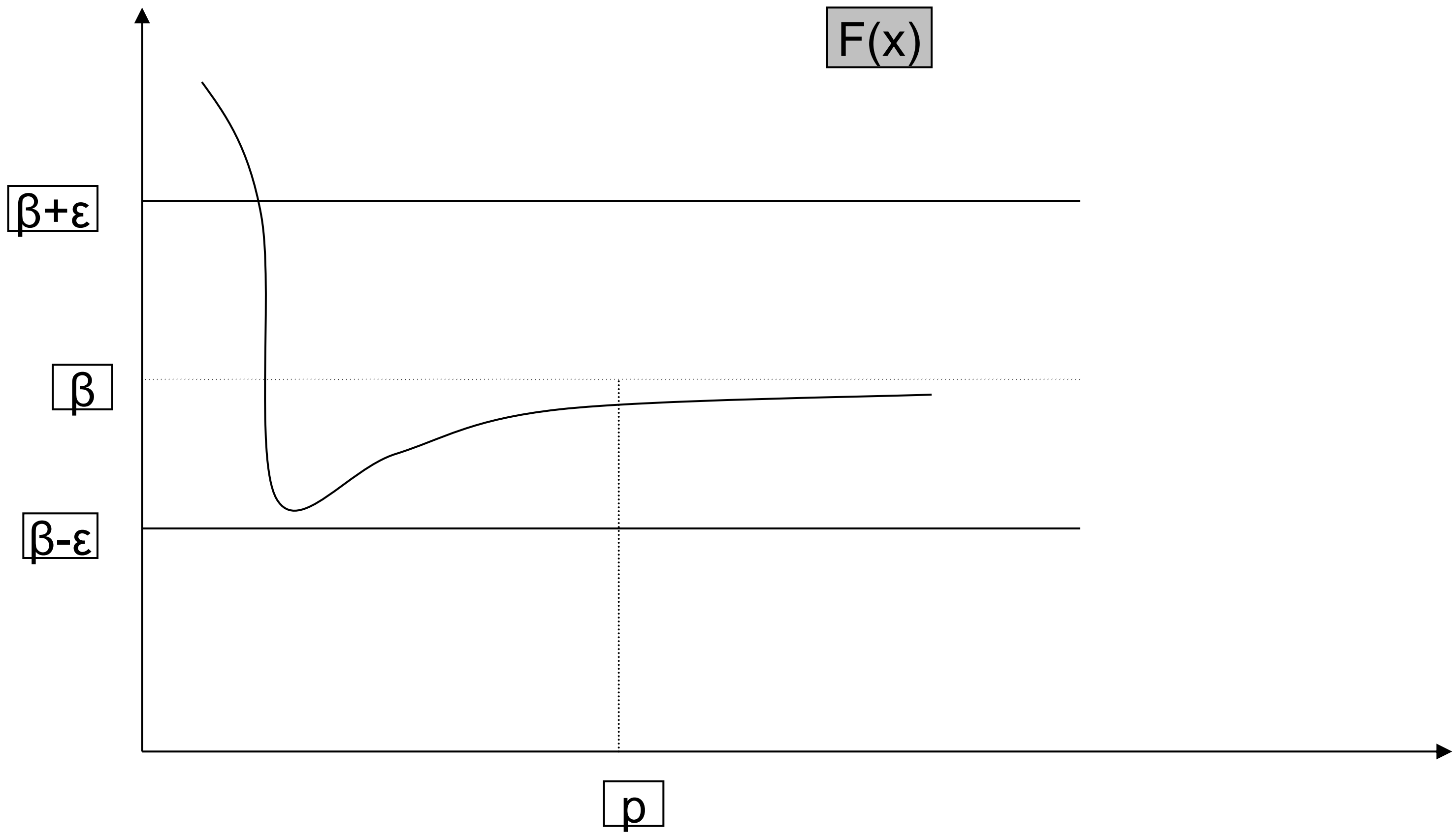
Μια συνάρτηση θα τείνει στο άπειρο $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ εάν για κάθε θετικό αριθμό ε>ο μπορούμε να βρούμε δ>ο που αν εξαρτάται από το ε τέτοιον ώστε

