Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Μέθοδοι Εκτίμησης (Μέθοδος Ροπών - Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας)

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

5/4/2022

Μεθοδολογία

Η διαδικασία της Μεθόδου Ροπών είναι η εξής:

1. Υπολογίζω τις ροπές της κατανομής (πληθυσμιακές) μέχρι την t τάξη (μ_t), ανάλογα με τον αριθμό των παραμέτρων που επιθυμώ να εκτιμήσω, για $t = 1,2,3,\ldots$.

   Αν πρόκειται για Διακριτή Κατανομή:

   $$\mu_t = E(X^t) = \sum_{i=1}^{n} x^t P(X = x) \tag{1}$$

   ή αν πρόκειται για Συνεχή Κατανομή:

   $$\mu_t = E(X^t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^t f_X(x) dx \tag{2}$$

Βασικές Έννοιες - Ορισμός

2. Υπολογίζω τις δειγματικές ροπές μέχρι την t τάξη που υπολόγισα και στις πληθυσμιακές, για $t = 1,2,3,\ldots,$ σύμφωνα με τον τύπο:

$$m_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^t}{n} \tag{3}$$

3. Εξισώνω τις πληθυσμιακές ροπές t τάξης με τις αντίστοιχες δειγματικές, για κάθε t.

$$\mu_t = m_t \tag{4}$$

Άσκηση 1

Από πληθυσμό (X) επιλέγουμε τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $x_1, x_2, \dots, x_n$. Να βρεθούν οι εκτιμήτριες, με τη μέθοδο ροπών, των παραμέτρων:

1. θ, αν το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την Ομοιόμορφη Κατανομή, στο διάστημα $(0, \theta)$.
2. λ, αν το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την Κατανομή *Poisson*, με παράμετρο λ.
3. θ, αν το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την Κατανομή, με σ.π.π. $f_X(x) = \theta X^{\theta-1}, 0 < X < 1$.
4. μ και σ^2, αν το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την Κανονική Κατανομή, με παραμέτρους μ και σ^2.

Συνέχεια Άσκησης 1

1. Αναζητούμε την εκτιμήτρια μεθόδου ροπών για το θ, δηλαδή για μια παράμετρο του πληθυσμού. Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε την πληθυσμιακή ροπή πρώτης τάξης, η οποία στην περίπτωση της Ομοιόμορφης Κατανομής είναι $\mu_1 = \mathrm{E(X)} = \frac{\theta - 0}{2} = \frac{\theta}{2}$.

   Αφού γνωρίζουμε την πληθυσμιακή ροπή πρώτης τάξης, θα πρέπει να υπολογίσουμε και τη δειγματική ροπή πρώτης τάξης για να τις εξισώσουμε. Αυτό αρκεί, καθώς αναζητούμε την εκτιμήτρια μεθόδου ροπών για το θ.

   Η δειγματική ροπή πρώτης τάξης είναι: $m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

   Άρα, από τη σχέση $\mu_1 = m_1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{x} \Leftrightarrow \hat{\theta} = 2\bar{x}$

Συνέχεια Άσκησης 1

2. Αναζητούμε την εκτιμήτρια μεθόδου ροπών για το λ, δηλαδή για μια παράμετρο του πληθυσμού. Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε την πληθυσμιακή ροπή πρώτης τάξης, η οποία στην περίπτωση της Κατανομής *Poisson* είναι $\mu_1 = \mathrm{E}(X) = \lambda$.

   Όπως και πριν, θα πρέπει να υπολογίσουμε και τη δειγματική ροπή πρώτης τάξης για να τις εξισώσουμε.

   Η δειγματική ροπή πρώτης τάξης είναι: $m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

   Άρα, από τη σχέση $\mu_1 = m_1 \Leftrightarrow \lambda = \bar{x} \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$

Συνέχεια Άσκησης 1

3. Αναζητούμε την εκτιμήτρια μεθόδου ροπών για το θ, δηλαδή για μια παράμετρο του πληθυσμού. Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε την πληθυσμιακή ροπή πρώτης τάξης, από τη σ.π.π., αφού δεν πρόκειται για κάποια από τις γνωστές κατανομές.
$\mu_1 = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x\theta X^{\theta-1} dx =$

   $\theta \int_0^1 X^\theta dx = \theta \left[\frac{X^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}.$

   Όπως και πριν, η δειγματική ροπή πρώτης τάξης είναι:
$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$

   Άρα, από τη σχέση
$\mu_1 = m_1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \Leftrightarrow \theta = \bar{x}(\theta + 1) \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$

Συνέχεια Άσκησης 1

4. Αναζητούμε την εκτιμήτρια μεθόδου ροπών για τα μ και σ^2, δηλαδή για δυο παραμέτρους του πληθυσμού. Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε τις πληθυσμιακές ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης.
$\mu_1 = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mu$.
$\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2$.
Όπως και πριν, η δειγματική ροπή πρώτης τάξης είναι:
$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$
και η δειγματική ροπή δεύτερης τάξης: $m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$
Άρα, λύνοντας το σύστημα:
$\mu_1 = m_1 \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$
$\mu_2 = m_2 \Leftrightarrow \sigma^2 + \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \Leftrightarrow \hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n} \Leftrightarrow \hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$

Συνέχεια Άσκησης 1

Σημείωση:

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) =$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 =$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 =$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - n\bar{x}^2$

Μεθοδολογία

1. Βρίσκω τη συνάρτηση Πιθανοφάνειας

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) \tag{5}$$

2. Λογαριθμίζω τη συνάρτηση Πιθανοφάνειας και βρίσκω

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f(X_i, \theta)) \tag{6}$$

3. Σ.Π.Τ. για βέλτιστο του λογαρίθμου της Πιθανοφάνειας

$$\frac{\partial(\ln(L(\theta)))}{\partial\theta} = 0 \tag{7}$$

4. Σ.Δ.Τ. για να εξασφαλίσω ότι πρόκειται για μέγιστο

$$\frac{\partial^2(\ln(L(\theta)))}{\partial\theta^2} < 0 \tag{8}$$

Άσκηση 2

Έστω τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $x_1, x_2, ..., x_n$ από πληθυσμό που ακολουθεί την κατανομή *Poisson*, με παράμετρο λ.
Να βρεθεί εκτιμήτρια της παραμέτρου λ με τη μέθοδο μέγιστης Πιθανοφάνειας.

Άσκηση 2

1. Ορίζουμε τη συνάρτηση Πιθανοφάνειας, ως εξής:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{(\sum_{i=1}^{n} x_i)}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

2. Λογαριθμίζω τη συνάρτηση Πιθανοφάνειας, ως εξής:

$$\ln(L(\lambda)) = \ln(e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{(\sum_{i=1}^{n} x_i)}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}) =$$

$$\ln(e^{-n\lambda}) + \ln(\lambda^{(\sum_{i=1}^{n} x_i)}) - \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!) =$$

$$-n\lambda + (\sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(\lambda) - \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!) =$$

Άσκηση 2

3. Σ.Π.Τ. για βέλτιστο στη συνάρτηση $\ln(L(\theta))$.

$$\frac{\partial(\ln(L(\lambda)))}{\partial\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial(-n\lambda+(\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(\lambda)-\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!))}{\partial\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$$

4. Σ.Δ.Τ. για να εξασφαλίσω ότι πρόκειται για μέγιστο.

$$\frac{\partial^2(\ln(L(\lambda)))}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial(\partial(\ln(L(\lambda))))}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial(-n+\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda})}{\partial\lambda} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0.$$

Άρα πρόκειται για μέγιστο.