Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

12/4/2022

Άσκηση 1

Έστω X πληθυσμός από Κανονική Κατανομή
X$\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 144)$.
Από αυτόν τον πληθυσμό X, επιλέγουμε τ.δ. $x_1, x_2, ..., x_{36}$ και υπολογίζουμε τη μέση τιμή την οποία βρίσκουμε $\bar{x}$=70.
Να οριστούν δυο όρια στα οποία να περιέχεται ο πληθυσμιακός μέσος, με πιθανότητα 99%.

Λύση Άσκησης 1

- Κανονική Κατανομή
- Πληθυσμιακή Διακύμανση σ^2
- Μέγεθος Δείγματος (n)

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να κάνω χρήση του εξής τύπου δ.ε.

Τύπος δ.ε. για τη μέση τιμή (μ) ενός πληθυσμού, με γνωστή πληθυσμιακή διακύμανση

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $1 - \alpha = 0.99$ άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\alpha = 0.01$.

Κάνοντας χρήση του τύπου 1, έχουμε:

$$[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] =$$

$$[70 - 2.58\frac{12}{6}, 70 + 2.58\frac{12}{6}] =$$

$$[64.84, 75.16]$$

Άσκηση 2

Έστω X πληθυσμός από Κανονική Κατανομή X$\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Από αυτόν τον πληθυσμό X, επιλέγουμε τ.δ. $x_1, x_2, ..., x_{14}$ και υπολογίζουμε τη μέση τιμή την οποία βρίσκουμε $\bar{x}$=52.52 και τη δειγματική διακύμανση την οποία βρίσκουμε s^{*2}=3.37.
Να βρεθεί 95% δ.ε. για τον πληθυσμιακό μέσο.

Λύση Άσκησης 2

- Κανονική Κατανομή
- Πληθυσμιακή Διακύμανση σ^2
- Μέγεθος Δείγματος (n)

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να κάνω χρήση του εξής τύπου δ.ε.

Τύπος δ.ε. για τη μέση τιμή (μ) ενός πληθυσμού, για άγνωστη πληθυσμιακή διακύμανση και μικρό μέγεθος δείγματος

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s^*}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $1-\alpha = 0.95$ άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\alpha = 0.05$.

Κάνοντας χρήση του τύπου 2, έχουμε:

$$[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s^*}{\sqrt{n}}] =$$

$$[52.52 - 2.16\frac{1.83}{3.742}, 52.52 + 2.16\frac{1.83}{3.742}] =$$

$$[51.46, 53.57]$$

Άσκηση 3

Έστω ότι η κατανομή του εισοδήματος σε δυο διαφορετικές χώρες (χώρα Χ και χώρα Υ), ακολουθεί Κανονική Κατανομή Χ$\sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2 = 100)$ και Υ$\sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2 = 81)$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα 95% δ.ε. για την πραγματική διαφορά των μέσων εισοδημάτων των δυο χωρών. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε τ.δ. 1200 ατόμων από τη χώρα Χ και 250 ατόμων από τη χώρα Υ και βρίσκουμε ότι τα αντίστοιχα δειγματικά μέσα εισοδήματα είναι 72 χ.μ. και 70 χ.μ. (σε εκατοντάδες χ.μ.)

Λύση Άσκησης 3

- Κανονική Κατανομή για X και Υ
- Πληθυσμιακές Διακυμάνσεις σ_x^2 και σ_y^2
- Μέγεθος Δείγματος (n_x και n_y)

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να κάνω χρήση του εξής τύπου δ.ε.

Τύπος δ.ε. για τη διαφορά των μέσων (μ_x - μ_y) δυο πληθυσμών, με γνωστές πληθυσμιακές διακυμάνσεις

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \tag{3}$$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $1-\alpha = 0.95$ άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\alpha = 0.05$.

Κάνοντας χρήση του τύπου 3, έχουμε:

$$[(\bar{x}-\bar{y}) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}, (\bar{x}-\bar{y}) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}] =$$

$$[(72-70) - 1.96\sqrt{\frac{100}{1200}+\frac{81}{250}}, (72-70) + 1.96\sqrt{\frac{100}{1200}+\frac{81}{250}}] =$$

$$[0.749, 3.251]$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Τα άκρα του δ.ε. είναι και τα δυο θετικά, συνεπώς το δ.ε. δεν περιέχει το μηδέν.

Άσκηση 4

Στην Άσκηση 3, θεωρούμε ότι δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τις πληθυσμιακές διακυμάνσεις σ_x^2 και σ_y^2, αλλά μπορούμε να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες δειγματικές $s_x^{*2} = 100$ και $s_y^{*2} = 81$. Μάλιστα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι διακυμάνσεις μεταξύ τους είναι ίσες, αν και άγνωστες ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$).

Λύση Άσκησης 4

- Κανονική Κατανομή για X και Υ
- Πληθυσμιακές Διακυμάνσεις σ_x^2 και σ_y^2
- Μέγεθος Δείγματος (n_x και n_y)

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να κάνω χρήση του εξής τύπου δ.ε.

Τύπος δ.ε. για τη διαφορά των μέσων (μ_x - μ_y) δυο πληθυσμών, με άγνωστες αλλά ίσες πληθυσμιακές διακυμάνσεις

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{(n_x+n_y-2),(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{s_p^2}{n_x} + \frac{s_p^2}{n_y}} \tag{4}$$

όπου

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^{*2} + (n_y - 1)s_y^{*2}}{n_x + n_y - 2} \tag{5}$$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $1 - \alpha = 0.95$ άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\alpha = 0.05$.

Κάνοντας χρήση του τύπου 4, υπολογίζοντας πρώτα το s_p^2, από τον τύπο 5 έχουμε:

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^{*2} + (n_y - 1)s_y^{*2}}{n_x + n_y - 2} = \frac{(1200 - 1)100 + (250 - 1)81}{1200 + 250 - 2}$$

Άρα $s_p^2 = 96.73$

Συνέχεια

$$(\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{(n_x+n_y-2),(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{s_p^2}{n_x}+\frac{s_p^2}{n_y}} =$$

$$[(72-70) - t_{(1200+250-2),(0.975)}\sqrt{\frac{96.73}{1200}+\frac{96.73}{250}}, (72-70) +$$

$$t_{(1200+250-2),(0.975)}\sqrt{\frac{96.73}{1200}+\frac{96.73}{250}}] =$$

$$[0.66, 3.34]$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Τα άκρα του δ.ε. είναι και τα δυο θετικά, συνεπώς το δ.ε. δεν περιέχει το μηδέν.