$f(x) < -\varepsilon, 0 < |x - \alpha| < \delta$

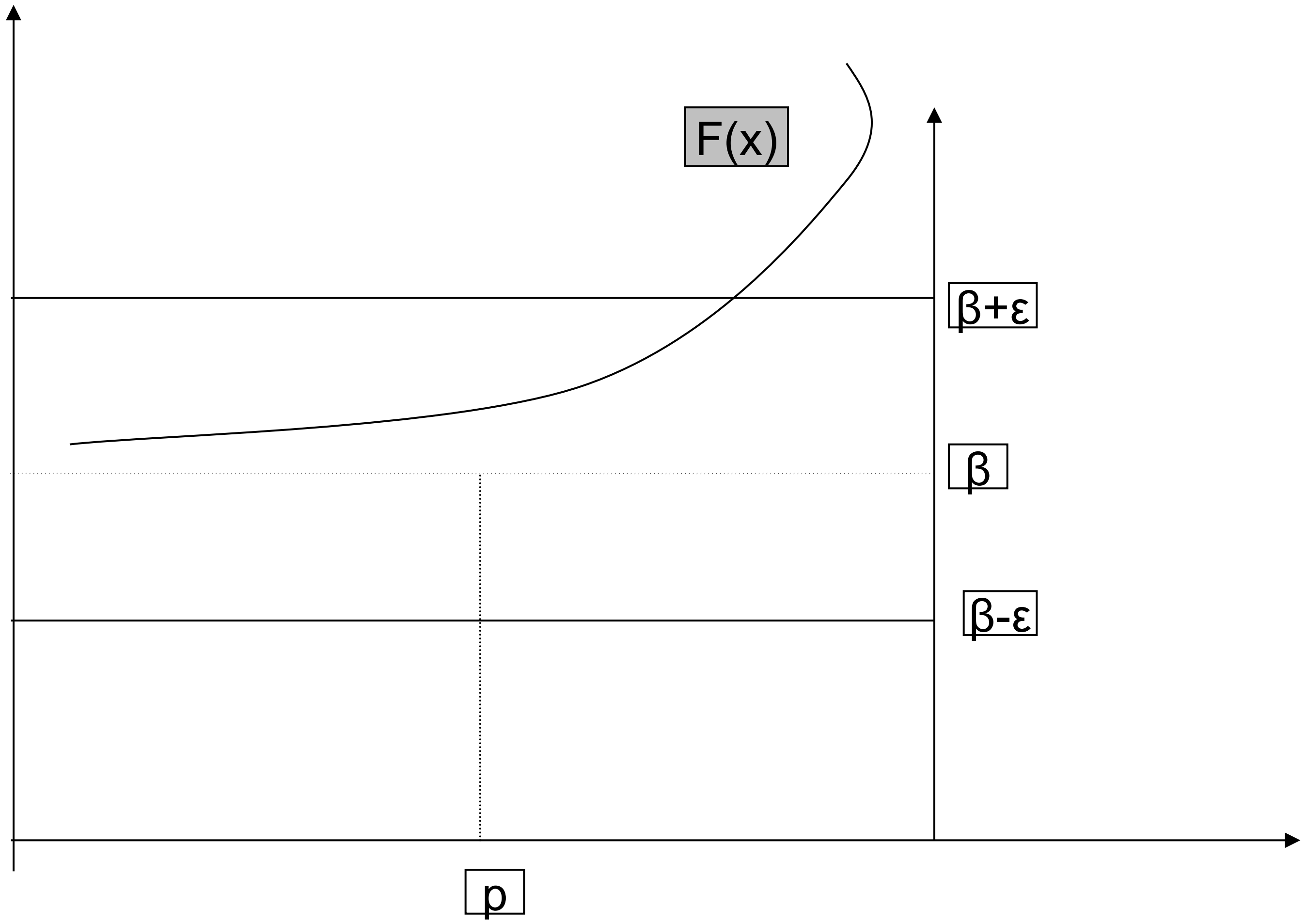
$\Pi\alpha\rho\alpha\delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^6},$$

Γραφική Παράσταση Ορίου



Γραφική Παράσταση Ορίου



Συνέχεια Συναρτήσεων (1)

Έστω μια συνάρτηση $f(x): A \to R, A \subseteq R$ Η συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο p του A εάν:

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση στο σημείο p του πεδίου ορισμού της θα πρέπει να ισχύουν:

1. Να υπάρχει το όριο της f(x) στο p,
2. Το όριο να ισούται με την τιμή της παράστασης
3. Προφανώς να υπάρχει το f(p).

Μια συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του π.ο A θα λέμε ότι είναι συνεχής σε όλο το A.

Συνέχεια Συναρτήσεων (2)

$\Pi\alpha\rho\alpha\delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha\tau\alpha$: Να μελετηθεί η συνέχεια των συναρτήσεων

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{5x^2}{(x^2+1)},\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)},\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)}$$

Συνέχεια και Οικονομικά (1)

Οι περισσότερες συναρτήσεις στα οικονομικά είναι συνεχείς θεωρώντας ότι οι μεταβολές που γίνονται είναι συνεχείς (συναρτήσεις ζήτησης, προσφοράς ή κόστους).

Συνέχεια και Οικονομικά (2)

Μια ασφαλιστική εταιρεία αμείβει του υπαλλήλους της με καθαρό μηνιαίο μισθό 1000 ευρώ συν προμήθεια 15% επί της αξίας των συμβολαίων συν ένα πριμ αποδοτικότητας 600 ευρώ ανά μήνα εάν ξεπεράσει τις 15000 ευρώ. Θεωρείται ότι είναι συνεχής η συγκεκριμένη συνάρτηση;

Ανατοκισμός

- Τύπος ανατοκισμού κεφαλαίου μετά από n έτη και με επιτόκιο r. $K_n = K_0(1+r)^n - K_t = K_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
- Τύπος συνεχούς ανατοκισμού: $K_t = K_0 e^{rt}$
- Παρούσα αξία αρχικού κεφαλαίου τοκιζόμενου με επιτόκιο r ,μετά από t έτη.

$$K_n = \frac{K_0}{(1+r)^n}$$

- Σχέση ανάμεσα στο πραγματικό επιτόκιο r₀ και το ονομαστικό επιτόκιο r.

$$r_0 = (1+\frac{r}{n})^n - 1$$

Συνέχεια και Οικονομικά (3)

Ποσό 1000 ευρώ επενδύονται με συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο 5%.

1. Πόσα ευρώ θα υπάρχουν στον λογαριασμό μετά έξι έτη;
2. Πόσος καιρός απαιτείται για να διπλασιασθεί η αρχική επένδυση
3. Μετά από έξι έτη με τι ρυθμό θα αυξάνεται το κεφάλαιο;

Κανόνες Συνέχειας

1) Το άθροισμα ή η διαφορά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
   $[f(x) \pm g(x)] = F(x)$
2) Το γινόμενο συνεχούς συνάρτησης με πραγματικό αριθμό ή συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση $[af(x)] = F(x), [g(x)f(x)] = F(x)$
3) Το πηλίκο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση $[f(x)/g(x)] = F(x), g(x) \neq 0$
4) Η απόλυτη τιμή και η δύναμη μια συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής.

Κανόνες Συνέχειας

5) Οι συναρτήσεις ημχ, συνχ είναι συνεχείς συναρτήσεις
6) Η συνάρτηση e^x, a^x είναι συνεχείς συναρτήσεις
7) Προσοχή ισχύει ότι $\lim_{x->+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x, \lim_{x->0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

(*Καλό θα ήταν να κάνατε τις αποδείξεις*)

Στοιχεία Τοπολογίας

- Ανοιχτή Σφαίρα (σύνολο): Εστω $\alpha \in R^n$ και r>0. Το σύνολο των σημείων x στο R^n : $\|x-a\| < r . B(a,r)$

(Ένα ανοιχτό διάστημα στο R είναι ανοιχτό σύνολο)

- Ένα σύνολο S στο R^n είναι κλειστό αν το

συμπλήρωμα $R^n - S$ του είναι ανοιχτό.

(Ένα κλειστό διάστημα στο R είναι κλειστό σύνολο)

- Συμπαγή σύνολα: Ένα σύνολο λέγεται συμπαγές εάν είναι κλειστό και φραγμένο.
- Φραγμένα Σύνολα:

Εστω σύνολο S στο R^n λέγεται φραγμένο αν υπάρχουν r>0 και

$\alpha \in R^n$ ώστε το S να βρίσκεται στην $B(a,r)$

Συνέχεια Συναρτήσεων σε Συμπαγή & Συνεχόμενα Σύνολα

Εάν η f(x) είναι συνεχής στο [α,β] τότε:

1. Η f(x) παίρνει μια μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο [α,β] (Weierstrass).
2. Εάν οι τιμές f(α) και f(β) είναι ετερόσημες τότε υπάρχει δ στο [α,β]:f(δ)=0 (Bolzano).
3. Εάν λ αριθμός μεταξύ των α,β τότε υπάρχει σημείο δ στο [α,β]:f(δ)=λ

Συνέχεια Συναρτήσεων σε Συμπαγή & Συνεχόμενα Σύνολα

Εάν η f(x) είναι συνεχής στο [α,β] τότε:

4. Εάν x,y δύο τυχαία σημεία με x<y και με f(x) διάφορο του f(y) τότε η f(x) θα παίρνει όλες τις τιμές που βρίσκοντια μεταξύ των f(x) και f(y) όταν το x παίρνει τιμές στο [x,y]. (ΘΜΤ).

Συνέχεια Συναρτήσεων σε Συμπαγή & Συνεχόμενα Σύνολα

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής $A(q) = q2^q - 1$ Να δείξετε ότι στο διάστημα (0,1) έχει μόνο μία ρίζα.

Να δείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση κερδών $\Pi(q) = q^3 + 2q^2 + 3q + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα πραγματική.

Συνέχεια Σύνθετων Συναρτήσεων

Εάν η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο x_0

και η g(x) συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$

τότε η $g \circ f$ θα είναι συνεχής $\forall x = x_0$

Εφαρμογές

Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9},\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3+|x^2-4x+3|}{x-3},\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

Να βρεθούν τα α,β ωστε η f(x) να είναι συνεχής

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2(x-2)}{(x-2)(x^2-5x+6)}, & x\neq 2,3\\ -\ln|a-2|, & x=2\end{cases}$$

Τι να διαβάσω

- Κεφάλαιο Τρίτο Jacques
- Κεφάλαια 8-9 απο τον Λουκάκη
- Σημειώσεις από το http://eclass.upatras.gr

(Σημειώσεις Θεωρίας & Ασκήσεων Φροντιστηρίου)

Να επιλυθουν και οι ασκήσεις πολλαπλής επιλογής!!!